

平成 22(2010) 年度 数学概論 B 期末試験問題

実施: 2010. 7.27 (火) 14:40–16:10

- 解答には計算経過とその説明を整然と記せ.
- 式だけ・答だけは 0 点.
- 読めない解答 (文字が薄い、小さい、汚いなど) は採点から除外して 0 点とする.

1. 行列 A, B, C を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

で定めるとき, 次の行列を計算せよ. [10 点 $\times$ 2 = 20 点]

(1) $AB - BA$ (2) $AC - B^{-1}C$

2. 次の行列 A の逆行列を求めよ. [10 点]

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. 行列

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ. [10 点 $\times$ 2 = 20 点]

- (1) A の階数を求めよ.
- (2) A の $(3, 4)$ -余因子を求めよ.

4. 次の行列式を計算せよ. (3) の答は因数分解の形で求めよ. [5 点 $\times$ 3 = 15 点]

$$(1) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

5. c を定数として, 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 3 \\ 3y - 5z = c \end{cases}$$

を考える. [5 点 $\times$ 4 = 20 点]

- (1) 連立方程式を行列を用いて表せ.
- (2) その係数行列の階数を求めよ.
- (3) 連立方程式が解をもつように c を定めよ.
- (4) (3) の c に対して, 連立方程式の解を求めよ.

6. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ. [5 点 + 10 点 = 15 点]

- (1) $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ を満たす $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ が存在するような定数 λ をすべて求めよ.
- (2) (1) で定めた λ に対して, $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ をすべて求めよ.

平成 22(2010) 年度 数学概論 B 期末試験問題 (解答)

実施: 2010. 7.27 (火) 14:40–16:10

1. (1)

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$AC - B^{-1}C = (A - B^{-1})C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 行の基本変形を繰り返して,

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

したがって,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 1/6 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

3. (1) A の階数 3

(2)

$$(3, 4)\text{-余因子} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

4. (1) -7 (2) -14

(3) 第 2~4 行を第 1 行に加える変形をすれば, 少し計算が楽になる.

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & x-2 & x-2 & x-2 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ 0 & 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

$= \dots$

$$= x^2(x+2)(x-2).$$

5. (1)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ c \end{bmatrix}$$

(2) 拡大係数行列に行の基本変形を施せば,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & c-6 \end{bmatrix}$$

となる (別の形もあり得るが階数は変わらない). 係数行列の部分を見て, 階数 = 2

(3) 係数行列と拡大係数行列の階数が一致しなければならないから $c = 6$

(4) $x = -\frac{2}{3}k + 1, y = \frac{5}{3}k + 2, z = k$ (k は任意定数)

6. (1) $|\lambda E - A| = 0$ となればよい. 行列式を計算すると λ の 2 次式になる. $\lambda = 2, 5$

(2) $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($k \neq 0$ は任意定数)

$\lambda = 5$ のとき, $\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($k \neq 0$ は任意定数)