解析学 B 期末試験 (2009.2.3 実施) 解説

問題 1 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y(x-y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について次の問に答えよ. ($10 \times 3 = 30$ 点)

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ は成り立つか.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_y(x,0) = f_y(0,0)$ は成り立つか.

(3) $f_{yx}(0,0)$ を求めよ.

解説 (1) 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ が便利. $(x,y) \to (0,0)$ は $r \to 0$ と同値である. したがって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

ここで,

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)(r\cos\theta - r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \\ &= \frac{r^4\cos^2\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)}{r^2} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| &= |r^2\cos^2\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)| \\ &\leq r^2|\cos^2\theta\sin\theta|(|\cos\theta| + |\sin\theta|) \leq 2r^2 \to 0 \quad (r \to 0) \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 = f(0,0).$$

(2) $x \neq 0$ のとき, $f(x,0) = 0$ に注意して,

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} = x.$$

また, $x = 0$ のときは, $f(0,0) = 0$ に注意して,

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

したがって,

$$\lim_{x\to 0} f_y(x,0) = \lim_{x\to 0} x = 0 = f_y(0,0)$$

が成立する.

(注意) $(x,y) \neq (0,0)$ のときは, $f(x,y)$ の表式を直接微分して $f_y(x,y)$ を求めることができる. 特に, $x \neq 0$ のときは, $f_y(x,0) = x$ はそのようにして求めてよい. しかし, $(x,y) \neq (0,0)$ のときしか使えない $f_y(x,y)$ を用いて $f_y(0,0)$ を求めることはできない.

(3) 定義によって,

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x}.$$

(2) の計算から, $f_y(x,0) = x$, $f_y(0,0) = 0$ なので,

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

問題 2 $f(x,y) = e^x \sin(x+y)$ を $(x,y) = (0,0)$ のまわりでテーラー展開したときの $x^3 y$ の係数を求めよ. (10 点)

解説 1 変数のテーラー展開を利用するとよい.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots,$$
$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 - \cdots,$$

これを掛け算して, $e^x \sin(x+y)$ のテーラー展開が得られる. $x^3 y$ は 4 次であるから, 掛け算の結果 4 次の項が現れる組み合わせにだけ注目すればよい. それは,

$$x\left\{-\frac{1}{3!}(x+y)^3\right\} = -\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3,$$
$$\left\{\frac{1}{3!}x^3\right\}(x+y) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3y$$

の 2 組だけである. そこから $x^3 y$ を選び出して, その係数は

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

(別解) テーラー展開を

$$e^x \sin(x+y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$$

と想定して,

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 3!1!\, a_{3,1}$$

となることを利用してもよい.

問題 3 次の関数の極大値と極小値を求めよ. $(10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $f(x, y) = \dfrac{y^2+1}{x^2+1}$

(2) $f(x, y) = (x^2+4y^2)e^{-x^2-y^2}$

解説 (1) 計算によって,

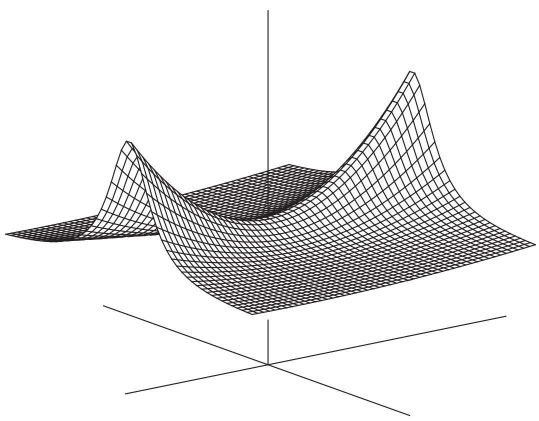
$$f_x = \frac{-2x(y^2+1)}{x^2+1}, \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+1},$$

$$f_{xx} = \frac{(6x^2-2)(y^2+1)}{x^2+1}, \qquad f_{xy} = \frac{-4xy}{x^2+1}, \qquad f_{yy} = \frac{2}{x^2+1},$$

まず, $f_x = f_y = 0$ を解くと, $(x, y) = (0, 0)$ が得られる. ヘッシアンは

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

であり, $|H(0,0)| = -4 < 0$ であるから, $(0, 0)$ は鞍点であり, 極値を与えない. したがって, $f(x, y)$ には極値は存在しない.



(2) 計算によって,

$$f_x = (-2x^3+2x-8xy^2)e^{-x^2-y^2}, \qquad f_y = (-2x^2y+8y-8y^3)e^{-x^2-y^2}.$$

さらに,

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (4x^4-10x^2+16x^2y^2-8y^2+2)e^{-x^2-y^2}, \\ f_{xy} &= (4x^3y+16xy^3-20xy)e^{-x^2-y^2}, \\ f_{yy} &= (4x^2y^2-2x^2-40y^2+16y^4+8)e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

まず, $f_x = f_y = 0$ を解く. この連立方程式は

$$\begin{cases} x(-x^2+1-4y^2) = 0 \\ y(-x^2+4-4y^2) = 0 \end{cases}$$

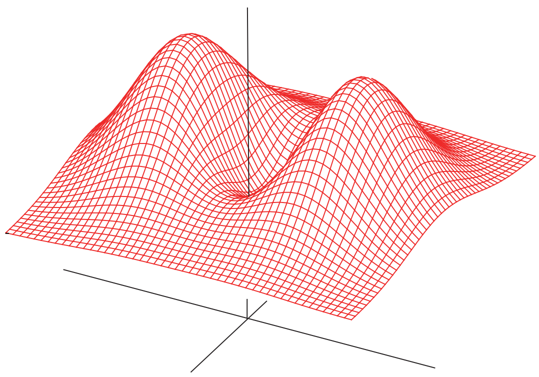
と同値である. これを解いて,

$$(x, y) = (0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$$

ヘッシアンは,

$$\begin{aligned} H(0,0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \\ H(0,1) = H(0,-1) &= \begin{bmatrix} -6e^{-1} & 0 \\ 0 & -16e^{-1} \end{bmatrix}, \\ H(1,0) = H(-1,0) &= \begin{bmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 6e^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上から, $|H(0,0)| = 16 > 0$, $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ から $f(0,0) = 0$ は極小値. $|H(0,\pm1)| = 96e^{-1} > 0$, $f_{xx}(0,\pm) = -6e^{-1} < 0$ から $f(0,\pm1) = 4e^{-1}$ は極大値. $|H(\pm1,0)| = -24e^{-1} < 0$ なので, $(\pm1, 0)$ は鞍点となるから極値を与えない.



問題 4 (x, y) が $4x^2 + y^2 = 4$ を満たしながら変化するとき, $f(x,y) = xy$ の極大値と極小値を求めよ. (極値の候補を求めるだけでは不十分である.) (10 点)

解説 $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$ とおく.

$$\begin{aligned} F_x &= y + 8\lambda x, \\ F_y &= x + 2\lambda y, \\ F_\lambda &= 4x^2 + y^2 - 4. \end{aligned}$$

まず, $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ を解くと,

$$(x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\right),$$

したがって, 極値の候補は,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = -1 \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = 1.$$

一方で, $4x^2 + y^2 = 4$ は閉曲線であるから, その上で $f(x, y) = xy$ は最大値と最小値をとるはず. つまり, (x, y) が $4x^2 + y^2 = 4$ を満たしながら変化するとき, $f(x, y) = xy$ は極大値と極小値をとる. 上で求めたものの値を見ると, 極値の候補が ± 1 の 2 つしかないので, それらが極小値と極大値になるほかない. したがって, 前者が極小値, 後者が極大値.

問題 5 次の積分を計算せよ. $(10 \times 3 = 30$ 点)

(1) $\displaystyle\iint_D x(3x + y)dxdy, \quad D = \{(x, y)\,|\,2y \le x \le 2y + 2,\ 0 \le y \le 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,dxdy, \quad D = \{(x, y)\,|\,1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x + y + a)^3}, \quad D = \{(x, y)\,|\,x \ge 0,\ 0 \le y \le 1\},$ ただし, $a > 0$ は定数.

解説 (1)

$$\begin{aligned}\iint_D x(3x + y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{2y}^{2y+2} (3x^2 + xy)dx\right) dy = \int_0^1 \left[x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 y\right]_{x=2y}^{2y+2} dy \\ &= \int_0^1 (24y^2 + 24y + 8 + (4y + 2)y)dy \\ &= \int_0^1 (28y^2 + 26y + 8)dy = \frac{28}{3} + 13 + 8 = \frac{91}{3}\,.\end{aligned}$$

(2) 極座標で計算するのが便利. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおく. $(x, y) \in D$ は, 極座標では $1 \le r \le 2$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$ を意味する. よって,

$$E = \left\{(r, \theta)\,;\, 1 \le r \le 2,\ \frac{1}{2}\pi \le \theta \le \pi\right\}$$

とおけば,

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,dxdy &= \iint_E \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}\,rdrd\theta \\ &= \int_1^2 rdr \int_{\pi/2}^{\pi} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2\theta\,d\theta = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\left[-\frac{1}{2}\,\cos 2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+a)^3} &= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(x+y+a)^3} \right) dy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{2(x+y+a)^2} \right]_{x=0}^{\infty} dy \\
&= \int_0^1 \frac{dy}{2(y+a)^2} = \left[-\frac{1}{2(y+a)} \right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2(a+1)} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a(a+1)}
\end{aligned}
$$