

平成 21(2009) 年度 解析学 C 期末試験問題

実施: 2009. 7.15 (水) 08:50–10:20

- 第 1 問は必答, 第 2 問から第 4 問のうちから 2 問だけを選択解答せよ.
- 解答は整然と文章によって記せ. 式だけ・答だけは採点対象外とする.
- 読めない解答は採点から除外する.

1. [必答] 次の問に答えよ. [12 点 $\times$ 5 = 60 点]

(1) $xy' + y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $y' + 4y = e^{-2x}$ の一般解を求めよ.

(3) $y'' - y' - 6y = 0$ の基本解と一般解を求めよ.

(4) $\{e^{-x} \cos 2x, e^{-x} \sin 2x\}$ を基本解とする微分方程式を求めよ.

(5) $(x^3 + xy^2)dx + (ax^2y + bxy^2)dy = 0$ が完全形になるように定数 a, b を定めて, その方程式の一般解を求めよ.

2. [選択] 次の微分方程式の一般解を求めよ. [20 点]

$$y'' + 4y = \sin x + 8x^2$$

3. [選択] 微分方程式の解法である「べき級数法」を説明しながら, 次の微分方程式の一般解を求めよ (解はできるだけ整理した形で記せ). [20 点]

$$(1 - x^2)y' = 2xy$$

4. [選択] 水槽に 200ℓ の水があり, その中に 2 kg の塩が溶けている. この水槽には毎分 5ℓ の塩水 (1ℓ あたり塩 20 g が含まれている) が流入し, よく攪拌されながら 毎分 5ℓ ずつ流出している. 各時刻における水槽中の塩の量 $y(t)$ を求め, その変化の様子をグラフで図示せよ. [20 点]

平成 21(2009) 年度 解析学 C 期末試験解説

1. (1) 変数分離形である.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

と変形して、積分すれば、

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + c$$

つまり、

$$\log |y| = -\log |x| + c.$$

したがって、

$$y = \frac{C}{x}.$$

(2) 定数変化法によって解こう. まず, $y' + 4y = 0$ の一般解を求めると, $y = Ce^{-4x}$ が得られる. そこで, 求める解を $y = u(x)e^{-4x}$ と想定して, 方程式に代入すると,

$$u'e^{-4x} + u(-4e^{-4x}) + 4ue^{-4x} = e^{-2x}$$

となる. これを整理して、

$$u' = e^{4x}e^{-2x} = e^{2x}$$

よって、

$$u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

(積分定数を忘れずに!) こうして、求める解は、

$$y = u(x)e^{-4x} = \frac{1}{2}e^{-2x} + Ce^{-4x}$$

(3) 特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

となる. よって, $\lambda = -2, 3$. 求める基本解は $\{e^{-2x}, e^{3x}\}$, 一般解は $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$.

(4) 求めるものは 2 階の定係数微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ である. その特性方程式の根が, $-1 \pm 2i$ で与えられるから、

$$a = -\{(-1 + 2i) + (-1 - 2i)\} = 2, \quad b = (-1 + 2i)(-1 - 2i) = 5.$$

よって、求めるものは、

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

(5) 完全形であるための必要十分条件を思い出せば簡単である.

$$P = x^3 + xy^2, \quad Q = ax^2y + bxy^2$$

とおく. $Pdx + Qdy = 0$ が完全形となるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

である. 計算して,

$$2xy = 2axy + by^2$$

よって,

$$a = 1, \quad b = 0$$

となる. 解くべき完全微分方程式は,

$$(x^3 + xy^2)dx + x^2ydy = 0$$

ちょっとみれば,

$$u = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2$$

に対して,

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

したがって, 微分方程式は

$$du = 0$$

一般解は $u = C$. したがって, 求めるべき解は,

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$$

となる.

2. まず, 同次系 $y'' + 4y = 0$ を解き, 基本解 $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を求める. 次に $y'' + 4y = \sin x + 8x^2$ の特殊解を 1 つ求めて $y_3(x)$ とすれば, 求めるべき, 一般解は $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$ となる.

同次系 $y'' + 4y = 0$ については, 特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ から $\lambda = \pm 2i$. よって, 基本解 $\{\sin 2x, \cos 2x\}$ が得られる.

次に $y'' + 4y = \sin x + 8x^2$ の特殊解であるが, $y'' + 4y = \sin x$ と $y'' + 4y = 8x^2$ に分けて別々に計算してもよい.

$y'' + 4y = \sin x$ の特殊解は $y = A \sin x + B \cos x$ と想定するとよい. 方程式に代入すると

$$-A \sin x - B \cos x + 4(A \sin x + B \cos x) = \sin x$$

整理して,

$$3A \sin x + 3B \cos x = \sin x$$

となるから, $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$. よって, $\frac{1}{3} \sin x$ が特殊解.

$y'' + 4y = 8x^2$ の特殊解は $y = Ax^2 + Bx + C$ と想定するとよい. 方程式に代入すると

$$2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2$$

整理して,

$$4Ax^2 + 4Bx + (2A + 4C) = 8x^2$$

となるから, $A = 2$, $B = 0$, $C = -1$. よって, $2x^2 - 1$ が特殊解.

以上から、求めるべき一般解は

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{3} \sin x + 2x^2 - 1.$$

3. $y = \sum c_n x^n$ とおく.

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n, \\ -x^2 y' &= \sum_{n=0}^{\infty} -c_{n+1} (n+1) x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} -c_{n-1} (n-1) x^n \\ 2xy &= \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1} x^n. \end{aligned} \quad (1)$$

としておくと計算が容易.

$$(1-x^2)y' = c_1 + 2c_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n-1}(n-1)) x^n. \quad (2)$$

(1) と (2) を比較して,

$$0 = c_1, \quad 2c_0 = 2c_2, \quad 2c_{n-1} = c_{n+1}(n+1) - c_{n-1}(n-1), \quad n \geq 2.$$

最後の式は $c_{n-1} = c_{n+1}$ となる. 結局,

$$c_1 = 0, \quad c_{n-1} = c_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

よって, n が奇数なら $c_n = 0$. n が偶数なら, $c_n = c_0$. よって, 求める解は,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 x^{2n} = \frac{c_0}{1-x^2}.$$

係数 c_n の関係式に x が含まれるようなものを議論することは, ベキ級数法を理解していないことを意味する.

4. 毎分流入する塩の量は $20 \times 5 = 100$ (g) = 0.1 (kg) で一定. また, 時刻 t において毎分流出する塩の量は $\frac{5}{200} y(t)$. したがって, $y(t)$ の変化は

$$\frac{dy}{dt} = 0.1 - \frac{1}{40} y, \quad y(0) = 2$$

に従う. 微分方程式は,

$$\frac{d(y-4)}{dt} = -\frac{1}{40} (y-4),$$

と書いてもよい. 一般解は

$$y-4 = Ce^{-\frac{t}{40}}.$$

初期条件 $y(0) = 2$ から $C = -2$. よって, 求める y は

$$y(t) = 4 - 2e^{-\frac{t}{40}}.$$

