

数理統計学・期末試験問題 (2013.07.26)

- [1]–[6] は必答. [7]–[8] から 1 題だけを選択解答せよ. (100 点満点)
- 電卓などの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] (必答) A, B の 2 人がゲームをする. これまでの実績から A の勝つ確率は $2/5$, B の勝つ確率は $3/5$ である. ゲームはどちらかが先に 5 勝した段階で終わり, 賞金 10000 ユーロを受け取る. A が 4 勝, B が 2 勝した段階でゲームを中止することとなった. 賞金はどのように配分するのが公平であるか? (10 点)

[2] (必答) サイコロを 2 個投げて出た目の小さい方を X とする. (同じ目が出たときは, その目を X とする.) X の平均値と分散を計算せよ. (10 点)

[3] (必答) 標準正規分布表を用いて次の問いに答えよ. (20 点)

- (1) サイコロ (6 面体) を 720 回投げるとき, 1 の目の出る回数が 105 回以下になる確率を求めよ.
- (2) 大規模な選抜試験が実施され, 上位 5% が合格となる. 試験の結果, 平均点は 68 点, 標準偏差は 8 点であった. 受験者全体の得点分布は正規分布であると仮定して, 合格するための最低点を求めよ.

[4] (必答) ある国では, 病気 A の感染者は 100 人に 2 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 90% に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう. ある人がこの検査を受けて陽性反応が出た. この人が感染者である確率を求めよ. (10 点)

[5] (必答) 「100 万世帯に対して番組 A の視聴率調査を行った. 600 世帯を無作為抽出して視聴率 22.1% が得られたので, 標準的な計算によって, 信頼係数 95% の信頼区間 $22.1 \pm 3.3\%$ が導かれた」このことに関して以下の問いに答えよ. (20 点)

- (1) 信頼区間とは何か? 信頼区間の求め方を確率論的な根拠も合わせて説明せよ.
- (2) 信頼係数 95% を保ったまま, 信頼区間の幅をより狭く $22.1\% \pm 0.33\%$ のように精度を高めるためには, どうすればよいか? 理由も合わせて述べよ.

[6] (必答) コインを 400 回投げたところ表が 224 回出た. このコインは公平であるといえるだろうか? 有意水準 5% で仮説検定せよ. 有意水準 1% ではどうか? (10 点)

[7] (選択) コインを 400 回投げたとき, 表が 215 回出た. 有意水準 5% の仮説検定によってコインは公平といえるかどうかを判定するときに生ずる第 2 種誤り確率とは何か説明せよ. 次に, 第 2 種誤り確率が 5%以下になるような状況はどのような場合であるか答えよ. (20 点)

[8] (選択) 中心を O とする半径 1 の円の内部にランダムに 1 点を選び, その点と中心 O との距離を X とする. X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ. 次に, それを用いて, 確率密度関数, 平均, 分散を求めよ. (20 点)

付録：標準正規分布表 $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学 (2013.07.26 実施) 期末試験解説

[1] A はあと 1 勝すればよいことに注目すれば,

$$P(A) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{50 + 30 + 18}{125} = \frac{98}{125}$$

B が逆転勝ちするのは 3 連勝しかないので,

$$P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$$

したがって, 賞金は 98 : 27 に分割するのがよい.

$$A : 10000 \times \frac{98}{125} = 7840, \quad B : 10000 \times \frac{27}{125} = 2160$$

[2] サイコロの 1 個目の目を i , 2 個目の目を j とすると, 標本空間と確率は,

$$\Omega = \{\omega = (i, j); i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \quad P(\{\omega\}) = P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$$

で与えられる. $X = \min\{i, j\}$ の値について表を作ると, 次のようになる.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

この表から確率分布がわかる.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

平均値は公式にあてはめて計算する.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{k=1}^6 kP(X = k) \\ &= 1 \times \frac{11}{36} + 2 \times \frac{9}{36} + 3 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{5}{36} + 5 \times \frac{3}{36} + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{91}{36}. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^6 k^2 P(X = k) \\ &= 1^2 \times \frac{11}{36} + 2^2 \times \frac{9}{36} + 3^2 \times \frac{7}{36} + 4^2 \times \frac{5}{36} + 5^2 \times \frac{3}{36} + 6^2 \times \frac{1}{36} = \frac{301}{36}. \end{aligned}$$

分散は,

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{36^2}.$$

[3] (1) サイコロを 720 回投げるとき 1 の目が出る回数を X とすると, X は $B(720, 1/6) \approx N(120, 10^2)$ に従う. したがって, $Z = \frac{X - 120}{10} \sim N(0, 1)$ となる. 半目補正に注意して,

$$P(X \leq 105) = P(X \leq 105.5) = P\left(\frac{X - 120}{10} \leq \frac{105.5 - 120}{10}\right) = P(Z \leq -1.45).$$

標準正規分布表を用いて, 上の値は, $0.5 - 0.4265 = 0.0735$.

(2) $X \sim N(68, 8^2)$ に対して, $P(X \geq a) = 0.05$ となるような a を求めればよい. 標準正規分布表により, $Z \sim N(0, 1)$ なら, $P(Z \geq 1.64) = 0.05$. したがって,

$$Z = \frac{X - 68}{8} \geq 1.64 \quad \Leftrightarrow \quad X \geq 81.12$$

したがって, 82 点以上とれればよい.

[4] 病気 A に感染している確率と感染していない確率は

$$P(A) = \frac{2}{100}, \quad P(A^c) = \frac{98}{100}.$$

検査 B に陽性反応を示す確率は, 条件付確率であって,

$$P(B|A) = 0.9 \quad P(B|A^c) = 0.05$$

ベイズの公式によって,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \\ &= \frac{\frac{2}{100} \times 0.9}{\frac{2}{100} \times 0.9 + \frac{98}{100} \times 0.05} = \frac{1.8}{1.8 + 4.9} = \frac{2.7}{6.7} = 0.402... = 40\% \end{aligned}$$

[5] (1) 教科書を参照のこと.

(2) 95%信頼区間は

$$\bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

で与えられるので, 信頼区間の幅を $1/10$ にするためには標本数は 100 倍必要になる.

[6] $H_0: p = \frac{1}{2}, H_1: p \neq \frac{1}{2}, \alpha = 0.05$ によって検定を行う. コインを 400 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(400, 1/2) \approx N(200, 10^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

$$W: \left| \frac{x - 200}{10} \right| \geq 1.96$$

実現値 $\bar{x} = 224$ は W に落ちる. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, コインは公正ではないと判定される.

有意水準 $\alpha = 0.01$ とすると, 両側検定の棄却域は

$$W: \left| \frac{x - 200}{10} \right| \geq 2.58$$

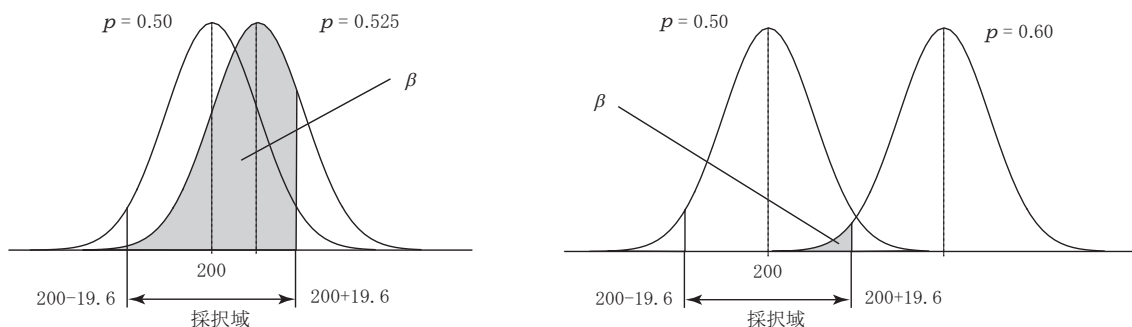
であるから、実現値 $\bar{x} = 224$ は W に落ちない。したがって、有意水準 1% で H_0 は棄却されず、高度に有意とは判定できない。

[7] $H_0 : p = \frac{1}{2}$, $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$, $\alpha = 0.05$ によって検定を行う。コインを 400 回投げるときの表の回数を X とすると、 $X \sim B(400, 1/2) \approx N(200, 10^2)$ 。 H_1 から両側検定の棄却域は

$$W : \left| \frac{x - 200}{10} \right| \geq 1.96$$

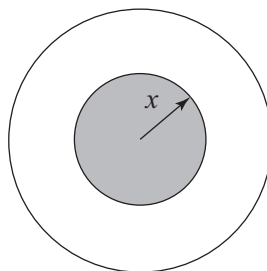
実現値 $\bar{x} = 215$ は W に落ちない。したがって、有意水準 5% で H_0 は棄却されず、コインは公正であると判定される。この判定が間違っている確率、すなわち、コインは公正ではないにもかかわらず公正であると判定してしまう確率が第 2 種誤り確率である。コインが公正ではない場合、可能な p は無限にあり、第 2 種誤り確率を評価することができない。

たとえば、 $p = 0.525$ (左図) と $p = 0.6$ (右図) の場合を考えよう。 $p = 0.525$ の場合は、 $p = 0.5$ の分布と近いため、採択域の範囲にかぶさってくる範囲がかなり大きく、図からわかるように $\beta \geq 0.5$ である。つまり、公正なコインに近い偽物に対しては、公正であるという判定をしがちであり、その間違い確率 (第 2 種誤り確率) は極めて大きい。



$p = 0.6$ の場合は、2つの分布がかなり離れており、 $\beta \leq 0.025$ となることが見て取れる。したがって、 $\beta = 0.05$ となるのは p が 0.6 より少し小さい時である。このとき、分散はほぼ 10^2 と考えてよいので、 $219.6 + 1.64 \times 10 = 236$ から $p = 0.59$ がわかる。つまり、調べているコインが公平 ($p = 0.5$) であるか、あるいは表が出やすく $p \geq 0.59$ であるか、いずれかであれば、第 2 種誤り確率が 0.05 に抑え込まれる。

[8]



題意から X は $0 \leq X \leq 1$ の範囲の値をとるから、 $x < 0$ では $F(x) = 0$, $x \geq 1$ では $F(x) = 1$ である。そこで、 $0 \leq x \leq 1$ とする。 $X \leq x$ はランダムに選んだ 1 点と中心 O との距離が x 以下となることを意味するが、それはランダム点が O を中心とする半径 x の円板から選ばれたことと同値である。したがって、

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2.$$

以上まとめて,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

これを微分したものが確率密度関数である:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

その平均値は

$$m = \int_0^1 x f(x) dx = \frac{2}{3}.$$

分散は,

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 f(x) dx - m^2 = \int_0^1 2x^3 dx - m^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$