

数理統計学・期末試験問題 (2014.07.23)

- [1]–[6] は必答. [7]–[8] から 1 題だけを選択解答せよ. (100 点満点)
- 電卓などの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] (必答) 事象 A, B, C が独立で, $P(A) = a, P(B) = b, P(C) = c$ とする. 次の確率を a, b, c を用いて表せ. (5 点 $\times 2$)

- (1) $P(A^c \cap B)$. ただし, A^c は A の余事象.
- (2) $P(A \cup B \cup C)$.

[2] (必答) サイコロを 2 個投げて出た目の大きい方を X , 小さい方を Y とする. ただし, 同じ目が出たときは, $X = Y$ とする. (5 点 $\times 4$)

- (1) 確率 $P(X = 4)$ を求めよ.
- (2) 条件付き確率 $P(Y \leq 2 | X \geq 5)$ を求めよ.
- (3) X の平均値 $E[X]$ を計算せよ.
- (4) $E[XY] - E[X]E[Y]$ を計算せよ.

[3] (必答) 大規模な選抜試験が実施され, 上位から 33% が合格となる. 試験の結果, 平均点は 58 点, 標準偏差は 12 点であった. 受験者全体の得点分布は正規分布であると仮定して, 合格するための最低点を整数で求めよ. (10 点)

[4] (必答) ある国では, 病気 A の感染者は 100 人に 4 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 90% に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう. 次の確率を求めよ (% で表わし, 小数第 2 位を四捨五入せよ). (5 点 $\times 2$)

- (1) この検査を受けて陽性反応が出た人が感染者である確率.
- (2) この検査を受けて陰性反応が出た人が非感染者である確率.

[5] (必答) 100 万世帯から 600 世帯を無作為抽出して, 番組 A を見たかどうかを質問したところ 144 世帯が見たと答えた. 調査対象の 100 万世帯の視聴率についてどのようなことがいえるか? 区間推定の方法を理論的根拠も合わせて説明せよ. (10 点)

[6] (必答) 仮説検定によって, コインが公平かどうかを判断する問題に関して, 次の問いに答えよ. (10 点 $\times 2$)

- (1) コインを 100 回投げてみたところ, 表が 62 回出た. 有意水準 5% で仮説検定せよ.
- (2) コインを 400 回投げてみたところ, 表が 215 回出た. 有意水準 5% の仮説検定によってコインは公平といえるかどうかを判定するときに生ずる第 2 種誤り確率の大きさを調べて, その役割について説明せよ.

[7] (選択) 中心を O とする半径 R の円の内部にランダムに 1 点 A を選び、線分 AO の長さを X とする. (10 点 $\times 2$)

(1) X の分布関数 $F_X(x) = P(X \leq x)$ と確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ.

(2) A を中心として、円 O に内接する円の面積を S とするとき、 S の 平均値と分散を求めよ.

[8] (選択) 0 から 9 までの数字を重複を許して 5 個並べて作った乱数 00000, 00001, $\dots$, 99999 のうち 1 つを考える. 次の確率を求めよ. (5 点 $\times 4$)

(1) 選ばれた乱数に 7 がちょうど 1 個含まれる確率を求めよ.

(2) 選ばれた乱数に 7 がちょうど 2 個含まれる確率を求めよ.

(3) 選ばれた乱数に 0, 1, $\dots$, 9 のうち少なくとも 1 つがちょうど 2 個含まれる確率を求めよ.

(4) 選ばれた乱数に 0, 1, $\dots$, 9 のうち少なくとも 2 つがちょうど 1 個含まれる確率を求めよ.

付録：標準正規分布表 $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学 (2014.07.23 実施) 期末試験解説

- [1] (1) $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = b - ab$
 (2)

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C) \\ &= a + b + c - ab - bc - ca + abc \end{aligned}$$

- [2] 1 個目のサイコロの目を i , 2 個目の目を j とすると, 標本空間と確率は,

$$\Omega = \{\omega = (i, j); i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \quad P(\{\omega\}) = P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$$

で与えられる. X, Y は Ω で定義された確率変数であり,

$$X: \Omega \ni \omega = (i, j) \mapsto \max\{i, j\}, \quad Y: \Omega \ni \omega = (i, j) \mapsto \min\{i, j\},$$

で与えられることになる. X, Y の値について表を作ると, 次のようになる.

$X(i, j)$							$Y(i, j)$						
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	$i \backslash j$	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	3	4	5	6	2	1	2	2	2	2	2
3	3	3	3	4	5	6	3	1	2	3	3	3	3
4	4	4	4	4	5	6	4	1	2	3	4	4	4
5	5	5	5	5	5	6	5	1	2	3	4	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	1	2	3	4	5	6

- (1) 事象 $\{X = 4\}$ は 7 個の根元事象から成るから,

$$P(X = 4) = \frac{7}{36}$$

- (2) まず,

$$\begin{aligned} \{X \geq 5\} &= \left\{ \begin{array}{cccccc} & & & & (1, 5) & (1, 6) \\ & & & & (2, 5) & (2, 6) \\ & & & & (3, 5) & (3, 6) \\ & & & & (4, 5) & (4, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6) \end{array} \right\}, \\ \{X \geq 5, Y \leq 2\} &= \left\{ \begin{array}{cc} & (1, 5) \quad (1, 6) \\ & (2, 5) \quad (2, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) \\ (6, 1) & (6, 2) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

したがって,

$$P(Y \leq 2 | X \geq 5) = \frac{P(Y \leq 2, X \geq 5)}{P(X \geq 5)} = \frac{8/36}{20/36} = \frac{2}{5}$$

- (3) X の確率分布は,

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

したがって,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^6 kP(X = k) \\ &= 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36}\end{aligned}$$

(4) Y の分布は,

k	1	2	3	4	5	6
$P(Y = k)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

(3) と同様に,

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{91}{36}$$

また, $XY = ij$ で i, j は独立であることから,

$$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[ij] = \mathbf{E}[i]\mathbf{E}[j] = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

したがって,

$$\mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{161}{36} \times \frac{91}{36} = \frac{1225}{1296}$$

[3] $X \sim N(58, 12^2)$ に対して, $P(X \geq a) = 0.33$ となるような a を求めればよい. $Z \sim N(0, 1)$ とすると,

$$P(X \geq a) = P\left(\frac{X - 58}{12} \geq \frac{a - 58}{12}\right) = P\left(Z \geq \frac{a - 58}{12}\right) = 0.33$$

標準正規分布表により, $P(Z \geq 0.44) = 0.33$ がわかるから,

$$\frac{a - 58}{12} = 0.44 \quad \Leftrightarrow \quad a = 58 + 0.44 \times 12 = 63.28$$

したがって, 64 点以上とれればよい.

[4] 病気 A に感染している確率と感染していない確率は

$$P(A) = \frac{4}{100}, \quad P(A^c) = \frac{96}{100}.$$

検査 B に陽性反応を示す事象を B とすれば, 題意は条件付確率で表され,

$$P(B|A) = 0.9 \quad P(B|A^c) = 0.05$$

ベイズの公式によって,

$$\begin{aligned}P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \\ &= \frac{\frac{4}{100} \times 0.9}{\frac{4}{100} \times 0.9 + \frac{96}{100} \times 0.05} = \frac{3}{7} = 0.4285 \dots \approx 42.9\%.\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} P(A^c|B^c) &= \frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(A^c)P(B^c|A^c) + P(A)P(B^c|A)} \\ &= \frac{\frac{96}{100} \times 0.95}{\frac{96}{100} \times 0.95 + \frac{4}{100} \times 0.1} = \frac{228}{229} = 0.9956 \dots \approx 99.6\%. \end{aligned}$$

[5] 観測データから得られる $144/600 = 0.24$ は不偏推定量による点推定値である. したがって, 0.24 をもって全世帯の推定視聴率とすることは次の意味で合理的である: 仮想的に同様の視聴率調査を繰り返し行えば, 得られる推定値は毎回異なるが, その平均値は大数の法則によって, 全世帯の視聴率に近づく. したがって, 点推定値 0.24 は真の視聴率のまわりにばらついている量の 1 つであると期待される.

しかしながら, 0.24 が真の視聴率にどのくらい近いかわかるかは全く明らかにされていない. これを評価するのが区間推定の考え方である.

$$0.24 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{0.24(1-0.24)}{600}} = 0.24 \pm z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{19}}{250}$$

この式の導出や使い方, 基本的な性質については教科書等.

[6] (1) $H_0: p = \frac{1}{2}$, $H_1: p \neq \frac{1}{2}$, $\alpha = 0.05$ によって検定を行う. コインを 100 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(100, 1/2) \approx N(50, 5^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

$$W: \left| \frac{x - 50}{5} \right| \geq 1.96$$

実現値 $x = 62$ は W に落ちる. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, コインは公平ではないと判定される.

(2) $H_0: p = \frac{1}{2}$, $H_1: p \neq \frac{1}{2}$, $\alpha = 0.05$ によって検定を行う. コインを 400 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(400, 1/2) \approx N(200, 10^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

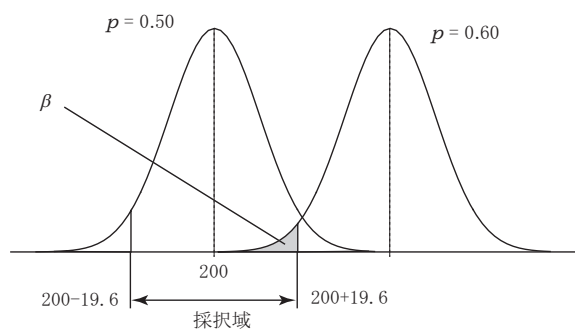
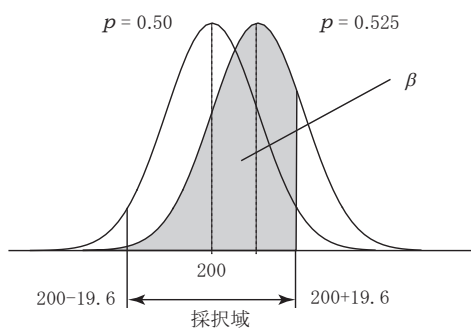
$$W: \left| \frac{x - 200}{10} \right| \geq 1.96$$

実現値 $\bar{x} = 215$ は W に落ちない. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却されず, コインは公平であると判定される. この判定が間違っている確率, すなわち, コインは公平ではないにもかかわらず公平であると判定してしまう確率が第 2 種誤り確率である. コインが公平ではない場合, 可能な p は無限にあり, 第 2 種誤り確率を評価することができない.

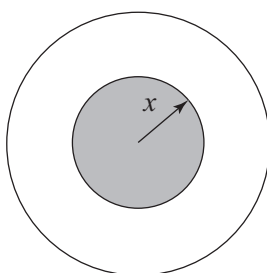
たとえば, $p = 0.525$ (左図) と $p = 0.6$ (右図) の場合を考えよう. $p = 0.525$ の場合は, $p = 0.5$ の分布と近いので, 採択域の範囲にかぶさってくる範囲がかなり大きく, 図からわかるように $\beta \geq 0.5$ である. つまり, 公正なコインに近い偽物に対しては, 公正であるという判定をしがちであり, その間違い確率 (第 2 種誤り確率) は極めて大きい.

$p = 0.6$ の場合は, 2 つの分布がかなり離れており, $\beta \leq 0.025$ となることが見て取れる. したがって, $\beta = 0.05$ となるのは p が 0.6 より少し小さい時である. このとき, 分散はほぼ 10^2 と考えてよいので, $219.6 + 1.64 \times 10 = 236$ から $p = 0.59$ がわかる. つまり, 調べているコインが公平 ($p = 0.5$) であるか, あるいは表が出やすく $p \geq 0.59$ であるか, いずれかであれば, 第 2 種誤り確率が 0.05 に抑え込まれる.

以上のような観察をもとに説明する.



[7]



(1) 題意から X は $0 \leq X \leq R$ の範囲の値をとるから, $x < 0$ では $F(x) = 0$, $x \geq R$ では $F(x) = 1$ である. そこで, $0 \leq x \leq R$ とする. $X \leq x$ はランダムに選んだ 1 点と中心 O との距離が x 以下となることを意味するが, それはランダム点が O を中心とする半径 x の円板から選ばれたことと同値である. したがって,

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}.$$

以上まとめて,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{R^2}, & 0 \leq x \leq R, \\ 1, & x \geq R. \end{cases}$$

これを微分したものが確率密度関数である:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{R^2}, & 0 \leq x \leq R, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

(2) $S = \pi(R - X)^2$ で与えられる. 定義によって,

$$\mathbf{E}[S] = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(R - x)^2 f(x) dx$$

これに (1) の結果を代入して,

$$\mathbf{E}[S] = \frac{2\pi}{R^2} \int_0^R (R - x)^2 x dx = \frac{\pi R^2}{6}$$

また,

$$\mathbf{E}[S^2] = \frac{2\pi^2}{R^2} \int_0^R (R-x)^4 x dx = \frac{\pi^2 R^4}{15}$$

したがって,

$$\mathbf{V}[S] = \mathbf{E}[S^2] - \mathbf{E}[S]^2 = \frac{7}{180} \pi^2 R^4$$

[8] (1) 0 から 9 までの数字を 5 個並べて作った乱数で 7 がちょうど 1 個だけ含まれるものは,

$$7**** \quad *7*** \quad **7** \quad ***7* \quad *****$$

のような形をもつ. ただし, * には 0 以外の数字が自由に入る. そのような乱数の個数は 5×9^4 なので, 求める確率は,

$$\frac{5 \times 9^4}{10^5} = \frac{32805}{100000} = \frac{6561}{20000}$$

(2) 0 から 9 までの数字を 5 個並べて作った乱数で 7 がちょうど 2 個だけ含まれるものは,

$$77*** \quad 7*7** \quad \dots \quad ***77$$

のような形をもつ. ただし, * には 0 以外の数字が自由に入る. そのような乱数の総数は $\binom{5}{2} \times 9^3 = 10 \times 9^3$. よって, 求める確率は

$$\frac{10 \times 9^3}{10^5} = \frac{729}{10^4}.$$

(3) 数字 i がちょうど 2 個だけ含まれる事象を B_i とおく. $P(B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_9)$ を求めればよい. ここで, 異なる 3 個の B_i, B_j, B_k の共通部分は空であるから,

$$P(B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_9) = \sum_{k=0}^9 P(B_k) - \sum_{0 \leq j < k \leq 9} P(B_j \cap B_k)$$

$P(B_j \cap B_k) = P(B_0 \cap B_1)$ である. $B_0 \cap B_1$ は 0 がちょうど 2 個, 1 がちょうど 2 個含まれる乱数の全体であるから,

$$|B_0 \cap B_1| = 8 \times \frac{5!}{2!2!1!} = 240.$$

よって,

$$P(B_j \cap B_k) = \frac{240}{10^5} = \frac{24}{10^4}$$

したがって,

$$\begin{aligned} P(B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_9) &= \sum_{k=0}^9 P(B_k) - \sum_{0 \leq j < k \leq 9} P(B_j \cap B_k) \\ &= 10 \times \frac{729}{10^4} - 45 \times \frac{24}{10^4} = \frac{729}{10^3} - \frac{1080}{10^4} = \frac{621}{10^3} \end{aligned}$$

(4) 少なくとも 2 つの数字がちょうど 1 回現れるので, 次の 3 通りの場合がある.

(i) 2 つの数字がちょうど 1 回現れるもの. たとえば, 01222

(ii) 3 つの数字がちょうど 1 回現れるもの. たとえば, 01233

(ii) 5つの数字がちょうど1回現れるもの. たとえば, 01234

(i) のパターンの乱数は

$$\binom{10}{2} \times 8 \times \frac{5!}{1!1!3!} = 7200$$

個ある. (ii) のパターンの乱数は

$$\binom{10}{3} \times 7 \times \frac{5!}{1!1!1!2!} = 50400$$

個ある. (iii) のパターンの乱数は

$$\binom{10}{5} \times 5! = 30240$$

個ある. よって, 求める確率は,

$$\frac{7200 + 50400 + 30240}{10^5} = \frac{87840}{10^5} = \frac{8784}{10000} = \frac{549}{625}$$