

応用数学 B 試験問題 (2011.1.27)

注意 問題用紙は持ち帰り, 解答用紙のみを提出せよ. 答だけのものは零点. 計算途中も記せ (部分点あり).

問題 1 $[0, +\infty)$ 上で定義された関数 $f(t)$ のラプラス積分は

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

で定義される. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $f(t) = \begin{cases} 2, & t \geq 2, \\ 0, & 0 \leq t < 2 \end{cases}$ のラプラス積分を計算し, 増加指数と合わせて答えよ.

(2) $a > 0$ を定数とすると, $f(t) = \cos at$ のラプラス積分を計算し, 増加指数と合わせて答えよ.

問題 2 $f(t)$ のラプラス変換を $F(p)$ とするとき, $f(t)$ を $F(p)$ の原関数という. $F(p)$ が多項式 $G(p), H(p)$ (ただし, $\deg G(p) < \deg H(p)$) によって $F(p) = \frac{G(p)}{H(p)}$ と表されているとき,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}$$

が成り立つ. ただし, $p_1, \dots, p_n$ は $F(p)$ の極である. 次の問に答えよ. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) 極とはなにか, $g(z) = \frac{1}{e^z(z-1)^2}$ を $z=1$ のまわりで展開して説明せよ.

(2) $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^2}$ の原関数を求めよ.

問題 3 次の問に答えよ. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $f'(t)$ のラプラス変換を $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ を用いて表せ.

(2) ラプラス変換を用いて次の方程式を解け.

$$f'(t) - f(t) = 2te^t, \quad f(0) = 1$$

裏面にも問題があります

問題 4 ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

を全複素平面に解析接続したものである. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を既知として, $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ を計算せよ. (10 点)

問題 5 $\nu = 0, 1, 2, \dots$ とする. ルジャンドルの微分方程式

$$(1 - z^2)f''(z) - 2zf'(z) + \nu(\nu + 1)f(z) = 0$$

の解で $f(0) = 0$ を満たす多項式解が存在するようなパラメータ ν を定めよ. 次に, そのような ν のうち小さいほうからの 2 つについて, 対応する多項式解を具体的に書き下せ. (15 点)

問題 6 2 次元のラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

を境界条件

$$u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 3 \sin 3x$$

のもとで解け. (15 点)

応用数学 B 期末試験解説 (2011.1.27 実施)

問題 1 (1) 定義にあてはめて計算するだけ.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_2^{+\infty} 2e^{-pt} dt = 2 \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_2^{+\infty} = \frac{2}{p} e^{-2p}$$

この積分が収束するのは, $\operatorname{Re}(p) > 0$ のとき. よって, 増加指数は $s_0 = 0$ である.

(2) 教科書を参照 (p. 143)

$$\frac{p}{p^2 + a^2} \quad \text{増加指数は } s_0 = 0$$

問題 2 (1) $g(z)$ を $z = 1$ の周りで展開してみよう.

$$g(z) = \frac{1}{e^z(z-1)^2} = e^{-1} e^{-(z-1)} (z-1)^{-2}$$

と変形すると判りやすいだろう. 指数関数のテイラー展開 (これは常識) によって,

$$e^{-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{-(z-1)\}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z-1)^n.$$

したがって,

$$\begin{aligned} g(z) &= e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z-1)^n (z-1)^{-2} \\ &= e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z-1)^{n-2} \\ &= e^{-1} \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} (z-1)^n \end{aligned}$$

が得られる. このように, $(z-1)$ のべきで展開されたが, 有限個の負べきを含むとき, その中心 $z = 1$ を極という. 今の場合は, $z = 1$ は 2 位の極となる. 一般的な定義については, 教科書を参照のこと.

(2) 公式によって,

$$f(t) = \operatorname{Res}_{p=-1} \frac{1}{(p+1)(p-1)^2} e^{pt} + \operatorname{Res}_{p=1} \frac{1}{(p+1)(p-1)^2} e^{pt}$$

を計算すればよい. 留数は次のように求められる.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=-1} \frac{1}{(p+1)(p-1)^2} e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{1}{(p-1)^2} e^{pt} = \frac{1}{4} e^{-t}, \\ \operatorname{Res}_{p=1} \frac{1}{(p+1)(p-1)^2} e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p+1} e^{pt} \right) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{te^{pt}(p+1) - e^{pt}}{(p+1)^2} = \frac{1}{4} (2te^t - e^t) \end{aligned}$$

したがって,

$$f(t) = \frac{1}{4} (e^{-t} + 2te^t - e^t)$$

問題 3 (1) 教科書参照

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0)$$

(2) 両辺のラプラス変換を計算する. $F = \mathcal{L}[f]$ とおくことにする. 左辺は,

$$\mathcal{L}[f' - f] = pF - f(0) - F = (p-1)F - 1.$$

右辺は,

$$\mathcal{L}[2te^t] = \int_0^{\infty} 2te^t e^{-pt} dt = \frac{2}{(p-1)^2}$$

したがって、与えられた微分方程式は、

$$(p-1)F - 1 = \frac{2}{(p-1)^2}$$

と同値。これは簡単に解けて、

$$F = \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{1}{p-1}$$

ここで、逆変換を用いると、

$$f(t) = \operatorname{Res}_{p=1} \left\{ \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{1}{p-1} \right\} e^{pt}$$

が成り立つことが分かる。後は、右辺の留数を計算すればよい。

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=1} \frac{2}{(p-1)^3} e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} 2e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d^2}{dp^2} e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 1} t^2 e^{pt} = t^2 e^t, \\ \operatorname{Res}_{p=1} \frac{1}{p-1} e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow 1} e^{pt} = e^t. \end{aligned}$$

したがって、

$$f(t) = t^2 e^t + e^t$$

問題 4 部分積分によって、

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = [t^{z-1}(-e^{-t})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (z-1)t^{z-2}(-e^{-t})dt \\ &= (z-1) \int_0^{+\infty} t^{z-2} e^{-t} dt = (z-1)\Gamma(z-1) \end{aligned}$$

この式は、 $\operatorname{Re}(z-1) > 0$ のとき、つまり、 $\operatorname{Re} z > 1$ のときに成り立つ式である。変数 z を $z+1$ に置き換えて、

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

が得られたことになる。右辺が $\operatorname{Re} z > -1$, $z \neq 0$ で意味をもつことを利用して、 $\Gamma(z)$ がその領域に拡張される。これを繰り返せば、 $\Gamma(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ に拡張される。さて、上の関数等式を繰り返し用いれば、

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+2\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+3\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{8}{15} \sqrt{\pi}.$$

問題 5 この問題では、 $f(z) = 0$ (零多項式) は常に解になる。問題文から、常識的には、「0 でない多項式解を求めよ」と解せるとするが、厳密には「0 でない多項式解を求めよ」と述べておくべきであった。

$f(0) = 0$ を満たすことから、

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

とおいて係数を定めることを考えればよい。

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2},$$

これらを与えられた微分方程式に代入して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n z^n + \nu(\nu+1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = 0$$

第 1 項を書き直して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n z^n + \nu(\nu+1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = 0$$

したがって,

$$2c_2 = 0, \quad (n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + \nu(\nu+1)c_n = 0, \quad n \geq 1.$$

漸化式をさらに整理すれば,

$$c_{n+2} = \frac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{(n+2)(n+1)} c_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$c_2 = 0$ と (1) によって, すべての $c_{2m} = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) がわかる. $c_1 = 0$ とすると, 同様に漸化式からすべての $c_{2m+1} = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) となり, $f(z)$ は零多項式となってしまう. したがって, $c_1 \neq 0$ である. 以下, $c = c_1$ とおく.

(Case 1) ν が偶数のとき. $c = c_1$ から漸化式 (1) を繰り返し用いると, $c_3, c_5, \dots$ が定まるが, それらはすべて 0 と異なる. すると $f(z)$ は無限級数になり, 多項式解にならない.

(Case 2) ν が奇数のとき. $c = c_1$ から漸化式を繰り返し用いると,

$$c_3 \neq 0, \quad c_5 \neq 0, \dots, c_\nu \neq 0, \quad c_{\nu+2} = 0$$

となる. したがって, $f(z)$ は ν 次多項式となる. まず, $\nu = 1$ なら,

$$c_1 = c, \quad c_3 = \dots = 0$$

となるから, 求める多項式解は

$$f(z) = cz.$$

次に, $\nu = 3$ なら

$$c_3 = \frac{(1-3)(1+3+1)}{(1+2)(1+1)} c_1 = -\frac{3}{5} c, \quad c_5 = \dots = 0,$$

となる. したがって, 求める多項式解は

$$f(z) = c \left(z - \frac{5}{3} z^3 \right).$$

問題 6 まず, $u(x, y) = X(x)Y(y)$ の形の解を求めよう. このとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \iff X''Y + XY'' = 0.$$

さらに,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

と変形することで, λ を定数として,

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{Y''}{Y} = \lambda^2$$

となることがわかる. これらは容易に解けて,

$$X(x) = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x,$$

$$Y(y) = ce^{\lambda y} + de^{-\lambda y},$$

とおける. ただし, a, b, c, d は任意定数である. (λ は複素数なので, X, Y をともに指数関数で表してもよいし, とともに三角関数で表してもよいし, また, 指数関数と三角関数を逆に用いてもよい. オイラーの公式などによって, 結果的に同じことになる.)

次に, 境界条件 $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = 0$ から,

$$X(0)Y(y) = X(\pi)Y(y) = X(x)Y(0) = 0$$

したがって,

$$X(0) = X(\pi) = Y(0) = 0.$$

まず, $X(x) = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x$ が $X(0) = X(\pi) = 0$ を満たすために,

$$b = 0, \quad a \sin \lambda \pi + b \cos \lambda \pi = 0.$$

がわかる. $a = 0$ とすると, $X(x) = 0$ となり $u(x, y) = 0$ となってしまう. これは, 残っている境界条件を満たさないの
で解にならない. よって, $a \neq 0$ である. そうすれば, $\lambda = n$ は整数でなければならない. $\sin x$ が奇関数であることと,
 $\lambda = 0$ では求めるべき解にならないことから, $n = 1, 2, \dots$ に限られる. こうして, $X(x)$ の形は,

$$X(x) = a \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad a: \text{任意定数}$$

となる. このとき, $Y(x)$ の形は,

$$Y(x) = ce^{ny} + de^{-ny}$$

であり, これが $Y(0) = 0$ を満たさなければならないので, $c + d = 0$. したがって,

$$Y(x) = c(e^{ny} - e^{-ny})$$

以上から,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = 0$$

を満たす解で $u(x, y) = X(x)Y(y)$ を満たすものは,

$$u(x, y) = A_n \sin nx(e^{ny} - e^{-ny}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad A_n: \text{任意定数}$$

の形であることが分かった. さらに, 零の境界条件も合わせて, 重ね合わせ原理が成り立つから, 一般解は,

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin nx(e^{ny} - e^{-ny})$$

で与えられる. 残るもう 1 つの境界条件 $u(x, \pi) = 3 \sin 3x$ を合わせよう. 上式から

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin nx(e^{n\pi} - e^{-n\pi}) = 3 \sin 3x.$$

フーリエ級数の一意性から,

$$A_3(e^{3\pi} - e^{-3\pi}) = 3, \quad A_n = 0, \quad n \neq 3.$$

したがって, 求める解は,

$$u(x, y) = 3 \sin 3x \frac{e^{3y} - e^{-3y}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}}$$

双曲線関数を用いて,

$$u(x, y) = \frac{3}{\sinh 3\pi} \sin 3x \sinh 3y$$

と書いてもよい.

