平成 23 年度 応用数学 B 試験問題 (2012.2.2)

注意　問題用紙は持ち帰り, 解答用紙のみを提出せよ. 答だけのものは零点. 計算途中も記せ (部分点あり).

問題 1 $[0,+\infty)$ 上で定義された関数 $f(t)$ のラプラス積分は

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

で定義される. 次の関数のラプラス積分を計算して, 増加指数と合わせて答えよ. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2, \\ t-2, & 2 \leq t \leq 3, \\ 1, & t > 3 \end{cases}$

(2) $f(t) = \sin kt$ ($k > 0$ は定数)

問題 2 $f(t)$ のラプラス変換を $F(p)$ とするとき, $f(t)$ を $F(p)$ の原関数という. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $F(p)$ が有理関数であり, 多項式の商として $F(p) = \dfrac{G(p)}{H(p)}$, $\deg G(p) < \deg H(p)$, のように表されているものとする. このとき, $f(t)$ を $F(p)$ から求める公式を書け.

(2) (1) の公式を説明しながら, $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p-2)^2}$ の原関数を求めよ.

問題 3 次の問に答えよ. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) $f'(t)$ と $f''(t)$ のラプラス変換を $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ を用いて表せ.

(2) ラプラス変換を用いて次の方程式を解け.

$$f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) = te^{-t}, \qquad f(0) = 2, \qquad f'(0) = 0$$

裏面にも問題があります

問題 4 ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

によって定義される. ($10 \times 2 = 20$ 点)

(1) 関数等式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を導出し, $\Gamma(z)$ を複素平面全体に拡張する方法について説明せよ.

(2) $\Gamma(4)$ と $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ を計算せよ. ただし, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ は既知としてよい.

問題 5 $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ とする. ルジャンドルの微分方程式

$$(1 - z^2) f''(z) - 2z f'(z) + \nu(\nu+1) f(z) = 0$$

の解で $f(0) = 1$ を満たす多項式解が存在するようなパラメータ ν を定めよ. 次に, そのような ν のうち小さいほうからの 2 つについて, 対応する多項式解を具体的に書き下せ. (10 点)

問題 6 次の 1 次元波動方程式を解け. (10 点)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 6\sin 3x$$

応用数学 B 期末試験解説 (2012.2.2 実施)

問題 1 (1) 定義にあてはめて計算するだけ.

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \int_2^3 (t-2)e^{-pt}dt + \int_3^{+\infty} e^{-pt}dt \\
&= \Big\{ -\frac{1}{p}\,e^{-3p} + \frac{1}{p^2}\,(e^{-2p} - e^{-3p}) \Big\} + \frac{1}{p}\,e^{-3p} \\
&= \frac{1}{p^2}\,(e^{-2p} - e^{-3p})
\end{aligned}
$$

この積分が収束するのは, $\mathrm{Re}\,(p) > 0$ のとき. よって, 増加指数は $s_0 = 0$ である.

(2) 部分積分を 2 回繰り返すか, e^{ikt} のラプラス積分を計算して虚部をとればよい. 詳しくは教科書を参照.

$$
\frac{k}{p^2+k^2} \qquad \text{増加指数は } s_0 = 0
$$

問題 2 (1) $H(p) = 0$ となる p を $p_1, \ldots, p_k$ とするとき,

$$
f(t) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{Res}_{p=p_i} F(p)e^{pt}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{p=-1} F(p)e^{pt} &= \lim_{p\to -1} \frac{e^{pt}}{(p-2)^2} = \frac{1}{9}\,e^{-t} \\
\operatorname*{Res}_{p=2} F(p)e^{pt} &= \lim_{p\to 2} \frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{p+1} = \frac{1}{9}\,(3te^{2t} - e^{2t})
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
f(t) = \operatorname*{Res}_{p=-1} F(p)e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=2} F(p)e^{pt} = \frac{1}{9}\,(e^{-t} + 3te^{2t} - e^{2t})
$$

問題 3 (1) 教科書参照

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= pF(p) - f(0) \\
\mathcal{L}[f''(t)] &= p^2F(p) - pf(0) - f'(0)
\end{aligned}
$$

(2) 両辺のラプラス変換を計算する ($F = \mathcal{L}[f]$ とおく). 左辺は,

$$
\mathcal{L}[f'' + 3f' + 2f] = (p^2F - 2p) + 3(pF - 2) + 2F = (p^2 + 3p + 2)F - 2p - 6.
$$

右辺は,

$$
\mathcal{L}[te^{-t}] = \int_0^\infty te^{-t}e^{-pt}dt = \frac{1}{(p+1)^2}
$$

したがって, 与えられた微分方程式は,

$$
(p^2 + 3p + 2)F - 2p - 6 = \frac{1}{(p+1)^2}
$$

と同値. これは簡単に解けて,

$$
F = \frac{1}{(p+1)^3(p+2)} + \frac{2p+6}{(p+1)(p+2)}
$$

ここで, 逆変換を用いると,

$$
\begin{aligned}
f(t) = \operatorname*{Res}_{p=-1} \frac{1}{(p+1)^3(p+2)}\, e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=-2} \frac{1}{(p+1)^3(p+2)}\, e^{pt} \\
+ \operatorname*{Res}_{p=-1} \frac{2p+6}{(p+1)(p+2)}\, e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=-2} \frac{2p+6}{(p+1)(p+2)}\, e^{pt}
\end{aligned}
$$

後は, 右辺の留数を計算すればよい.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{p=-1} \frac{1}{(p+1)^3(p+2)}\, e^{pt} = \lim_{p\to-1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\frac{e^{pt}}{p+2} = \frac{1}{2}(t^2e^{-t} - 2te^{-t} + 2e^{-t}) \\
&\operatorname*{Res}_{p=-2} \frac{1}{(p+1)^3(p+2)}\, e^{pt} = \lim_{p\to-2} \frac{e^{pt}}{(p+1)^3} = -e^{-2t} \\
&\operatorname*{Res}_{p=-1} \frac{2p+6}{(p+1)(p+2)}\, e^{pt} = \lim_{p\to-1} \frac{2p+6}{p+2}\, e^{pt} = 4e^{-t} \\
&\operatorname*{Res}_{p=-2} \frac{2p+6}{(p+1)(p+2)}\, e^{pt} = \lim_{p\to-2} \frac{2p+6}{p+1}\, e^{pt} = -2e^{-2t}
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
f(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t + 5\right) e^{-t} - 3e^{-2t}
$$

問題 4 (1) 部分積分によって,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = \left[t^{z-1}(-e^{-t})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (z-1)t^{z-2}(-e^{-t})dt \\
&= (z-1)\int_0^{+\infty} t^{z-2}e^{-t}dt = (z-1)\Gamma(z-1)
\end{aligned}
$$

この式は, $\operatorname{Re}(z-1) > 0$ のとき, つまり, $\operatorname{Re} z > 1$ のときに成り立つ式である. 変数 z を $z+1$ に置き換えて,

$$
\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \qquad \operatorname{Re} z > 0
$$

が得られたことになる. 右辺が $\operatorname{Re} z > -1$, $z \neq 0$ で意味をもつことを利用して, $\Gamma(z)$ がその領域に拡張される. これを繰り返せば, $\Gamma(z)$ は $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \dots\}$ に拡張される.

(2) 上の関数等式を繰り返し用いればよい.

$$
\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2\Gamma(2) = 3\cdot 2\cdot 1\Gamma(1) = 6
$$

ただし, $\Gamma(1) = 1$ を用いた (積分の計算ですぐわかる)

$$
\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+2\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+3\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}\,.
$$

問題 5

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n
$$

とおいて係数を定めることを考えればよい.

$$
f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n z^{n-1}, \qquad f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) z^{n-2},
$$

これらを与えられた微分方程式に代入して,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n n z^n + \nu(\nu+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0
$$

第１項を書き直して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n n z^n + \nu(\nu+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0$$

したがって,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + \nu(\nu+1)c_n = 0, \qquad n \geq 0.$$

漸化式をさらに整理すれば,

$$c_{n+2} = \frac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{(n+2)(n+1)}\, c_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

$f(0) = 1$ から $c_0 = 1$ がわかる.

(Case 1) ν が偶数のとき. $c_1 \neq 0$ から漸化式 (1) を繰り返し用いると, $c_3, c_5, \ldots$ が定まるが, それらはすべて 0 と異なる. すると $f(z)$ は無限級数になり, 多項式解にならないので, $c_1 = c_3 = \cdots = 0$. $c_0 = 1$ から漸化式を繰り返し用いると, $c_{\nu+2} = 0$ となりそれ以降は全部 0. そうすると, $f(z)$ は ν 次多項式になる.

(Case 2) ν が奇数のとき. $c_0 = 1$ から漸化式を繰り返し用いると, $c_2, c_4, \ldots$ がすべて $\neq 0$ であり, $f(z)$ は多項式にならない.

こうして, $\nu = 0, 2$ に対応する多項式を求めればよい. それらは,

$$f(z) = 1, \qquad f(z) = -3z^2 + 1.$$

問題 6 まず, $u(x,t) = X(x)T(t)$ の形の解を求めよう. このとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad X''T = XT''.$$

さらに,

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

と変形することで, これらは定数であることが分かる. それを $-\lambda^2$ として,

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \qquad \frac{T''}{T} = -\lambda^2$$

となることがわかる. これらは容易に解けて,

$$X(x) = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x,$$
$$T(t) = c\sin\lambda t + d\cos\lambda t,$$

とおける. ただし, a, b, c, d は任意定数である. (λ は複素数なので, X, Y をともに指数関数で表してもよいし, ともに三角関数で表してもよいし, また, 指数関数と三角関数を逆に用いてもよい. オイラーの公式などによって, 結果的に同じことになる.)

次に, 境界条件 $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ から,

$$X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$$

したがって,

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

まず, $X(x) = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x$ が $X(0) = X(\pi) = 0$ を満たすために,

$$b = 0, \qquad a\sin\lambda\pi + b\cos\lambda\pi = 0.$$

がわかる. $a = 0$ とすると, $X(x) = 0$ となり $u(x,y) = 0$ となってしまう. これは, 残っている初期条件を満たさないので解にならない. よって, $a \neq 0$ である. そうすれば, $\lambda = n$ は整数でなければならない. $\sin x$ が奇関数であることと, $\lambda = 0$ では求めるべき解にならないことから, $n = 1, 2, \ldots$ に限られる. こうして, $X(x)$ の形は,

$$X(x) = a\sin nx, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad a\text{: 任意定数}$$

となる．このとき, $T(t)$ の形は,

$$T(t) = c \sin nt + d \cos nt,$$

である．したがって,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

を満たす解で $u(x,t) = X(x)T(t)$ を満たすものは,

$$u(x,t) = \sin nx (c_n \sin nt + d_n \cos nt), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad c_n,\ d_n\text{: 任意定数}$$

の形であることが分かった．重ね合わせ原理が成り立つから, 一般解は,

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx (c_n \sin nt + d_n \cos nt),$$

で与えられる (フーリエ級数論を用いて導出してもよい).

初期条件を考えると,

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin nx, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \sin nx$$

したがって,

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin nx = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \sin nx = 6 \sin 3x$$

を満たすように係数を決めればよい．第一の方は, 両辺に $\sin mx$ をかけて $[0,\pi]$ 上で積分すれば,

$$\frac{\pi}{2} d_m = \int_0^{\pi/2} x \sin mx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin mx dx = \frac{2}{m^2} \sin \frac{\pi}{2} m$$

したがって,

$$d_m = \frac{4}{\pi m^2} \sin \frac{\pi}{2} m$$

が得られる．m が偶数のときは $d_m = 0$ である．m が奇数のときを考えるため, m を $2n+1$ で置き換えて,

$$d_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \sin \frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}(-1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

第 2 の方はフーリエ級数の一意性から,

$$c_3 = 2, \qquad c_n = 0 (n \neq 3).$$

求める解は,

$$u(x,t) = 2 \sin 3x \sin 3t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} \sin(2n+1)x \cos(2n+1)t$$