

応用数学 B 期末試験解説 (2009.1.29 実施)

問題 1 $[0, +\infty)$ 上で定義された関数 $f(t)$ のラプラス積分は

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

で定義される. ($10 \times 2 = 20$ 点)

- (1) $a > 0$ を定数とするとき, $f(t) = e^{-at}$ のラプラス積分を計算し, 増加指数と合わせて答えよ.
- (2) $f(t)$ のラプラス変換とは, $F(p)$ を複素平面全体に解析接続したものとして定義される. このことを (1) を例にして説明せよ.

解説 (1) 定義にあてはめて計算するだけ.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t} dt = \left[-\frac{1}{a+p} e^{-(a+p)t} \right]_0^{+\infty}$$

この積分が収束するのは, $\operatorname{Re}(a+p) > 0$ のとき, つまり $\operatorname{Re} p > -a$ のときである. よって, 増加指数は $s_0 = -a$ であり,

$$F(p) = \frac{1}{a+p}$$

が得られる.

(2) ラプラス積分は領域 $\operatorname{Re} p > s_0$ (s_0 は増加指数) でのみ収束して, そこで正則な関数になる. 一般に, ある領域で定義された正則関数は, 正則性を保ったまま, より広い領域で定義された正則関数に拡張されることがある. 上の例では, ラプラス積分は領域 $\operatorname{Re} p > -a$ で正則であるが, 得られた関数は $\frac{1}{a+p}$ であり, これは $\mathbb{C} \setminus \{-a\}$ において正則な関数である. このように, ラプラス積分で得られた関数 $F(p)$ の定義域をできるだけ拡張したものを $f(t)$ のラプラス変換という.

問題 2 $f(t)$ を $[0, +\infty)$ 上で定義されたなめらかな関数とし, $F(p)$ をそのラプラス変換とする. このとき, ラプラス変換の反転公式は

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iR}^{a+iR} F(p)e^{pt} dp \quad (\text{A})$$

で与えられる. ただし, a は増加指数より大きな実数である. ($10 \times 2 = 20$ 点)

- (1) $G(p), H(p)$ が多項式で $\deg G(p) < \deg H(p)$ を満たすものとする. このとき, $F(p) = \frac{G(p)}{H(p)}$ の極を $p_1, \dots, p_n$ とすれば,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}$$

が成り立つ. このことを, (A) を用いて説明せよ.

- (2) $F(p) = \frac{p^2}{(p+1)(p+2)^3}$ の原関数 $f(t)$ を求めよ.

解説 (1) 教科書の定理 5.8 (pp. 154–155) を見よ.

(2) 公式によって,

$$f(t) = \operatorname{Res}_{p=-1} \frac{p^2}{(p+1)(p+2)^3} e^{pt} + \operatorname{Res}_{p=-2} \frac{p^2}{(p+1)(p+2)^3} e^{pt}$$

を計算すればよい。留数は次のように求められる。

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{p=-1} \frac{p^2}{(p+1)(p+2)^3} e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p^2}{(p+2)^3} e^{pt} = e^{-t}, \\ \operatorname{Res}_{p=-2} \frac{p^2}{(p+1)(p+2)^3} e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p^2}{p+1} e^{pt} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{(p+1)^3} e^{pt} + \frac{2(2p+p^2)}{(p+1)^2} t e^{pt} + \frac{p^2}{p+1} t^2 e^{pt} \right) \\ &= (-1 - 2t^2) e^{-2t}\end{aligned}$$

したがって、

$$f(t) = e^{-t} - (1 + 2t^2)e^{-2t}$$

問題 3 ラプラス変換を用いて次の方程式を解け。(15 点)

$$f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) = e^{-t}, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = -5$$

解説 導関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f'] = p\mathcal{L}[f] - f(0)$$

の公式を用いる (この式の証明もやさしい)。

$F = \mathcal{L}[f]$ とおくことにする。

$$\mathcal{L}[f'] = pF - f(0) = pF - 3.$$

さらに、

$$\mathcal{L}[f''] = p\mathcal{L}[f'] - f'(0) = p(pF - 3) + 5 = p^2F - 3p + 5.$$

一方、

$$\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{p+1}$$

であるから、与えられた方程式は、

$$(p^2F - 3p + 5) + 3(pF - 3) + 2F = \frac{1}{p+1}$$

となる。これを F について解くと、

$$F = \frac{3p^2 + 7p + 5}{(p+1)^2(p+2)}$$

これに逆変換を適用すれば、

$$\begin{aligned}f(t) &= \operatorname{Res}_{p=-1} \frac{3p^2 + 7p + 5}{(p+1)^2(p+2)} e^{pt} + \operatorname{Res}_{p=-2} \frac{3p^2 + 7p + 5}{(p+1)^2(p+2)} e^{pt} \\ &= te^{-t} + 3e^{-2t}\end{aligned}$$

問題 4 ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

を全複素平面に解析接続したものである。 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を既知として、 $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ を計算せよ。(15 点)

解説 部分積分によって、

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = [t^{z-1}(-e^{-t})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (z-1)t^{z-2}(-e^{-t})dt \\ &= (z-1) \int_0^{+\infty} t^{z-2} e^{-t} dt = (z-1)\Gamma(z-1)\end{aligned}$$

この式は、 $\operatorname{Re}(z-1) > 0$ のとき、つまり、 $\operatorname{Re} z > 1$ のときに成り立つ式である。変数 z を $z+1$ に置き換えて、

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

が得られたことになる。右辺が $\operatorname{Re} z > -1, z \neq 0$ で意味をもつことを利用して、 $\Gamma(z)$ がその領域に拡張される。これを繰り返せば、 $\Gamma(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ に拡張される。さて、上の関数等式を繰り返し用いれば、

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+2\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+3\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.$$

問題 5 $\nu = 0, 1, 2, \dots$ とする。ルジャンドルの微分方程式

$$(1-z^2)f''(z) - 2zf'(z) + \nu(\nu+1)f(z) = 0$$

の解で $f(0) = 1$ を満たす多項式解は存在するか？ その多項式の次数も合わせて答えよ。(15 点)

解説 $f(0) = 1$ を満たすことから、

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

とおいて係数を定めることを考えればよい。

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2},$$

これらを与えられた微分方程式に代入して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n z^n + \nu(\nu+1) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right) = 0$$

第 1 項と第 4 項を書き直して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n z^n + \nu(\nu+1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \nu(\nu+1) = 0$$

したがって、

$$2c_2 + \nu(\nu+1) = 0, \quad (n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + \nu(\nu+1)c_n = 0, \quad n \geq 1.$$

漸化式をさらに整理すれば、

$$c_{n+2} = \frac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{(n+2)(n+1)} c_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$c_2 = -\frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

(Case 1) ν が偶数のとき。 c_2 は与えられていて、漸化式を繰り返し用いれば、 $c_4, c_6, \dots$ が定まる。ところが、 c_ν まで定まると、 $c_{\nu+2} = 0$ となる。つまり、

$$c_2 \neq 0, \quad c_4 \neq 0, \quad \dots, c_\nu \neq 0, \quad c_{\nu+2} = \dots = 0$$

がわかる。さらに、 $c_1 \neq 0$ なら、再び漸化式を繰り返し用いて、 $c_3 \neq 0, c_5 \neq 0, \dots$ となり、 $f(z)$ は多項式にならない。よって、 $f(z)$ が多項式ならば、 $c_1 = 0$ であり、このとき $c_1 = c_3 = \dots = 0$ 。したがって、

$$f(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\nu/2} c_{2m} z^{2m}$$

の形の解が存在する。これは ν 次多項式である。

(Case 2) ν が奇数のとき. $c_2 \neq 0$ は与えられていて, 漸化式を繰り返し用いれば, $c_4, c_6, \dots$ が定まるが, それらは決して 0 にはならない. したがって, $f(z)$ は多項式になりえない. つまり, $f(0) = 1$ を満たす多項式解は存在しない.

問題 6 2 次元のラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

を境界条件

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 2 \sin 2y \cos y$$

のもとで解け. (15 点)

解説 まず, $u(x, y) = X(x)Y(y)$ の形の解を求めよう.

$$X''Y + XY'' = 0$$

となるから,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

したがって, λ を定数として,

$$\frac{X''}{X} = \lambda^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

とおける. これらは容易に解けて,

$$\begin{aligned} X(x) &= a_1 e^{\lambda x} + a_2 e^{-\lambda x} \\ Y(y) &= b_1 \sin \lambda y + b_2 \cos \lambda y \end{aligned}$$

次に, 境界条件 $u(x, 0) = u(x, \pi) = u(0, y) = 0$ から,

$$X(x)Y(0) = X(x)Y(\pi) = X(0)Y(y) = 0$$

したがって,

$$Y(0) = Y(\pi) = X(0) = 0.$$

まず, $Y(0) = b_2$ から

$$b_2 = 0.$$

このとき, $Y(\pi) = b_1 \sin \lambda \pi$ であるが, $Y(\pi) = 0$ となるのは $b_1 = 0$ または $\sin \lambda \pi = 0$. $b_1 = 0$ とすると, $Y = 0$ となって求めるべき解にならない. よって, $\sin \lambda \pi = 0$. したがって, λ は整数. $\lambda = 0$ ならやはり, $Y = 0$ となるので除外. $\lambda = -1, -2, \dots$ のときは, 定数の符号を変えることで, $\lambda = 1, 2, \dots$ に帰着する. よって,

$$\lambda = n = 1, 2, \dots$$

そうすると,

$$X(x) = a_1 e^{nx} + a_2 e^{-nx}$$

となり, $X(0) = 0$ から $a_1 + a_2 = 0$. よって, $a_2 = -a_1$. 以上から,

$$X(x) = a_1(e^{nx} - e^{-nx}), \quad Y(y) = b_1 \sin ny$$

したがって,

$$u(x, y) = a_1(e^{nx} - e^{-nx}) \times b_1 \sin ny$$

の形の解が求められた. 係数をまとめて $A = A_n$ とおく. 重ね合わせの原理から,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(e^{nx} - e^{-nx}) \sin ny$$

は、微分方程式と境界条件 $u(x, 0) = u(x, \pi) = u(0, y) = 0$ を満たす.

最後に、境界条件 $u(\pi, y) = 2 \sin 2y \cos y$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (e^{n\pi} - e^{-n\pi}) \sin ny = 2 \sin y \cos y$$

両辺に $\sin my$ をかけて $[0, \pi]$ で積分すれば、係数 A_n を決定することができる. あるいは、右辺を

$$2 \sin 2y \cos y = \sin y + \sin 3y$$

と変形して係数比較をしてもよい.

$$A_1(e^{\pi} - e^{-\pi}) = 1, \quad A_3(e^{3\pi} - e^{-3\pi}) = 1, \quad A_n(e^{n\pi} - e^{-n\pi}) = 0, \quad n \neq 1, 3.$$

こうして求める解は、

$$u(x, y) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \sin y + \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \sin 3y$$

となる.

$$u(x, y) = \frac{\sinh x}{\sinh \pi} \sin y + \frac{\sinh 3x}{\sinh 3\pi} \sin 3y$$

と書いてもよい.