

平成 26(2014) 年度 解析学 C 期末試験問題

実施: 2014. 7.29 (火) 08:50–10:20

- 論拠を明示すること. 文章による説明のない式の羅列は 0 点.
- 読めない (薄い、小さい、汚い) 解答は 0 点.

1. 次の微分方程式を解き, 得られる曲線群の特徴を述べて xy 平面に図示せよ. [10 点 $\times 3 = 30$ 点]

(1) $xdy - y(x - 1)dx = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

(3) $(x + y)dx - xdy = 0$

2. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = (1 - y)y$ の解 $y = y(x)$ で次の性質を満たすものを求めて, そのグラフの概形を示せ. [10 点 $\times 3 = 30$ 点]

(1) $y(0) = \frac{1}{2}$

(2) $y(2) = 1$

(3) $y'(1) = \frac{2}{9}$

3. 次の微分方程式の一般解を求めよ. [10 点 $\times 2 = 20$ 点]

(1) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

(2) $y'' - y' - 2y = 5 \cos x$

4. $y = y(x), z = z(x)$ に関する連立微分方程式

$$\begin{cases} y' = -5y + 4z \\ z' = -4y + 5z \end{cases}$$

の一般解を求め, $x \mapsto (y(x), z(x))$ が定める yz 平面内の曲線群の概形を示し, それらの特徴を述べよ. [10 点]

5. べき級数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が微分方程式 $y' = 1 + x + y$ および初期条件 $y(0) = 1$ を満たすとき, 係数列 $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ を定めよ. [10 点]

平成 21(2009) 年度 解析学 C 期末試験解説

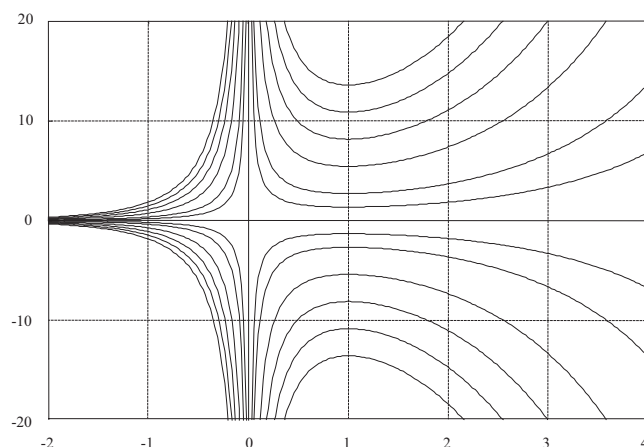
1. 典型的な解法を示すが, さまざまな方法で解ける. 要は, 試行錯誤の経験がものを言う.

(1) $xdy - y(x-1)dx = 0$ は変数分離形.

$$\frac{dy}{y} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx \quad \Leftrightarrow \quad \log |y| = x - \log |x| + C \quad \Leftrightarrow \quad |xy| = e^C e^x$$

定数を改めて, 一般解は

$$y = C \frac{e^x}{x}$$



(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ は同次形.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2y/x}{1 - (y/x)^2}$$

ここで, $u = \frac{y}{x}$ とおいて,

$$y = xu, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

を代入して,

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2} \quad \Leftrightarrow \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u + u^3}{1 - u^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - u^2}{u + u^3} du = \frac{dx}{x}$$

ここで,

$$\frac{1 - u^2}{u + u^3} = \frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} = \frac{1}{u} + \frac{-2u}{1 + u^2}$$

に注意すれば,

$$\int \frac{1 - u^2}{u + u^3} du = \log |u| - \log(1 + u^2) + C = \log \frac{|u|}{1 + u^2} + C.$$

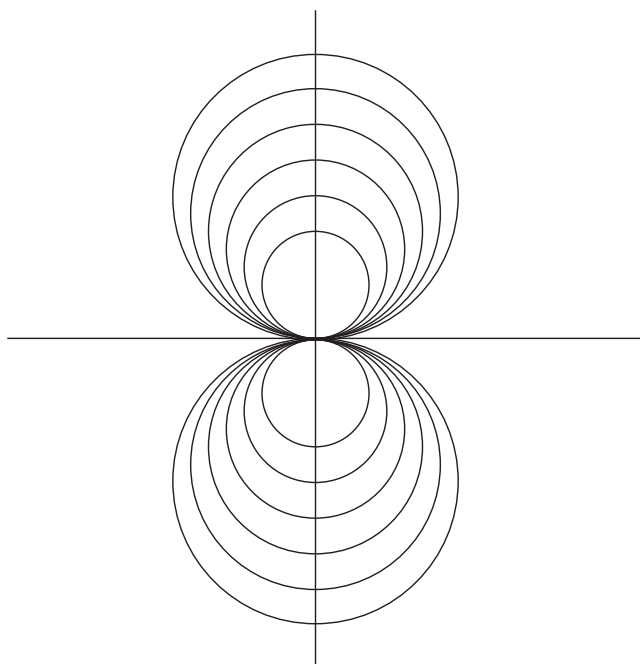
したがって,

$$\frac{1-u^2}{u+u^3} du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \log \frac{|u|}{1+u^2} + C = \log |x| \Leftrightarrow \log \left| \frac{x(1+u^2)}{u} \right| = C$$

定数を改めて,

$$\frac{x(1+u^2)}{u} = C \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{y} = C \Leftrightarrow x^2+y^2 = Cy \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$$

これに加えて, $y=0$ も解.



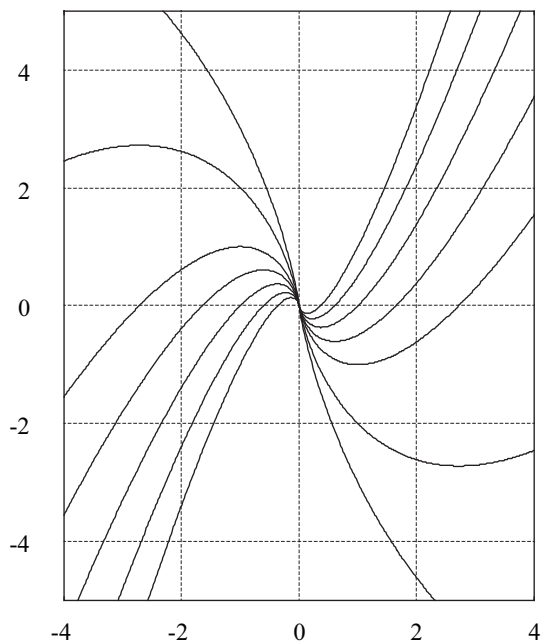
(3) $(x+y)dx - xdy = 0$ は同次形なので, (2) と同様の置き換えで解ける. ここでは, 完全形に帰着する方法で解こう.

$(x+y)dx - xdy = 0$ そのものは完全形ではないが, x^{-2} が積分因子となって, $(x^{-1} + x^{-2}y)dx - x^{-1}dy = 0$ は完全形になる. 実際,

$$\varphi(x, y) = \log |x| - \frac{y}{x}$$

とすると, $d\varphi = (x^{-1} + x^{-2}y)dx - x^{-1}dy$ が成り立つ. したがって, 一般解は,

$$\varphi(x, y) = \log |x| - \frac{y}{x} = C \Leftrightarrow y = x(\log |x| - C)$$



2. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = (1-y)y$ は変数分離形である.

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{(1-y)y} = dx \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = dx$$

となるから, 積分して,

$$\log |y| - \log |1-y| = x + C \quad \Leftrightarrow \quad \log \left| \frac{y}{1-y} \right| = x + C \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{y}{1-y} \right| = e^C e^x$$

定数を改めて,

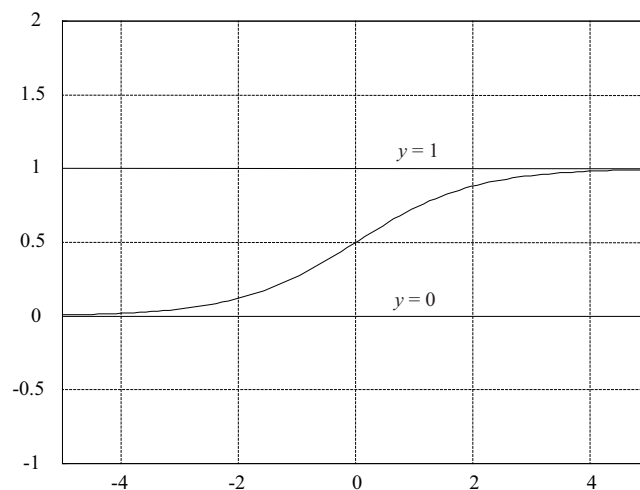
$$\frac{y}{1-y} = C e^x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{C e^x}{1 + C e^x}$$

これが一般解. これ以外に, $y = 1$ も解.

(1) $y(0) = \frac{C}{1+C} = \frac{1}{2}$ より $C = 1$ とすればよい. 解は,

$$y = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

(2) $y(2) = 1$ を満たす解は $y = 1$.

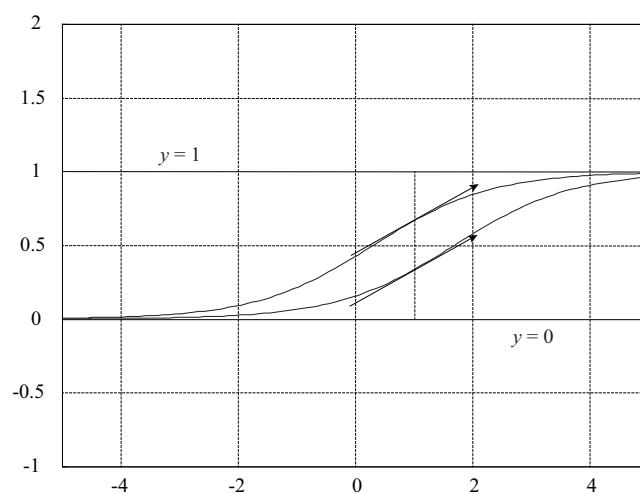


(3)

$$y' = \frac{Ce^x(1 + Ce^x) - C^2e^{2x}}{(1 + Ce^x)^2} = \frac{Ce^x}{(1 + Ce^x)^2}$$

から, $y'(1) = \frac{Ce}{(1 + Ce)^2} = \frac{2}{9}$. これを解いて, $C = \frac{1}{2e}, \frac{2}{e}$. よって, 求める解は,

$$y = \frac{e^x}{2e + e^x}, \quad y = \frac{2e^x}{e + 2e^x}$$



3. (1) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

特性根は, $\lambda = 1, \lambda = 2$ (重根). よって, 一般解は,

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$$

(2) まず, 斉次方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の基本解を求める. 特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

となり, これを解くと, $\lambda = -1, 2$. よって基本解は $\{e^{-x}, e^{2x}\}$ となる. 次に, $y'' - y' - 2y = 5 \cos x$ の特殊解を 1 つ求める. 右辺から, $y = A \cos x + B \sin x$ の形を想定する.

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= (-A \cos x - B \sin x) - (-A \sin x + B \cos x) - 2(A \cos x + B \sin x) \\ &= (-3A - B) \cos x + (A - 3B) \sin x \\ &= 5 \cos x \end{aligned}$$

よって,

$$-3A - B = 5, \quad A - 3B = 0$$

これを解いて, $A = -\frac{3}{2}, B = -\frac{1}{2}$ が得られる. よって特殊解の 1 つは,

$$y = -\frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

したがって, 求めるべき一般解は,

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

となる.

4. 第 1 式より, $z = \frac{1}{4} y' + \frac{5}{4} y$. これを第 2 式に代入して, 整理すると,

$$y'' - 9y = 0$$

特性方程式は $\lambda^2 - 9 = 0$ となり, 特性根は $\lambda = \pm 3$. したがって, y の一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

したがって,

$$z = \frac{1}{4} y' + \frac{5}{4} y = 2C_1 e^{3x} + \frac{C_2}{2} e^{-3x}$$

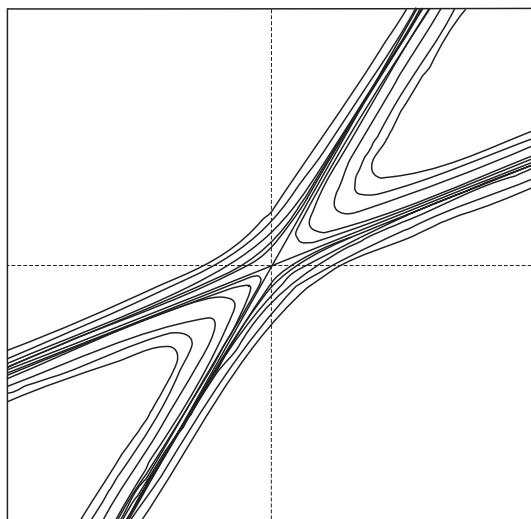
上の 2 式から

$$e^{-3x} = -\frac{2}{3C_2} (z - 2y) \quad e^{3x} = \frac{1}{3C_1} (2z - y)$$

したがって, x を消去して,

$$-\frac{3C_2}{2(z-2y)} = \frac{1}{3C_1} (2z-y) \iff (z-2y)(2z-y) = -\frac{9C_1C_2}{2}$$

が得られる. したがって, 曲線群は $(z-2y)(2z-y) = C$ (C は定数) で与えられ, これらは, $z = 2y$ と $2z = y$ を漸近線とする双曲線群である.



5. $y = \sum c_n x^n$ を微分方程式 $y' = 1 + x + y$ および初期条件 $y(0) = 1$ に直接代入する.
まず,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n$$

に注意して,

$$y' = 1 + x + y \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n = (1 + c_0) + (1 + c_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

また,

$$y(0) = 1 \iff c_0 = 1$$

したがって,

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= 1 + c_0 \\ 2c_2 &= 1 + c_1 \\ (n+1)c_{n+1} &= c_n \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

そうすると, $c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = \frac{3}{2}$ はよい. さらに, $n \geq 3$ のとき,

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \frac{c_{n-2}}{n(n-1)} = \cdots = \frac{c_2}{n(n-1) \cdots 3} = \frac{3}{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2} = \frac{3}{n!}$$

これは $n = 2$ でも使えるので,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_n = \frac{3}{n!} \quad (n \geq 2)$$

が求めるもの.