平成22(2010)年度 数学概論B 期末試験問題

実施: 2010. 7.26 (月) 10:30–12:00

- 解答には計算経過とその説明を整然と記せ.
- 式だけ・答だけは0点.
- 読めない解答 (文字が薄い、小さい、汚いなど) は採点から除外して0点とする.

1. 行列 A, B, C を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

で定めるとき, 次の行列を計算せよ. [10点 $\times$ 2 = 20点]

(1) $AB - BA$ (2) $2AC - BC$

2. 2次元ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

を考える. [10点 $\times$ 3 = 30点]

(1) 3つのベクトルを座標平面に図示せよ.

(2) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は線形独立 (=1次独立) であることを示せ.

(3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は線形従属 (=1次従属) であることを示せ.

3. 次の行列を階段行列に変形して階数を求めよ. [5点 $\times$ 2 = 10点]

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

4. 次の行列の逆行列を求めよ．[5 点]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. 次の行列式を計算せよ．なお, (3) の答は因数分解せよ．[5 点 $\times 3 = 15$ 点]

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

6. 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

を考える．[5 点 $\times 2 = 10$ 点]

(1) 連立方程式を行列を用いて表せ.

(2) 連立方程式を行列の基本変形（掃き出し法）を用いて解け.

7. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ．[5 点 $\times 2 = 10$ 点]

(1) $\lambda E - A$ が逆行列をもたないように定数 λ を定めよ.

(2) (1) で定めた λ に対して, $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{u}$ をすべて求めよ.

平成 22(2010) 年度 数学概論B 期末試験問題 (解答)

実施: 2010. 7.26 (月) 10:30–12:00

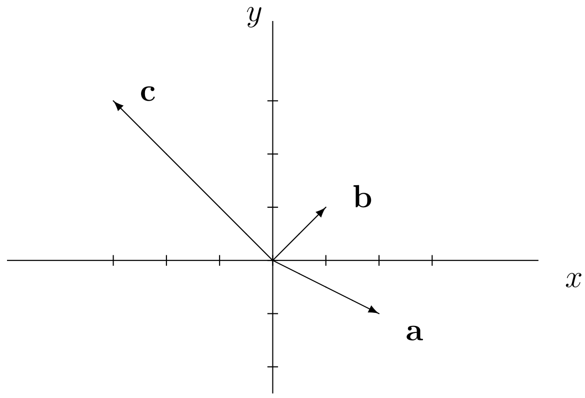
1. (1)

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 30 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$2AC - BC = (2A - B)C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 15 & -5 \\ 5 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

2. (1) 座標軸や目盛を記すこと.



(2) $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$ を満たす k_1, k_2 を求めると, $k_1 = k_2 = 0$ しかないことを示す. $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$ を k_1, k_2 を未知数とする方程式とみなして行列で表記すれば,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これを行列の基本変形などを用いて解けば, $k_1 = k_2 = 0$ が従う. あるいは, 係数行列の逆行列が存在することを用いて, それを左からかけてもよい.

(3) $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + k_3\mathbf{c} = \mathbf{0}$ を満たす k_1, k_2, k_3 として, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 以外のものが取れることを示す. (1) と同様にして,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解けばよい. 基本変形などを用いると, 自由度 1 がわかり, 解は $k_1 = -2k$, $k_2 = k$, $k_3 = k$ (k は任意定数) となる. $k \neq 0$ ならこれらは 0 ではない.

3. 基本変形によって, 階段行列をつくればよい. 簡単な操作だが, 計算ミスが目立った.
(1) 階数 3　　(2) 階数 3

4. 余因子を用いる公式では, 行列式で割るのを忘れたり, 余因子を行と列を入れ替えて配列するのを忘れたり, といったミスが目立った. 行列の基本変形で求める方が簡単であったろう.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. (1) -1 (2) -20

(3) 第 2〜4 行を第 1 行に加える変形をすれば, 少し計算が楽になる.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} x-2 & x-2 & x-2 & x-2 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ 0 & 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= \cdots \\
&= x^2(x+2)(x-2).
\end{aligned}
$$

6. (1)

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

(2) 途中経過省略. 怖いのは計算ミスだけ. $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$

7. (1) $|\lambda E - A| = 0$ となればよい. 行列式を計算すると λ の 2 次式になる. $\lambda = 2, 5$

(2) $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (k は任意定数)

$\lambda = 5$ のとき, $\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は任意定数)