(火曜 4 限, 尾畑)

数理統計学・期末試験問題 (2016.01.26)

- **[1]–[7] は必答. [8]–[9] から 1 題だけを選択解答せよ.** (100 点満点)
- 電卓などの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] (必答) 1 本の棒をランダムに折って 2 本に分割してできる長い方の長さが, 短い方の 2.5 倍以上になる確率を求めよ. 用いた確率モデルを説明してから答えよ. (10 点)

[2] (必答) 2 変量 (x, y) について 4 個のデータが得られた: $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$. x を説明変数, y を目的変数とする線形回帰モデルを最小二乗法で求めよ. (10 点)

[3] (必答) 大規模な選抜試験が実施され, 上位 4%が合格となる. 試験の結果, 平均点は 64 点, 標準偏差は 9 点であった. 受験者全体の得点分布は正規分布であると仮定して, 合格するための最低点を求めよ. (10 点)

[4] (必答) 2 つの事象 E, F は独立であって, $P(E) = \dfrac{1}{2}$, $P(F) = \dfrac{1}{3}$ がわかっている. (10 点)

(1) $P(E \cup F)$ を求めよ.

(2) 条件付確率 $P(E \cap F^c | E \cup F)$ を求めよ. ただし, F^c は F の余事象である.

[5] (必答) ある国では, 病気 A の感染者は 100 人に 2 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 90%に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう. ある人がこの検査を受けて陽性反応が出た. この人が感染者である確率を求めよ. (10 点)

[6] (必答) 「100 万世帯に対して番組 A の視聴率調査を行った. 600 世帯を無作為抽出して視聴率 22.1% が得られたので, 標準的な計算によって, 信頼係数 95% の信頼区間 $22.1 \pm 3.3\%$ が導かれた 」このことに関して以下の問に答えよ. (20 点)

(1) ここでいう信頼区間とは何か? 確率論にもとづく導出を説明して, その意味するところを述べよ.

(2) 信頼係数 95% を保ったまま, 信頼区間の幅をより狭く $22.1\% \pm 1.1\%$ のように精度を高めるためには, どうすればよいか? 理由も合わせて述べよ.

[7] (必答) ある食品の製造ラインでは, 製品 100g 中に含まれる砂糖が 2.00g になるように調整している. 一方, この工場の工程から, 砂糖の含有量は標準偏差 0.24g の正規分布であることが経験的に知られている. あるロットから選んだ 16 個の標本は, 平均 2.16g の砂糖を含んでいた. 製造ラインに狂いが生じているかどうかを有意水準 5% の仮説検定で判定せよ. 有意水準 1% ではどうか? (10 点)

[8] (選択) コインは公平といえるかどうかを有意水準 5% の仮説検定によって判定したい. 実際にコインを 256 回投げたところ, 表が 116 回出た. (20 点)

(1) 第 2 種誤り確率について知るところを詳しく述べよ.

(2) 第 2 種誤り確率が 5%以下になるような状況はどのような場合であるか答えよ.

[9] (選択) 中心を O とする半径 1 の円の内部にランダムに 1 点 A を選び, A と O との距離を X とする. X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ と確率密度関数 $f(x)$ を求めよ. 次に, O を中心として A を通る円の面積 $S = \pi X^2$ の平均値 $\mathbf{E}[S]$ と分散 $\mathbf{V}[S]$ を求めよ. (20 点)

付録：標準正規分布表　$P = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学 (2016.01.26 実施) 期末試験解説

[1] 区間 $[0, L]$ からどの点も同等の確率で点を選ぶと考え, 選ばれた点が区間 $[a, b]$ に含まれる確率を

$$P([a,b]) = \frac{b-a}{L}$$

で与える確率モデルを考える (他でもよいが, 明示的に述べる必要がある). 求める確率は絵でも描けばすぐわかる: $P = 4/7$.

[2] 求める回帰直線を $y = ax + b$ として, $x = -1, 0, 2, 3$ に対する y の値と $y = 1, 3, 6, 6$ との差を考える.

$$\begin{aligned} Q &= (1-(-a+b))^2 + (3-b)^2 + (6-(2a+b))^2 + (6-(3a+b))^2 \\ &= 14a^2 + 8ab + 4b^2 - 58a - 32b + 82 \end{aligned}$$

そうすると,

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 28a + 8b - 58, \qquad \frac{\partial Q}{\partial b} = 8a + 8b - 32.$$

$\dfrac{\partial Q}{\partial a} = \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 0$ を解いて, $a = 1.3$, $b = 2.7$. したがって, 求める回帰直線は $y = 1.3x + 2.7$. なお, 本問では公式を暗記していることは想定していない.

[3] (1) 得点 X は $X \sim N(64, 9^2)$ となる. $P(X \geq a) = 0.04$ となるような a を求めればよい. 標準正規分布表により, $Z \sim N(0,1)$ なら, $P(Z \geq 1.75) = 0.0401$. したがって,

$$Z = \frac{X-64}{9} \geq 1.75 \quad \Leftrightarrow \quad X \geq 79.75$$

したがって, 79.75 点以上 (80 点以上でも可) とれればよい.

[4] (1) 独立性から $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ となることを用いる. 排反 $(P(E \cup F) = P(E) + P(F))$ と勘違いしないこと.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E)P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(2) まず, $(E \cap F^c) \cap (E \cup F) = E \cap F^c$ を確認する (集合算で計算するか, またはベン図でも描く). そして,

$$P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F) = P(E) - P(E)P(F) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

そうすれば,

$$P(E \cap F^c | E \cup F) = \frac{P((E \cap F^c) \cap (E \cup F))}{P(E \cup F)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

[5] 病気 A に感染している確率と感染していない確率は

$$P(A) = \frac{2}{100}, \qquad P(A^c) = \frac{98}{100}.$$

検査 B に陽性反応を示す確率は, 条件付確率であって,

$$P(B|A) = 0.9 \qquad P(B|A^c) = 0.05$$

ベイズの公式によって,

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}$$
$$=\frac{\frac{2}{100}\times 0.9}{\frac{2}{100}\times 0.9+\frac{98}{100}\times 0.05}=\frac{1.8}{1.8+4.9}=\frac{1.8}{6.7}=0.2686\cdots\approx 26.9\%$$

[6] (1) 教科書を参照のこと.
(2) 95%信頼区間は

$$\bar{X}\pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

で与えられるので, 信頼区間の幅を 1/3 にするためには標本数は 9 倍必要になる.

[7] $H_0: m=2$, $H_1: m\neq 2$, $\alpha=0.05$ によって検定を行う. 16 個の標本平均は $\bar{X}\sim N\left(2,\dfrac{0.24^2}{16}\right)=N(2,0.06^2)$. 規準化して

$$Z=\frac{\bar{X}-2}{0.06}\sim N(0,1).$$

実現値 $\bar{x}=2.16$ を代入して,

$$z=\frac{2.16-2}{0.06}=2.66$$

H_1 から両側検定する. 5%棄却域は $|z|\geq 1.96$. 実現値 $z=2.66$ は棄却域に落ちる. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, コインは公正ではないと判定される.

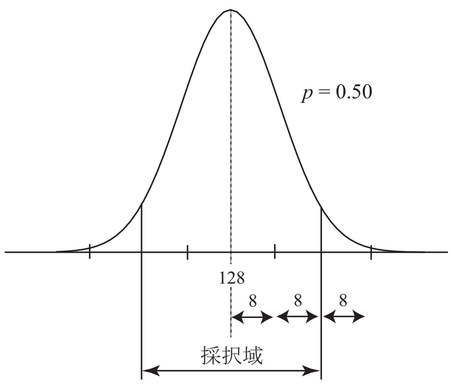
有意水準 $\alpha=0.01$ とすると, 両側検定の 5%棄却域は $|z|\geq 2.58$. 実現値 $z=2.66$ は棄却域に落ちる. したがって, 有意水準 1% でも H_0 は棄却される. 高度に有意と判定される.

[8] $H_0: p=\dfrac{1}{2}$, $H_1: p\neq\dfrac{1}{2}$, $\alpha=0.05$ によって検定を行う. コインを 256 回投げるときの表の回数を X とすると, $X\sim B(256,1/2)\approx N(128,8^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

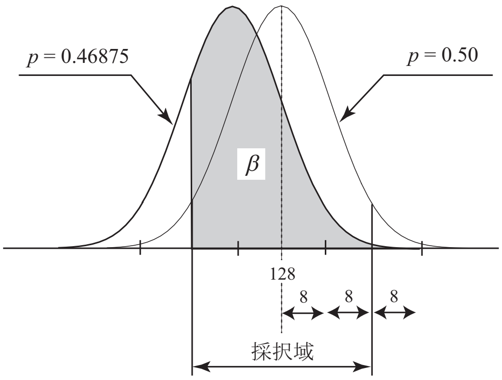
$$W:\left|\frac{x-128}{8}\right|\geq 1.96 \quad\Longleftrightarrow\quad x\leq 128-15.68 \text{ または } 128+15.68\leq x$$

実現値 $\bar{x}=116$ は W に落ちない. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却されず, コインは公正であると判定される. この判定が間違っている確率, すなわち, コインは公正ではないのにもかかわらず公正であると判定してまう確率が第 2 種誤り確率である. コインが公正ではない場合, 可能な p は無限にあり, 第 2 種誤り確率を簡単に評価することはできない.

採択域を図示したものが次の図である. $1.96\approx 2$ として説明すれば十分である.

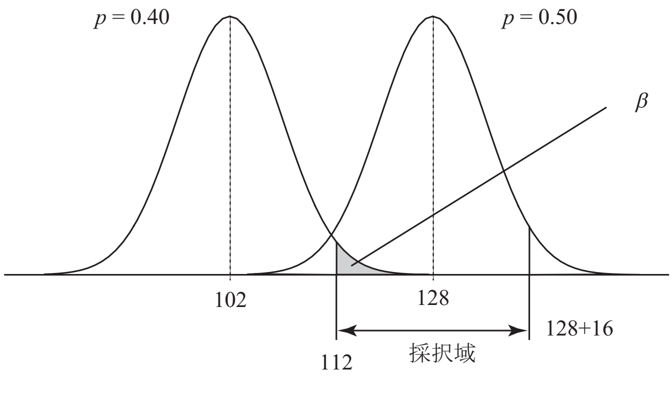


今, 平均値が $120 = 128 - 8$ であるコインを投げていたとする. 逆算して $p = 0.46875$ のイカサマコインということである. $B(256, 0.46875)$ の標準偏差も約 8 として見積もってよい. その分布を重ねて書いたものが次の図である.

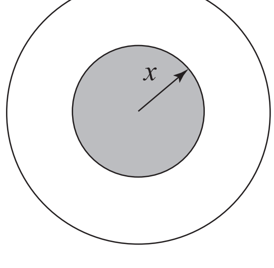


採択域に実現値が現れる確率は, 網掛け部分の面積であり, これが第 2 種誤り確率 β である. 明らかに, $\beta > 0.5$ となるほどに大きい. つまり, 投げているコインがイカサマであっても, 公平なコインに近い $(p = 0.46875)$ 場合は, 仮説検定では公平なコインと判定されがちであり, 第 2 種の誤りを犯しやすいことを言っている.

第 2 種誤り確率が小さい状況とは, 投げているコインのイカサマ度が大きく, その分布が $p = 1/2$ の分布とかけ離れている場合である. たとえば, $p = 0.4$ の分布を書いて, 採択域に実現値が出る確率を見積もると 5% 以下である. つまり, $\beta \leq 0.05$ である.



[9]



題意から X は $0 \leq X \leq 1$ の範囲の値をとるから, $x < 0$ では $F(x) = 0$, $x \geq 1$ では $F(x) = 1$ である. そこで, $0 \leq x \leq 1$ とする. $X \leq x$ はランダムに選んだ 1 点と中心 O との距離が x 以下となることを

意味するが, それはランダム点が O を中心とする半径 x の円板から選ばれたことと同値である. したがって,

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2.$$

以上まとめて,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

これを微分したものが確率密度関数である:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

これを用いて,

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[\pi X^2] = \int_0^1 \pi x^2 f(x) dx$$

となる. あとは, 簡単な積分計算である.

$$\mathbf{E}[S] = \pi \int_0^1 2x^3 dx = \frac{\pi}{2}$$

分散のためには, まず,

$$\mathbf{E}[S^2] = \mathbf{E}[\pi^2 X^4] = \int_0^1 \pi^2 x^4 f(x) dx = \pi^2 \int_0^1 2x^5 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

を準備して,

$$\mathbf{V}[S] = \mathbf{E}[S^2] - \mathbf{E}[S]^2 = \frac{\pi^2}{3} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12}$$