

応用数学 B 期末試験解説 (2010.1.28 実施)

問題 1 $[0, +\infty)$ 上で定義された関数 $f(t)$ のラプラス積分は

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

で定義される. ($5 \times 4 = 20$ 点)

- (1) $f(t) = c$ (定数関数) のラプラス積分を計算し, ラプラス積分の増加指数と合わせて答えよ.
- (2) $f(t) = e^{kt} + e^{-kt}$ ($k > 0$ は定数) のラプラス積分を計算し, ラプラス積分の増加指数と合わせて答えよ.
- (3) $f'(t)$ のラプラス積分と $F(p)$ の関係式を導け.
- (4) $F(p) = \frac{p}{p^2 + 5p + 6}$ の原関数 $f(t)$ を求めよ.

解説 (1) 定義にあてはめて計算するだけ.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} ce^{-pt} dt = \left[-\frac{c}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty}$$

この積分が収束するのは, $\operatorname{Re}(p) > 0$ のときである. よって, 増加指数は $s_0 = 0$ であり,

$$F(p) = \frac{c}{p}$$

が得られる.

- (2) まず, e^{kt} のラプラス積分を計算しよう.

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-k)t} dt = \left[-\frac{1}{p-k} e^{-(p-k)t} \right]_0^{+\infty}$$

この積分が収束するのは, $\operatorname{Re}(p-k) > 0$ のとき, つまり $\operatorname{Re} p > k$ のときである. よって, 増加指数は $s_0 = k$ であり,

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{p-k}$$

が得られる. 同様に,

$$\mathcal{L}[e^{-kt}] = \frac{1}{p+k}$$

であり, 増加指数は $s_0 = -k$. したがって, e^{kt} と e^{-kt} のラプラス積分が同時に収束するのは, $k > 0$ を考慮すれば $p > k$ の領域である. 求めるラプラス変換は

$$\mathcal{L}[e^{kt} + e^{-kt}] = \frac{1}{p-k} + \frac{1}{p+k}$$

であり, 増加指数は $s_0 = k$.

- (3) 定義によって,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = [f(t)e^{-pt}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-pe^{-pt}) dt = -f(0) + pF(p)$$

正確には, $f(0)$ ではなく $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ (右極限) であるが, $f(0)$ でも可とした.

- (4) まず,

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 5p + 6} = \frac{3}{p+3} - \frac{2}{p+2}$$

(2) の計算から

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{p-k}$$

がわかっているから

$$f(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}$$

もちろん, 逆公式を用いてもよい.

問題 2 微分方程式

$$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^t, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 2 \quad (\text{E})$$

について次の問いに答えよ. $f(p)$ のラプラス変換を $F(p)$ とする. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) (E) の両辺をラプラス変換して, $F(p)$ に関する方程式を導出せよ (初期条件に注意のこと).

(2) $F(p)$ を逆変換して $f(t)$ を求めよ.

解説 (1) 導関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f'] = p\mathcal{L}[f] - f(0)$$

の公式を用いる (この式は問題 1 でも求めている). $F = \mathcal{L}[f]$ を用いて,

$$\mathcal{L}[f'] = pF - f(0) = pF.$$

さらに,

$$\mathcal{L}[f''] = p\mathcal{L}[f'] - f'(0) = p^2F - 2$$

一方,

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{p-1}$$

であるから, 与えられた方程式は,

$$(p^2F - 2) - 3pF + 2F = \frac{1}{p-1}$$

となる.

(2) (1) で求めた F に関する代数方程式を解くと,

$$F = \frac{2p-1}{(p-1)^2(p-2)}$$

これに逆変換を適用する. 分子の次数が分母の次数より小さい有理関数なので

$$f(t) = \operatorname{Res}_{p=1} \frac{2p-1}{(p-1)^2(p-2)} e^{pt} + \operatorname{Res}_{p=2} \frac{2p-1}{(p-1)^2(p-2)} e^{pt}$$

となる.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=1} \frac{2p-1}{(p-1)^2(p-2)} e^{pt} &= \left. \frac{d}{dp} \frac{2p-1}{p-2} e^{pt} \right|_{p=1} = -te^t - 3e^t, \\ \operatorname{Res}_{p=2} \frac{2p-1}{(p-1)^2(p-2)} e^{pt} &= \left. \frac{2p-1}{(p-1)^2} e^{pt} \right|_{p=2} = 3e^{2t} \end{aligned}$$

から

$$f(t) = -te^t - 3e^t + 3e^{2t}$$

問題 3 ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

によって定義される. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) 関数等式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を導出し, $\Gamma(z)$ を複素平面全体に拡張する方法について説明せよ.

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ は既知として $\Gamma(5)$ と $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ を求めよ.

解説 (1) 部分積分によって,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = [t^z(-e^{-t})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} z t^{z-1}(-e^{-t}) dt \\ &= z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)\end{aligned}$$

したがって,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

が得られた. この式は, $\operatorname{Re} z > 0$ の範囲で成り立つのだが, 右辺をみると $\operatorname{Re} z > -1$ で意味をもつ. したがって, $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$ において, $\Gamma(z)$ の値を右辺で定義することによって, $\Gamma(z)$ の定義域が $\operatorname{Re} z > -1, z \neq 0$, に広がる. この操作を繰り返せば, $\Gamma(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ に拡張される.

(2) さて, 上の関数等式を繰り返し用いれば,

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4 \cdot 3\Gamma(3) = \dots = 4!\Gamma(1) = 4! = 24$$

ここで, $\Gamma(1) = 1$ は積分によってわかる. 次に,

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+2\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

問題 4 $\nu = 0, 1, 2, \dots$ とする. ルジャンドルの微分方程式

$$(1-z^2)f''(z) - 2zf'(z) + \nu(\nu+1)f(z) = 0 \quad (\text{L})$$

について問いに答えよ. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) べき級数法を適用して, (L) に多項式解が存在することを示せ.

(2) (1) の多項式において, 最高次の係数を $\frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu! \nu!}$ としたものを $P_\nu(z)$ とかく. $P_4(z)$ を求めよ.

解説

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

とおいて係数を定めることを考えればよい.

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n z^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2},$$

これらを与えられた微分方程式に代入して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n n z^n + \nu(\nu+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0$$

z^n の係数を比較することによって,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = (n-\nu)(n+\nu+1)c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

が得られる.

(Case 1) ν が偶数のとき. $c_0 \neq 0$ が与えられれば, 漸化式を繰り返し用いて $c_2, c_4, \dots$ が定まる. ところが, c_ν まで定まると, $c_{\nu+2} = 0$ となる. つまり,

$$c_2 \neq 0, \quad c_4 \neq 0, \quad \dots, \quad c_\nu \neq 0, \quad c_{\nu+2} = \dots = 0$$

となるから、 ν 次の多項式

$$f(z) = c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \cdots + c_\nu z^\nu$$

が解となる.

(Case 2) ν が奇数のとき、同様に、

$$f(z) = c_1 z + c_3 z^3 + \cdots + c_\nu z^\nu$$

の形の ν 次多項式解が存在する.

(2) $\nu = 4$ のとき、

$$c_{n+2} = \frac{(n-4)(n+5)}{(n+2)(n+1)} c_n$$

が成り立つ. したがって、

$$c_2 = -10c_0, \quad c_4 = \frac{35}{3} c_0$$

となり、

$$P_4(z) = c_0 \left(\frac{35}{3} z^4 - 10z^2 + 1 \right)$$

が得られる. 最高次の係数が $\frac{35}{8}$ となるように c_0 を決めれば、

$$P_4(z) = \frac{35}{8} z^4 - \frac{15}{4} z^2 + \frac{3}{8}$$

が得られる.

問題 5 2 次元のラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

を境界条件

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \sin 3y$$

のもとで解け. (20 点)

解説 まず, $u(x, y) = X(x)Y(y)$ の形の解を求めよう.

$$X''Y + XY'' = 0$$

となるから、

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

したがって、 λ を定数として、

$$\frac{X''}{X} = \lambda^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

とおける. これらは容易に解けて、

$$X(x) = a_1 e^{\lambda x} + a_2 e^{-\lambda x}$$

$$Y(y) = b_1 \sin \lambda y + b_2 \cos \lambda y$$

次に、境界条件 $u(x, 0) = u(x, \pi) = u(0, y) = 0$ から、

$$X(x)Y(0) = X(x)Y(\pi) = X(0)Y(y) = 0$$

したがって、

$$Y(0) = Y(\pi) = X(0) = 0.$$

まず、 $Y(0) = b_2$ から

$$b_2 = 0.$$

このとき, $Y(\pi) = b_1 \sin \lambda \pi$ であるが, $Y(\pi) = 0$ となるのは $b_1 = 0$ または $\sin \lambda \pi = 0$. $b_1 = 0$ とすると, $Y = 0$ となって求めるべき解にならない. よって, $\sin \lambda \pi = 0$. したがって, λ は整数. $\lambda = 0$ ならやはり, $Y = 0$ となるので除外. $\lambda = -1, -2, \dots$ のときは, 定数の符号を変えることで, $\lambda = 1, 2, \dots$ に帰着する. よって,

$$\lambda = n = 1, 2, \dots$$

そうすると,

$$X(x) = a_1 e^{nx} + a_2 e^{-nx}$$

となり, $X(0) = 0$ から $a_1 + a_2 = 0$. よって, $a_2 = -a_1$. 以上から,

$$X(x) = a_1(e^{nx} - e^{-nx}), \quad Y(y) = b_1 \sin ny$$

したがって,

$$u(x, y) = a_1(e^{nx} - e^{-nx}) \times b_1 \sin ny$$

の形の解が求められた. 係数をまとめて $A = A_n$ とおく. 重ね合わせの原理から,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(e^{nx} - e^{-nx}) \sin ny$$

は, 微分方程式と境界条件 $u(x, 0) = u(x, \pi) = u(0, y) = 0$ を満たす.

最後に, 境界条件 $u(\pi, y) = \sin 3y$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(e^{n\pi} - e^{-n\pi}) \sin ny = \sin 3y$$

両辺を見比べて (あるいは, 両辺に $\sin my$ をかけて $[0, \pi]$ で積分して), 係数 A_n を決定することができる.

$$A_3(e^{3\pi} - e^{-3\pi}) = 1, \quad A_n(e^{n\pi} - e^{-n\pi}) = 0, \quad n \neq 3.$$

こうして求める解は,

$$u(x, y) = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \sin 3y = \frac{\sinh 3x}{\sinh 3\pi} \sin 3y$$

となる.