第7章　母数の推定 I

— 二項母集団の母比率

7.1　Audience Rating Survey (視聴率調査)

テレビ局では視聴率の獲得にしのぎを削っているようである. 果たして, コンマ以下の数字に意味はあるのだろうか?

2015 年 5 月 25 日 (月) 〜 5 月 31 日 (日) ドラマ (関東地区) 視聴率ベスト 10

番組名	放送局	放送日 放送開始時刻 – 分数	視聴率 (%)*
連続テレビ小説・まれ	ＮＨＫ総合	15/05/26(火) 8:00 - 15	19.6
天皇の料理番	ＴＢＳ	15/05/31(日) 21:00 - 64	14.1
ようこそ、わが家へ	フジテレビ	15/05/25(月) 21:00 - 54	13.4
木曜ドラマ・アイムホーム	テレビ朝日	15/05/28(木) 21:00 - 54	13.1
Dr. 倫太郎	日本テレビ	15/05/27(水) 22:00 - 60	12.3
警視庁捜査一課９係	テレビ朝日	15/05/27(水) 21:00 - 54	11.6
花燃ゆ	ＮＨＫ総合	15/05/31(日) 20:00 - 45	11.0
土曜ワイド劇場・事件 16	テレビ朝日	15/05/30(土) 21:00 - 126	10.2
火曜ドラマ・マザー・ゲーム	ＴＢＳ	15/05/26(火) 22:00 - 54	9.5
木曜劇場・医師たちの恋愛事情	フジテレビ	15/05/28(木) 22:00 - 54	9.3

* ビデオリサーチ社による番組平均世帯視聴率

日本の放送エリアは全部で 32 ありますが, それぞれの放送エリアごとに視聴率調査が行なわれています. ビデオリサーチでは, 関東地区をはじめ全国 27 地区の調査エリアで, PM システムによる調査とオンラインメータシステムによる調査を実施しています. （日本全国をひとつの調査エリアとした視聴率調査は実施していません）また, 調査対象世帯数は, PM システムによる調査の関東地区・関西地区・名古屋地区で 600 世帯, それ以外のオンラインメータシステムによる調査地区は 200 世帯です. (ビデオリサーチ社のウェッブページから. 2015.6 現在)
参考: 藤平芳紀「視聴率の正しい使い方」(朝日新書)

7.2　Sampling (標本抽出)

調査対象の集団 (母集団) に対して, 全数調査が不可能である場合に, その一部分 (標本) を調査して全体の性質を推定することが重要である.

標本を 1 個取り出せば, 観測値 x が 1 個得られる. 観測値は取り出された標本ごとに違った数値となるが, 母集団をよくかき混ぜて無作為に標本を選ぶのなら, 観測値 x の現れ方に母集団

分布が反映する．そこで, 母集団分布に従う確率変数を X として, 観測値 x を X の実現値とみなすことができる．

Random Sampling with Replacement (無作為復元抽出) 母集団から 1 個の標本を無作為に取り出して得られる値は, 母集団分布に従う確率変数である．取り出した標本を元に戻して, 同じ操作で次々に標本を取り出すことにすれば, 1 回目の標本 X_1, 2 回目の標本 X_2, ..., n 回目の標本 X_n のように確率変数の列が得られる．このような標本の取り出し方を**無作為復元抽出**といい, $X_1, X_2, \dots, X_n$ を母集団から得られた n 個の **(無作為) 標本**という．

注意 非復元抽出では毎回の標本調査のあと母集団が変化するが, 母集団が巨大なら「非復元抽出 ≈ 復元抽出」と考えてよい．つまり, 母集団が巨大なら n 個の無作為標本を得たいときに, まとめて n 個を取り出しても実用上の誤差は無視してよい．

Estimate of Population Parameters (母数の推定) 母集団分布そのものを標本調査によって推定することは困難な問題であり, 実用上知りたいのは母集団分布を特徴づける統計量やパラメータである．そのような量を母数と総称する．特に, 母集団分布の平均値を母平均, 分散を母分散と呼ぶ．母平均や母分散などの基本的な母数の推定がこれからのメインテーマである．

7.3 Inference for Binomial Parameter

ある属性 E によって 2 つの集団に分かれているような母集団を**二項母集団**といい, 属性 E をもつ集団の比率 p を母比率という．母比率の推定を扱う．属性 E をもつ個体には数値 1 を, もたない個体には数値 0 を与えると便利．

取り出された大きさ n の標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とおく．各 k に対して,

$$X_k = \begin{cases} 1, & k \text{ 番目の標本が属性 } E \text{ をもつ}, \\ 0, & k \text{ 番目の標本が属性 } E \text{ をもたない}, \end{cases}$$

であり,

$$P(X_k = 1) = p, \qquad P(X_k = 0) = 1 - p$$

が成り立つ．さらに, 無作為復元抽出ということから $X_1, X_2, \dots, X_n$ は独立になる．

一般に, 標本の関数 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ で母数を推定する方式を**点推定**という．母比率の推定には, **標本比率**

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

が用いられている．その根拠は:

(i) 不偏性 $\mathbf{E}[\hat{p}] = p$

(ii) 一致性 $P\Big(\lim_{n\to\infty} \hat{p} = p \Big) = 1$ [大数の法則より]

しかし, 標本の取り方が異なれば $\hat{p}$ の値 (実現値) も変化する (あたりまえ!). さらに, $\hat{p}$ が母比率 p に丁度一致する確率は限りなくゼロに近い. そこで, $\hat{p}$ の変動を評価して, 母平均を信頼度もこめて推定することが重要になる.

7.4 標本比率 $\hat{p}$ の分布

(1) $\sum_{k=1}^{n} X_k$ は二項分布 $B(n,p)$ に従う.

(2) n が大きいとき, $B(n,p)$ は同じ平均と分散をもつ正規分布 $N(np, np(1-p))$ で近似できる. 実用上 $pn \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ ならよい.

(3) したがって, n が大きいときは

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1).$$

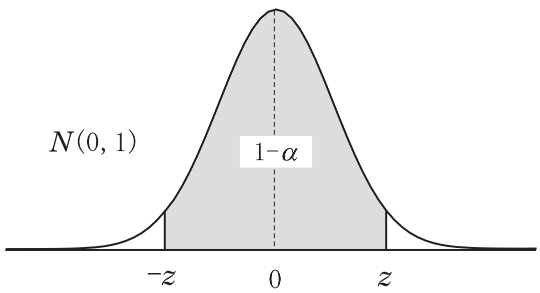
7.5 Interval Estimation of Binomial Parameter

両側 α 点 = 片側 $\alpha/2$ 点 与えられた α に対して, $Z \sim N(0,1)$ (標準正規分布) が

$$P(-z \leq Z \leq z) = 1 - \alpha$$

を満たすような z を $N(0,1)$ の**両側 α 点**という.

z	1.00	1.64	1.96	2.00	2.58	3.00	3.29
α	0.317	0.100	0.050	0.045	0.010	0.003	0.001
$1-\alpha$	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997	0.999



● **二項母集団における母比率の区間推定** 母比率 p に対する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ \right]$$

区間の端点を信頼限界と呼ぶ. 信頼係数としては

$$90\%\,(\alpha = 0.1, z = 1.64) \qquad 95\%\,(\alpha = 0.05, z = 1.96) \qquad 99\%\,(\alpha = 0.01, z = 2.58)$$

などが習慣的に用いられる.

補足 2 次不等式の近似 (詳細は教科書)

$$|\hat{p} - p| \le z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \approx \quad |\hat{p} - p| \le z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

α	1	大	小	0
信頼係数 $(1-\alpha)$	0%	小	大	100%
信頼区間の幅	0 (点推定)	小 (シャープな推定)	大 (アバウトな推定)	∞

信頼区間の意味 標本調査の結果, 観測値 $x_1 \dots, x_n$ が得られたとする (二項母集団のときは, $x_k = 0$ または $= 1$). 標本比率 $\hat{p}$ を計算して, 上の公式を用いると信頼区間が得られる. この**信頼区間が母平均を含んでいるか含んでいないかはどちらかであるが, これはわからない.** コイン投げと同じである. 言えることは, 「確率 $1-\alpha$ で信頼区間は母平均を含み, 確率 α で含まない」ということだけである. 「信頼区間の中点が母比率に近い確率が高い」とか「信頼区間の端の方は母比率から外れている確率が高い」などというのは理論を知らないことさらしているだけだが, 世間には意外と多いので注意.

例 題 7.1 (視聴率調査) 標本数 600 から視聴率の推定値 14.1% が得られた. 信頼係数 95% の信頼区間は,

$$0.141 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.141(1-0.141)}{600}} \approx 0.141 \pm 0.0278$$

例 題 7.2 視聴率調査において, 信頼係数 95% の信頼区間の長さが 0.01 以下になるためには, どれほどの標本数が必要か? [38416]

HW 25 世論調査により 1062 人から回答を得て, 内閣支持率 51% がわかった (NHK 放送文化研究所 2015 年 5 月 8–10 日). 区間推定の考え方を説明しながら, 90% 信頼区間を求めよ.

HW 26 世論調査において, 信頼係数 90% の信頼区間の長さが 0.01 以下になるためには, どれほどの標本数が必要か?

演習問題 11 商店街のスピードくじを 100 回引いたところ, 12 本のあたりを引いた. このスピードくじに含まれている当たりくじの比率の信頼区間を求めよ.

[解答例] 信頼係数 90% とすると,

$$0.12 \pm 1.64 \times \sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{100}} \approx 0.12 \pm 0.053$$

演習問題 12 視聴率調査結果について, 信頼区間を求め, その順位について考察せよ.

第8章　母数の推定 II

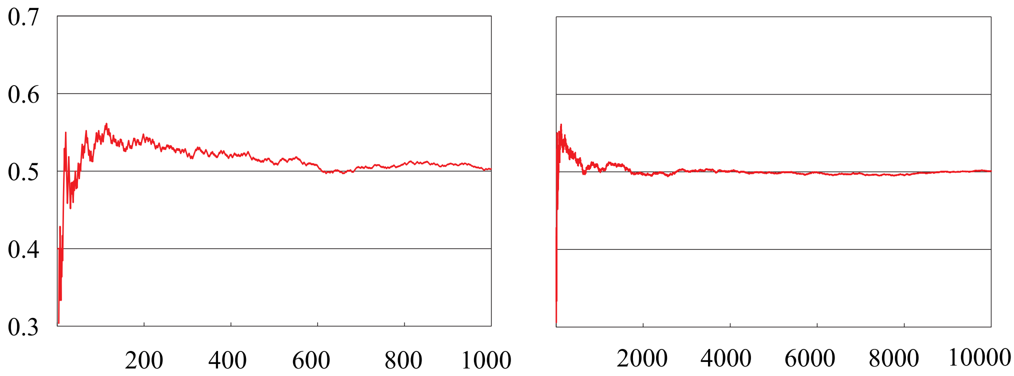
— 母平均と母分散の推定

8.1　Law of Large Numbers (大数の法則)

例 題 8.1 (コイン投げのシミュレーション) いつも通り, コイン投げの結果を表なら 1, 裏なら 0 として数値化する. コインを投げ続けて, その結果 $x_1, x_2, \dots$ に対して

$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

とおく. t_n は初めの n 回のコイン投げで, 表の出た相対頻度である.



定 理 8.2 (Strong law of large numbers (大数の強法則)) $X_1, X_2, \dots$ を独立で同分布な確率変数列とし, その平均値を m とする. このとき,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) = 1$$

8.2　点推定

無作為復元抽出による標本 $X_1, X_2, \dots$ は**独立で同分布な (iid) 確率変数列**となる. 標本平均 $\bar{X}$ が母平均の推定量 (点推定) として適当である根拠として, 次の 2 つの性質がある.

定 理 8.3 (標本平均の一致性) 大きさ n の無作為標本 $\bar{X}$ について,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X} = m\right) = 1$$

定 理 8.4 (標本平均の不偏性) $\mathbf{E}[\bar{X}] = m.$

8.3 Central Limit Theorem (中心極限定理)

定 理 8.5 (中心極限定理) $X_1, X_2, \ldots$ を独立で同分布な確率変数列とし, その平均値を $m=0$, 分散を $\sigma^2=1$ とする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

この事実から, n が十分に大きいとき, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k$ は近似的に $N(0,1)$ に従う.

定 理 8.6 平均値 m, 分散 σ^2 の母集団から取り出した標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n$, それらの標本平均を $\bar{X}$ とする. n が十分大きいとき, 次が近似的に成り立つ:

$$\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

証 明　中心極限定理によって, 規準化された $\displaystyle\frac{X_k - m}{\sigma}$ に対して,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - m}{\sigma} \sim N(0,1)$$

が, 十分大きな n に対して近似的に成り立つ. 左辺を変形して,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(n\bar{X} - nm\right) = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

したがって,

$$\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

∎

8.4 母平均の区間推定 (母分散が既知)

母平均 m (未知), 母分散 σ^2 (既知) をもつ母集団から, 大きさ n の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を取り出す.

● **母平均の区間推定** 母平均 m に対する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は,

$$\left[\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \qquad z \text{ は } N(0,1) \text{ の両側 } \alpha \text{ 点 } (= \text{上側 } \alpha/2 \text{ 点})$$

ただし, $N(0,1)$ の**両側 α 点**とは, $Z \sim N(0,1)$ として $P(-z \leq Z \leq z) = 1-\alpha$ を満たすような z をいう.

z	1.00	1.64	1.96	2.00	2.58	3.00	3.29
α	0.317	0.100	0.050	0.045	0.010	0.003	0.001
$1-\alpha$	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997	0.999

HW 27 ある工場のロットから, ランダムに 200 個の標本を選んで不純物量を測定したとき, 平均 2.2 g の不純物が含まれていた. この工場の工程から, 不純物量の標準偏差は 1.5 g であることが経験的に知られている. このロット全体では, 不純物を平均何 g 含んでいるといえるだろうか? 信頼区間を求めよ. $[1.992, 2.408]$

8.5 母平均の区間推定 (母分散未知の場合)

母平均 m (未知), 母分散 σ^2 (未知) をもつ母集団から, 大きさ n の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を取り出す.

定 義

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

前者を**不偏分散**, 後者を**標本分散**という. (文献によっては, 前者も標本分散と呼んでいるので, いささか混乱するので注意せよ)

定 理 8.7 不偏分散 U^2 は不偏性を満たす: $\mathbf{E}(U^2) = \sigma^2$.

標本分散は不偏性を満たさないので, 母分散の推定量としては不偏分散が優れている. ただし, 標本数 n が大きくなれば, S^2 と U^2 の差はわずかである.

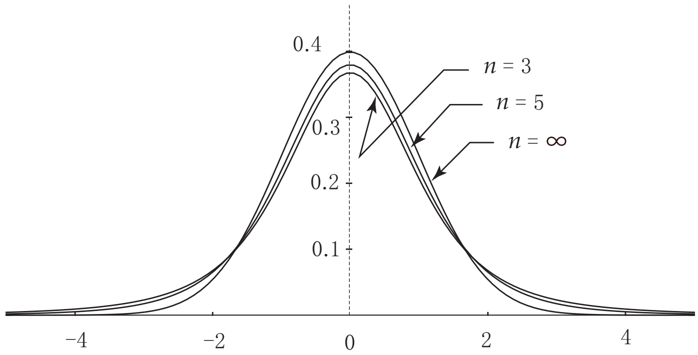
定 理 8.8 正規母集団 $N(m, \sigma^2)$ から取り出した n 個の標本を $X_1, \ldots, X_n$ に対して,

$$T = \frac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{自由度 } (n-1) \text{ の } t\text{-分布}$$

正規母集団でなくとも, 標本数が大きいときは近似として成り立つ.

自由度 n の t-分布

$$\frac{1}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\,\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



補足

(1) Γ はガンマ関数.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x > 0.$$

(2) B はベータ関数.

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

(3) $N(0,1)$ に比べて, すそ野が厚い.

(4) 自由度 $n=\infty$ の t-分布は標準正規分布 $N(0,1)$ に一致する.

(5) 実用上, $n \geq 30$ で標準正規分布 $N(0,1)$ で代用.

● **母平均の区間推定** 母平均 m に対する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は,

$$\left[\bar{X} - t\frac{U}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t\frac{U}{\sqrt{n}}\right], \qquad t \text{ は } t_{n-1} \text{ の両側 } \alpha \text{ 点}$$

例 題 8.9 ある薬品を精製する実験を同一条件下で 8 回行ったところ, 生成物の重量は次のようになった. この方法で得られる生成物の平均重量の 90%信頼区間を求めよ.

32.5　31.8　33.0　32.4　32.2　31.3　32.9　32.1

[$\bar{x} = 32.275$, $u^2 = 0.3135 = 0.56^2$, $t_7 = 1.895$ などから 32.275 ± 0.375]

演習問題 13 ある製品を抜き取り調査してその寿命を測定した結果, 以下の数値を得た. 母集団の平均寿命の 95% 信頼区間を求めよ.

23　42　33　29　34　41　30　36　34　28

[33 ± 4.17]

演習問題 14 ある生産ラインで 1 万個の製品を作った. ランダムに選んだ 40 個の製品の平均重量は 156g であった. この生産ラインの機械的特性から, 生産される製品の重量の標準偏差は 8g である. 生産した 1 万個の製品の平均重量の信頼区間を求めよ.　[95% 信頼区間は 156 ± 2.48]

演習問題 15 演習問題 14 において, 95%信頼区間の幅を 1g 以下にするためには何個の標本をとる必要があるか?　[984]

演習問題 16 (偏差値) 受験者全員の平均点を m, 標準偏差を σ とするとき,

$$(\text{偏差値}) = 50 + 10 \times \frac{x - m}{\sigma}$$

受験者数が多数の時, 得点の分布は正規分布に近いと想定されることが多い. 偏差値は, 20 以下にも 80 以上にもなり得るが, そのような極端な値の出る確率を求めよ.

t **分布表**　　$P(|T| \geq t_n(\alpha)) = \alpha$

$n \backslash \alpha$	0.100	0.050	0.020	0.010
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.645	1.960	2.326	2.576