

解析学 B 期末試験 (2009.2.2 実施) 解説

問題 1 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

について次の問に答えよ. (10 × 3 = 30 点)

- (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ は成り立つか.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} f_y(x, 0) = f_y(0, 0)$ は成り立つか.
- (3) $f_{yx}(0, 0)$ を求めよ.

解説 (1) 極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ が便利. $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ は $r \rightarrow 0$ と同値である. したがって,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

ここで,

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)((r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2)}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \\ &= \frac{r^4 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2} \\ &= r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| &= |r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)| \\ &\leq r^2 |\cos \theta \sin \theta| (|\cos^2 \theta| + |\sin^2 \theta|) \leq 2r^2 \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0) \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0 = f(0, 0).$$

(2) $x \neq 0$ のとき, $f(x, 0) = 0$ に注意して,

$$f_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy(x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = x.$$

また, $x = 0$ のときは, $f(0, 0) = 0$ に注意して,

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

したがって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_y(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 = f_y(0, 0)$$

が成立する.

(注意) $(x, y) \neq (0, 0)$ のときは, $f(x, y)$ の表式を直接微分して $f_y(x, y)$ を求めることができる. 特に, $x \neq 0$ のときは, $f_y(x, 0) = x$ はそのようにして求めてよい. しかし, $(x, y) \neq (0, 0)$ のときしか使えない $f_y(x, y)$ を用いて $f_y(0, 0)$ を求めることはできない.

(3) 定義によって,

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x}.$$

(2) の計算から, $f_y(x, 0) = x$, $f_y(0, 0) = 0$ なので,

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

問題 2 曲面 $z = 1 - x^2 - 2y^2$ の接平面で, ベクトル $(2, 1, -2)$ に直交するものを求めよ. (10 点)

解説 $f(x, y) = 1 - x^2 - 2y^2$ とおく.

$$f_x = -2x, \quad f_y = -4y$$

曲面上の点 $(a, b, 1 - a^2 - 2b^2)$ における接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + 1 - a^2 - 2b^2 \\ &= -2a(x - a) - 4b(y - b) + 1 - a^2 - 2b^2 \\ &= -2ax - 4by + a^2 + 2b^2 + 1 \end{aligned}$$

この平面の法線ベクトルは $(2a, 4b, 1)$ となる. これが $(2, 1, -2)$ と平行になればよい. z 成分が一致するように定数倍して比較すれば,

$$-4a = 2, \quad -8b = 1.$$

つまり,

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{8}.$$

したがって, 求める接平面の方程式は,

$$z = x + \frac{1}{2}y + \frac{41}{32}$$

問題 3 次の関数の極大値と極小値を求めよ. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $f(x, y) = x^3 - 3axy + y^3$, ただし, $a > 0$ は定数である.

$$(2) f(x, y) = (x^2 + 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

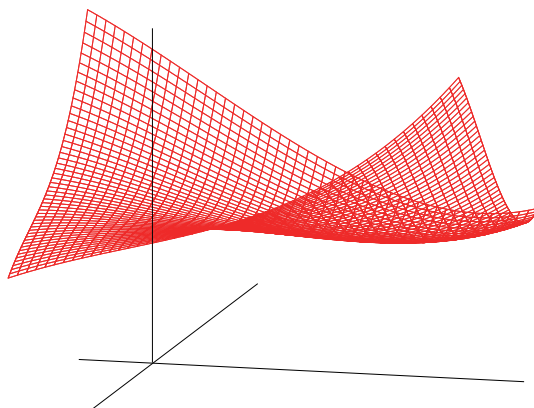
解説 (1) 計算によって,

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 3ay, & f_y &= -3ax + 3y^2, \\ f_{xx} &= 6x, & f_{xy} = f_{yx} &= -3a, & f_{yy} &= 6y, \end{aligned}$$

まず, $f_x = f_y = 0$ を解くと, $(x, y) = (0, 0), (a, a)$ が得られる. ヘッシアンは

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{bmatrix}, \quad H(a, a) = \begin{bmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{bmatrix}$$

ここで, $|H(0, 0)| = -9a^2 < 0$ であるから, $(0, 0)$ は鞍点であり, 極値を与えない. 一方, $|H(a, a)| = 27a^2 > 0$ であるから, (a, a) は極値を与える. $f_{xx}(a, a) = 6a > 0$ であるから, 極小値である. こうして, $f(x, y)$ には極大値は存在せず, 極小値 $f(a, a) = -a^3$ をとる.



(2) 計算によって,

$$f_x = (-2x^3 + 2x - 8xy^2)e^{-x^2-y^2}, \quad f_y = (-2x^2y + 8y - 8y^3)e^{-x^2-y^2}.$$

さらに,

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (4x^4 - 10x^2 + 16x^2y^2 - 8y^2 + 2)e^{-x^2-y^2}, \\ f_{xy} &= (4x^3y + 16xy^3 - 20xy)e^{-x^2-y^2}, \\ f_{yy} &= (4x^2y^2 - 2x^2 - 40y^2 + 16y^4 + 8)e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

まず, $f_x = f_y = 0$ を解く. この連立方程式は

$$\begin{cases} x(-x^2 + 1 - 4y^2) = 0 \\ y(-x^2 + 4 - 4y^2) = 0 \end{cases}$$

と同値である. これを解いて,

$$(x, y) = (0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$$

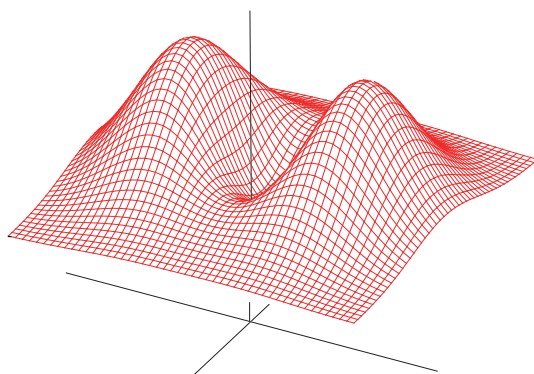
ヘッシアンは,

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$H(0, 1) = H(0, -1) = \begin{bmatrix} -6e^{-1} & 0 \\ 0 & -16e^{-1} \end{bmatrix},$$

$$H(1, 0) = H(-1, 0) = \begin{bmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 6e^{-1} \end{bmatrix}$$

以上から, $|H(0, 0)| = 16 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$ から $f(0, 0) = 0$ は極小値. $|H(0, \pm 1)| = 96e^{-1} > 0$, $f_{xx}(0, \pm 1) = -6e^{-1} < 0$ から $f(0, \pm 1) = 4e^{-1}$ は極大値. $|H(\pm 1, 0)| = -24e^{-1} < 0$ なので, $(\pm 1, 0)$ は鞍点となるから極値を与えない.



問題 4 (x, y) が $4x^2 + y^2 = 4$ を満たしながら変化するとき, $f(x, y) = xy$ の極大値と極小値を求めよ. (極値の候補を求めるだけでは不十分である.) (10 点)

解説 $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$ とおく.

$$F_x = y + 8\lambda x,$$

$$F_y = x + 2\lambda y,$$

$$F_\lambda = 4x^2 + y^2 - 4.$$

まず, $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ を解くと,

$$(x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, \frac{1}{4} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -\frac{1}{4} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{4} \right),$$

したがって、極値の候補は、

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = -1 \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = 1.$$

一方で、 $4x^2 + y^2 = 4$ は閉曲線であるから、その上で $f(x, y) = xy$ は最大値と最小値をとるはず。つまり、 (x, y) が $4x^2 + y^2 = 4$ を満たしながら変化するとき、 $f(x, y) = xy$ は極大値と極小値をとる。上で求めたものの値を見ると、極値の候補が ± 1 の2つしかないの
で、それらが極小値と極大値になるほかない。したがって、前者が極小値、後者が極大値。

(注意) ラグランジュの未定計数法の応用を期待した出題であるが、1変数の微分法に持ち込んでよい。

問題 5 次の積分を計算せよ。(10 × 3 = 30 点)

$$(1) \iint_D (4x + 3y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, x^3 \leq y \leq x\}$$

$$(2) \iint_D x(x^2 + y^2)^{3/2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$$

$$(3) \iint_D \frac{dx dy}{(x + y + a)^3}, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \text{ただし, } a > 0 \text{ は定数.}$$

解説 (1) $x \geq 0$ と $x^3 \leq y \leq x$ から $0 \leq x \leq 1$ が出ることに注意。このことは図を描けばよくわかる。そうすれば、

$$\begin{aligned} \iint_D (4x + 3y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^x (4x + 3y^2) dy \right) dx = \int_0^1 [4xy + y^3]_{y=x^3}^x dx \\ &= \int_0^1 \{(4x^2 + x^3) - (4x^4 + x^9)\} dx \\ &= \left[\frac{4}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 - \frac{4}{5} x^5 - \frac{1}{10} x^{10} \right]_0^1 = \frac{41}{60} \end{aligned}$$

(2) 極座標で計算するのが便利。 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおく。 $(x, y) \in D$ は、極座標では $1 \leq r \leq 2$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ を意味する。よって、

$$E = \left\{ (r, \theta) ; 1 \leq r \leq 2, \frac{1}{2} \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2} \pi \right\}$$

とおけば、

$$\begin{aligned} \iint_D x(x^2 + y^2)^{3/2} dx dy &= \iint_E (r \cos \theta) r^3 \cdot r dr d\theta = \int_1^2 r^5 dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= \left[\frac{r^6}{6} \right]_{r=1}^2 [\sin \theta]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{63}{6} (-2) = -21. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+a)^3} &= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(x+y+a)^3} \right) dy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{2(x+y+a)^2} \right]_{x=0}^\infty dy \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{2(y+a)^2} = \left[-\frac{1}{2(y+a)} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2(a+1)} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a(a+1)}\end{aligned}$$