

27(2015) 年度
数 理 統 計 学

尾 畑 伸 明

東北大学大学院情報科学研究科

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata>

火曜日 4 講時 (C202) 10 月 6 日～

■ 授業の目的と概要

不確実な予測しかできない状況で合理的な意思決定するときに必要なのが、確率・統計のアイデアである。授業では、確率モデルの考え方になじみながら、確率論の基礎概念の理解を深め、統計学への応用を見る。おおむね次のような事柄を取り上げる。学習の到達目標は、基本的な概念や手法を理解し、自ら応用できるようになることにある。

■ 参考書

1. 拙著「数理統計学の基礎」共立出版, 2014.
新しい本。概ねこの本に従って講義する。
2. P. G. ホーエル「入門数理統計学」培風館, 1995.
入門とはいえ、結構高度なところまで親切に記述している良書。
3. 和達三樹・十河清「キーポイント確率統計」岩波書店
システムティックに勉強するのにはあまり適さないが、ここぞというポイントをおさえるヒントになる。
4. 鈴木武・山田作太郎「数理統計学」内田老鶴圃, 1996.
比較的高度な内容を含む網羅的な概説書。進んだ数理統計学の内容が眺められる。

■ さらに視野を広げるために

1. 拙著「確率統計要論」牧野書店, 2007
長年の講義経験をまとめたもので、「数理統計学の基礎」と似た内容も含んでいる。
2. F. フェラー (河田龍夫他訳)「確率論とその応用」紀伊国屋
易しいことから高度なことまで、実に内容豊富。世界中の確率論研究者のバイブル。
3. 逆瀬川浩孝「理工基礎 確率とその応用」サイエンス社
この本はなかなか面白い。講義の題材として取り上げる部分もあるかもしれない。
4. 小川重義・森真「現象から学ぶ確率論入門」講談社サイエンティフィック
性格としては、上の本に似ているが、こちらは確率論の主要概念に主眼がある。
5. G. ブロム, L. ホルスト, D. サンドル (森真訳)「確率論へようこそ」(新装版) シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005.
組合せ確率論の面白い問題がたくさん収められていて、クイズ番組を見るようでとても楽しい本。

6. 楠岡成雄「確率・統計」森北出版
この本は、薄くて手軽に見えるが、ベイズ統計に関する記述はかなり興味深い。
7. 神永正博「ウソを見破る統計学」講談社ブルーバックス
気楽な読み物として、統計学の使われ方を概観する。
8. イアン・ハッキング (石原英樹・重田園江訳)「偶然を飼いなす」木鐸社, 1999.
「この博物誌的な書物を好奇心に満ちたすべての読者に捧げる」とある。確率統計が 20 世紀の科学に中でいかに成功してきたかを科学史的な視点で論ずる。かなり興味深い。
9. 西内啓「統計学が最強の学問である」ダイヤモンド社
統計リテラシーの必要性をジャーナリスティックに説く話題の本。血が沸き立つような書きぶりではあるが、フィッシャー (20 世紀前半の大統計学者) を超えるのは難しい。
10. イアン・ハッキング (広田すみれ・森元良太訳)：確率の出現, 慶應義塾大学出版会, 2013.
11. キース・デブリン (原 啓介訳)：世界を変えた手紙 — パスカル、フェルマーと〈確率〉の誕生, 岩波書店, 2010.
この 2 冊は確率論の始まりをさまざまなエピソードとともに語る。個人的にはカルダーノ (1501–1576) という人物に大変興味がある。
12. ラプラス (伊藤・樋口訳)：確率の解析的理論, 共立.
従来の組合せ論的確率論に微積分を融合した一大発展。確率論の歴史における金字塔。上記の内容を一般向けに解説した啓蒙書「確率の哲学的試論」(岩波文庫) も参考になる。
13. コルモゴロフ (根本訳)：確率論の基礎概念, 東京図書
現代確率論を確立したとされるエポックメイキングな本。

■ 成績評価について

1. 期末試験 (75%位) と平常点 (25%位) により評価する。60 点が合格基準である。なお、過年度の試験問題・レポート問題などは担当者のウェブサイトから閲覧可能。
2. 期末試験：2 月 2 日 (火) (暫定。1 週間早まるかもしれない。) 試験は 1 回だけ実施する。病欠などの特別な事情があれば、公式の手続きによって追試験を行うが、遅刻・欠席 (クラブ活動等の欠席を含む)・成績不良などを理由に再試験を行うことはない。
3. 平常点は、ミニットペーパーの提出・レポートなどによる。

【ミニットペーパー】授業中の小問の解答や質問などを書いて提出。

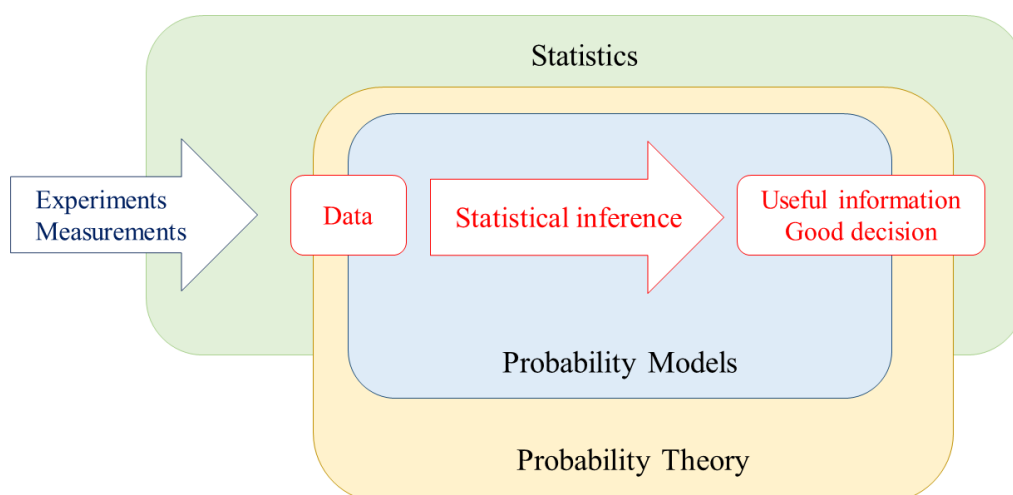
— 教師は学生個々の言語レベルに合わせて話すことはできない。数学の専門用語や記号などで分からないことがあれば、その場で質問するのがよい。が、質問しにくい状況もあるやに思う。というわけで、どんなに稚拙と思われる質問でも遠慮せずに書いてください。できるだけ、次の授業やウェブページで回答する。授業に関係ない質問でも、気が向けば回答する。質問でなくても (気の利いた) コメントを歓迎する (1~2 点)。ただし、代筆が判明した場合 (だいたいすぐばれる)、関係者は全員 0 点とする。

第1章 Probability Spaces



Pierre de Fermat (1601–1665)
and Blaise Pascal (1623–1662)

1.1 Why Probability Models?



- (1) 役に立つ
ランダムサンプリングによる推定論の基礎
不十分なデータから状況予測や意思決定を合理的に行う。
- (2) 様々な偶然現象の統一的理解
抽象理論の強み. ある事例のモデルが, 全く違う現象に応用できる。
- (3) 面白い
確率論は, 数学の中にあって比較的若い分野であり, これからも発展する。

1.2 Probability Space

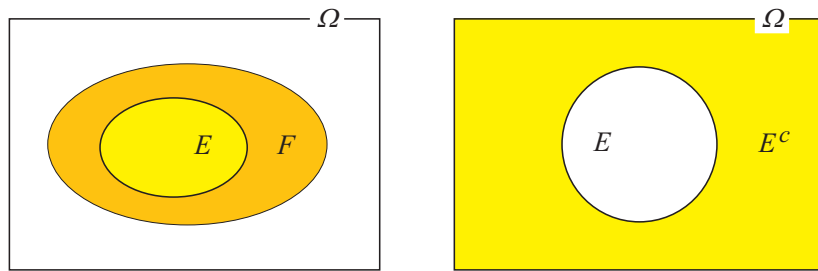
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: sample space (標本空間), events (事象), probability (確率)

- (1) event (事象)

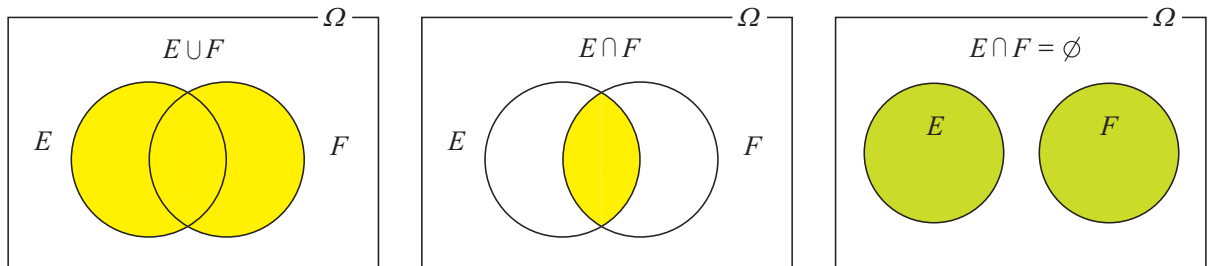
- (2) elementary event or sample point (根元事象または標本点)
- (3) The collection of all elementary events is called the *sample space*.
- (4) An event is a subset of the sample space.
- (5) The probability is given for an event.

Notations

- elementary event (根元事象) $\omega \in \Omega$
- empty event (空事象) $\emptyset$
- whole event (全事象) Ω
- subevent (部分事象) $E \subset F$ ($E = F$ も許す. 不等式 $a < b$ の使い方とは違うので注意!)
- complementary event (余事象) E^c



- union of events (和事象) $E \cup F, E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$
- intersection of events (積事象) $E \cap F, E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$
- disjoint events (排反な事象) $E \cap F = \emptyset$



1.3 Combinatorial Probability

すべての根元事象が等確率で起こるとき (これは議論の前提), E の起こる確率は

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

で与えられる. $|\cdot|$ は集合の元の個数である. 組合せの個数を数え上げて, 比を取る計算に帰着する. これが組合せ確率論の所以である. 当然, Ω は有限集合であることが前提である.

例題 1.1 (Coin-toss) 硬貨を 10 枚投げる時, 表が少なくとも 1 枚出る確率を求めよ. [1023/1024]

例題 1.2 トランプのカード 52 枚から 2 枚を同時に抜き取る時, その 2 枚がともに絵札 (K, Q, J) である確率を求めよ. [11/221]

HW 1 52 枚のトランプから 2 枚を同時に抜き出したとき, 2 枚ともエースになる確率を求めよ. 4 枚を同時に抜き出し 4 枚ともエースになる確率はどうか? [1/221, 1/270725]

● 樹形図の応用

例題 1.3 (Drawing lots) 10 本中あたりが 2 本含まれているくじがある. このくじを 2 人が順に引くとき, 1 番目に引く人があたる確率, 2 番目に引く人があたる確率を求めよ. [2/10. 実は何番目に引いても当たる確率は同じ.]

例題 1.4 (Pascal–Fermat’s division of the stakes) A, B の 2 人がゲームをする. これまでの実績から A の勝つ確率は $2/5$, B の勝つ確率は $3/5$ である. ゲームはどちらかが先に 3 勝した段階で終わり, 賞金 10000 ユーロを受け取る. A が 2 勝, B が 1 勝した段階でゲームを中止することとなった. 賞金はどのように配分するのが公平であるか? 仮想的にゲームを継続して勝敗をつけることで分配金を定めよ. [16 : 9]

例題 1.5 (Monty Hall dilemma) アメリカのテレビで話題になり議論百出 (映画「ラスベガスをぶっとばせ」にもあった). 3 つの扉があり, いずれかの扉の後ろに車 (高級ね) と残りの 2 つの扉の後ろにはヤギがいる. 君はいずれかの扉を選んで, 当たれば車がもらえる. 君は 1 つの扉を選んだ. 司会者は, 「ヒントを差し上げましょう」と言って, 1 つの扉をあけヤギを逃がした (もちろん司会者は車のある扉を開けたりしない). そしてこう言う「今なら扉を選びなおしてもいいですよ」君ならどうする?

HW 2 A, B の 2 人がゲームをする. これまでの実績から A の勝つ確率は p , B の勝つ確率は $q = 1 - p$ である. ゲームはどちらかが先に 4 勝した段階で終わり, 賞金 10000 ユーロを受け取る. A が 2 勝, B が 1 勝した段階でゲームを中止することとなった. 仮想的にゲームを継続したとして, A, B のそれぞれが勝つ確率を計算せよ. [$P(A) = p^2 + 2p^2q + 3p^2q^2$, $P(B) = q^3 + 3pq^2$. もちろん $P(A) + P(B) = 1$ となっている.]

1.4 Infinitely Many Sample Points

例題 1.6 (Ω が可算集合 (番号付けできる無限集合) のとき) バス停に並んでいる人の数, 栗ようかんに含まれる栗の個数など, 個数を問題にすると典型的に現れる. たとえば,

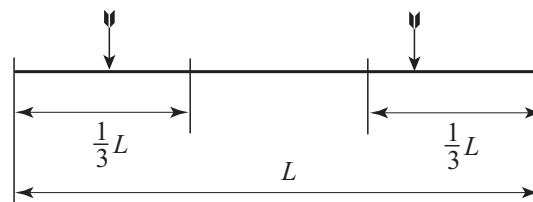
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ただし, $\lambda > 0$ は定数である. これをパラメータ (または平均) λ のポアソン分布という.

注意 根元事象は等確率とは限らない.

HW 3 (マメ知識: ポアソン分布では, 偶数の出る確率は奇数の出る確率より大きい) バス停に並んでいる客の人数がパラメータ λ のポアソン分布に従うとする. その人数が偶数である確率と奇数である確率とではどちらが大きい? [ヒント: 指数関数 e^λ と $e^{-\lambda}$ のテーラー展開]

例題 1.7 (Ω が連続無限集合のとき) 棒をランダムに折って長いほうの断片の長さをはかる. 長いほうの長さは短いほうの2倍以上になる確率. [2/3]



注意 線分から1点を選ぶとき, どの点も同程度の確からしきで選ばれることを想定すると (民主的ですね), 特定の点を選ばれる確率は0になる.

● 確率の定め方の原理 Ω における E の占める割合.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}, \quad |\cdot| \text{ は集合の「大きさ」.}$$

集合の「大きさ」の測り方は様々である. 個数, 長さ, 面積, 体積, ...

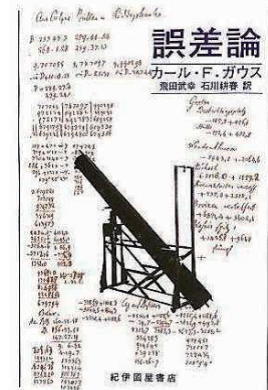
HW 4 棒をランダムに折って2本の断片を作るとき, 長いほうの長さが短いほうの3倍以下になる確率を求めよ. [1/2]

HW 5 地図帳で目的地を探すとき, 目的地がいつもページの端にあって不便な思いをすることが多くないか? 30cm×40cmの地図で, 目的地が周辺5cmの範囲に見つかる確率を求めよ. [1/2]

HW 6 ある2人は正午から午後1時10分前の間に公園に到着し, そこで10分間だけ休憩するのが日課である. ただし, 公園に到着する時刻はお互いにランダムであるとする. この2人が公園で遭遇する確率を求めよ (確率モデルを明確に作り, それをもとに計算すること). [9/25]

演習問題 1 3辺の長さが3, 4, 5の直角三角形の内部に1点 P をランダムに選ぶとき, P と斜辺 (長さ5の辺) との距離が1以下になる確率を求めよ.

第2章 記述統計



2.1 Population and Sample

population (母集団)

sample (標本)

全数調査

標本調査

1変量データ (1次元データ): $x_1, x_2, \dots, x_n$

多変量データ (多次元データ): たとえば, 2次元データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

2.2 1変量データの記述

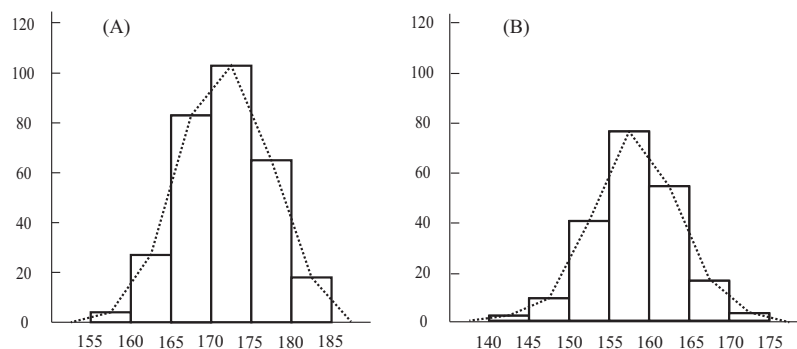
例題 2.1 クラス (A) に所属する 300 名の学生の身長を調べた.

166.3 167.6 175.5 ... 172.5

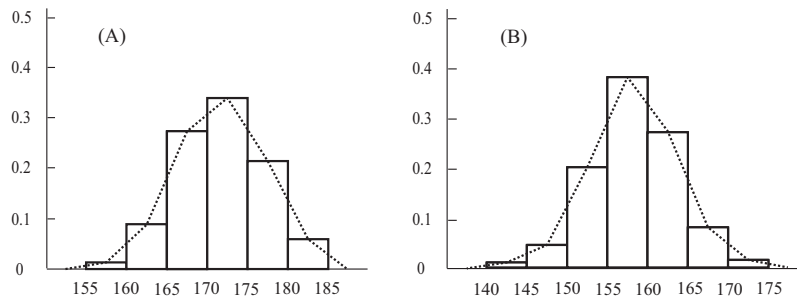
度数分布表

階級	155 -160	160 -165	165 -170	170 -175	175 -180	180 -185	合計
度数	4	27	83	103	65	18	300
相対度数	0.013	0.090	0.277	0.343	0.217	0.060	1.000

ヒストグラムと度数折れ線 (度数多角形)



複数の母集団を比較するときは, 相対度数を用いるのがよい.



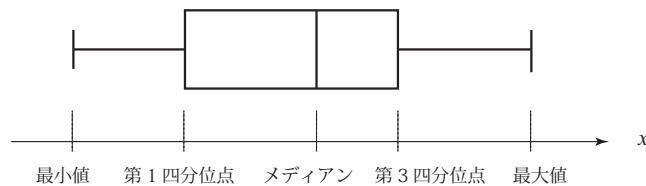
2.3 代表値と分布のばらつき

n 個の観測値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を1つの値で代表させたり, ばらつき方を示したい.

- **mean (平均値):** 相乗平均・調和平均など別の定義もいろいろあるので, はっきり区別したいときは算術平均と呼ぶ.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- **median (中央値):** 観測値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を大きさの順に並べたとき, 順位がちょうど真ん中にある量.
- **mode (最頻値):** 観測値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の中に同じ値が重複して現れる場合, 現れる度数が最も多い観測値. 観測値を度数分布表にまとめたとき, (相対) 度数が最も大きくなる階級の階級値もモードという. モードは2つ以上あることもある.
- **box plot (箱ひげ図):**



- **variance (分散):**

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

- **standard deviation (標準偏差):** 分散の正の平方根

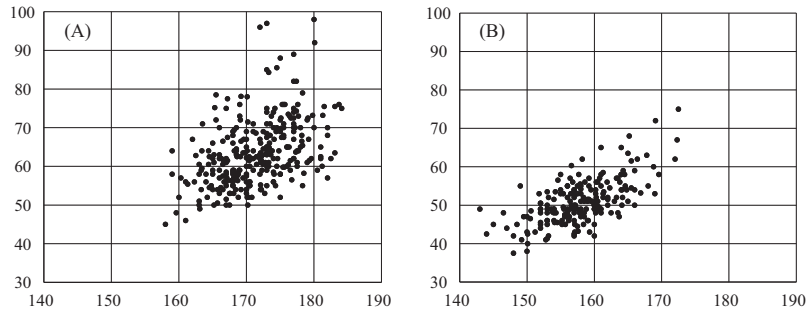
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

変量 x を明示したいときは, σ_x^2 , σ_x のように書く.

2.4 2変量データの記述

scatter diagram (散布図) 2つの変数 x, y を (x, y) として座標平面に図示

例題 2.2 身長 (x) と体重 (y) の散布図. クラス (A) とクラス (B) に対する結果.



covariance (共分散) n 個の 2 変量データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ に対して, 変数ごとの平均値と分散

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

を用いて共分散が定義される:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

(注意) $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. $\sigma_{xx} = \sigma_x^2$ (したがって, 分散を σ_{xx} と書く流儀もある).

correlation coefficients (相関係数)

$$r = r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx}} \sqrt{\sigma_{yy}}}$$

(注意) $r_{xy} = r_{yx}$.

正の相関・負の相関

強い相関・弱い相関・無相関

定義 2.3 (観測値の規準化 (標準化))

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}, \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}$$

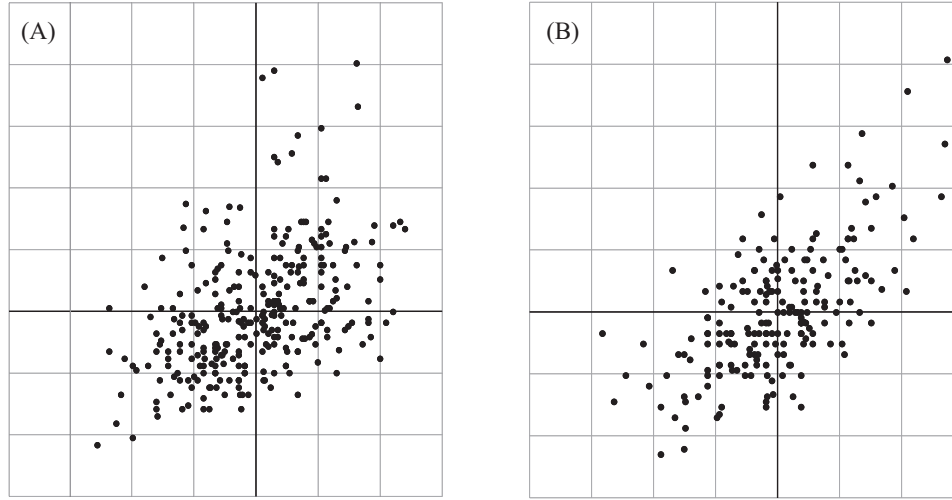
定理 2.4 2変数 x, y に対して, 規準化された変数を $\tilde{x}, \tilde{y}$ とするとき,

$$r_{xy} = \sigma_{\tilde{x}\tilde{y}} = r_{\tilde{x}\tilde{y}} \quad (2.1)$$

が成り立つ. 特に, 変数 x, y の相関係数は, それらを規準化した変数 $\tilde{x}, \tilde{y}$ の共分散に一致する.

定理 2.5 相関係数は $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ を満たす.

例題 2.6 規準化された変数に対する散布図.



	共分散	相関係数
クラス A	20.15	0.45
クラス B	20.23	0.65

HW 7 共分散に関する等式

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

を示せ.

HW 8 2変量データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ が $\sigma_x > 0, \sigma_y > 0$ を満たすものとする. このとき, 散布図が右上がりの直線に乗ることと相関係数が $r = 1$ を満たすことは同値であることを示せ. また, 散布図が右下がりの直線に乗ることと相関係数が $r = -1$ を満たすことは同値であることを示せ.

2.5 Regression Models

2変量データ (x_i, y_i) を関数 $y = f(x)$ を用いて合理的に表したい (x を説明変数, y を目的変数という). 特に, 1次関数

$$y = ax + b$$

で与えるものを **linear regression model** (線形回帰モデル) または y の x への回帰直線という.

● **Method of least squares (最小二乗法)** 1 次関数 $y = ax + b$ を想定して、実際の観測では $x = x_i$ に対する観測値 y_i は偏差をとまって現れると考え、各観測値 (x_i, y_i) に対して偏差 ϵ_i を

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i$$

によって定義する。偏差の平方和

$$Q = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

を最小にするように a, b を定めるのが最小二乗法である。 Q は a, b に関して 2 次関数なので、最小化するのは易しい。偏微分を計算して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= 2an(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) - 2n(\sigma_{xy} + \bar{x}\bar{y}) + 2bn\bar{x}, \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= 2bn - 2n\bar{y} + 2an\bar{x} \end{aligned}$$

が得られる。連立方程式 $\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial b} = 0$ を解くと、解は 1 つだけであって、

$$a_0 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}, \quad b_0 = \bar{y} - a_0\bar{x} \quad (2.2)$$

求めるべき線形回帰モデルは $y = a_0x + b_0$ で与えられる。

定理 2.7 2 変量データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ に対して、 x を説明変数、 y を目的変数とする線形回帰モデルは

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r(x - \bar{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \quad (2.3)$$

で与えられる。また、 y を説明変数、 x を目的変数とする線形回帰モデルは

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} r(y - \bar{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} = r \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} \quad (2.4)$$

で与えられる。ただし、 r は相関係数である。

(注意) 定理に述べた 2 つの回帰モデルは、いずれも平均ベクトル $(\bar{x}, \bar{y})$ の定める点を通るが、それらは一般には一致しない (説明変数と目的変数は対称的な役割にない)。

例題 2.8 クラス A, B に所属する学生の身長 (x) と体重 (y) のデータをもとに線形回帰モデルを作ろう。クラス A について、

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 171.45, \quad \bar{y} = 63.59, \\ \sigma_x^2 &= 27.7557, \quad \sigma_y^2 = 73.3508, \quad \sigma_{xy} = 20.1530 \end{aligned}$$

となっている. したがって, x を説明変数とする線形回帰モデルは,

$$y = 0.73x - 61.57 \quad (2.5)$$

となる. また, y を説明変数とする線形回帰モデルは

$$x = 0.27y + 154.28 \quad (2.6)$$

となる. 回帰直線 (2.6) の傾き $1/0.27 \approx 3.70$ は, 確かに回帰直線 (2.5) の傾きに一致せずそれより大きい. 同様にして, クラス B について計算すると,

$$\bar{x} = 157.98, \quad \bar{y} = 51.05,$$

$$\sigma_X^2 = 28.1218, \quad \sigma_Y^2 = 34.6541, \quad \sigma_{XY} = 20.2323$$

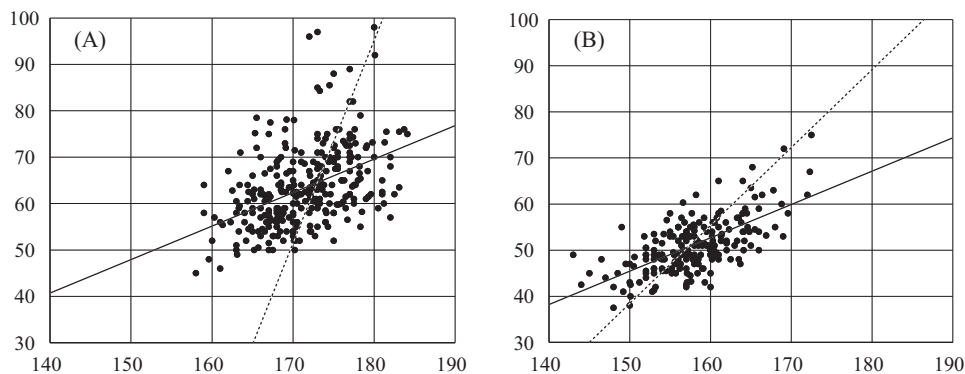
から, x を説明変数とする線形回帰モデルは,

$$y = 0.72x - 62.70$$

となり, y を説明変数とする線形回帰モデルは

$$x = 0.58y + 128.18$$

となる.



HW 9 4つのデータ $(0, 1), (1, 3), (3, 6), (4, 6)$ に対して x を説明変数とする線形回帰モデルを求めよ.

$$[y - 4 = 1.3(x - 2)]$$

演習問題 2 5つの観測量を例示して, 平均値・メディアン・モードの大小関係がさまざま起こり得ることを示せ.

演習問題 3 変数 x, y の共分散と標準偏差に関して, $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$ を示せ.

演習問題 4 2変数 x, y の相関係数 r_{xy} とする. 実定数 a, b に対して, $x' = ax + b$ とおく. ただし, $a \neq 0$ とする. このとき,

$$r_{x'y} = \begin{cases} r_{xy}, & a > 0 \text{ のとき,} \\ -r_{xy}, & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つことを示せ.

第3章 Random Variables



3.1 What is a Random Variable?

ランダム現象の観測結果を数値化したもの

- (1) コインを投げて表が出たら 1, 裏が出たら 0 を対応させる.
- (2) コインを 5 回投げて表の出た回数を数える.
- (3) 棒をランダムに折って長いほうの断片の長さを測る.
- (4) 円の内部から 1 点をランダムに選び, 中心からの距離を測る.

変数と確率変数 ある範囲を動くことが想定されている実数のことを数学用語で (実) 変数という. 文字の使い方は自由ではあるが, 変数には $x, y, z, t, \dots$ などがよく用いられる. たとえば, $0 \leq x \leq 1$ とあれば, x は 0 以上 1 以下の範囲にある実数を代表する変数と理解される. ランダム現象の観測値は, 偶然の影響のために定数ではなく, ある範囲を動く変数となる. しかも, どの値が出やすく, どの値が出にくいといった確率的な傾向が付加されている. このような変数を確率変数という. 習慣によって, 確率変数には $X, Y, Z, T, \dots$ のように大文字を用いる.

離散型確率変数と連続型確率変数

3.2 Distributions of Discrete Random Variables

例題 3.1 コインを 3 回投げて, 表の出る回数を X とする. X は $\{0, 1, 2, 3\}$ の範囲を動く確率変数である. このとき,

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{8},$$

が成り立つ. このように X の取りうる値それぞれに対して, それをとる確率を与えることで, X の値の出やすさの確率的な傾向 (確率分布) はすっかり明らかにされる.

離散型確率変数の分布 離散型確率変数 X の取りうる値を網羅して $\{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$ とするとき,

$$P(X = a_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

を与えることで, X の確率分布がわかる. あるいは, このような一覧表 (統計処理でいうヒストグラムに対応する) を X の確率分布という. 当然であるが,

$$p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$$

に注意しよう. ($p_i = 0$ となる a_i は除外してよいが, $p_i = 0$ を許しておく方が便利.)

定義 3.2 離散型確率変数 X のとりうる値を $\{a_1, a_2, \dots\}$ として, $p_i = P(X = a_i)$ とおく. X の平均値 m と分散 σ を次で定義する:

$$\begin{aligned} m = m_X &= \mathbf{E}[X] = \sum_i a_i p_i = \sum_x x P(X = x), \\ \sigma^2 = \sigma_X^2 &= \mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[(X - m)^2] = \mathbf{E}[X^2] - m^2 \\ &= \sum_i (a_i - m)^2 p_i = \sum_i a_i^2 p_i - m^2 \\ &= \sum_x (x - m)^2 P(X = x) = \sum_x x^2 P(X = x) - m^2 \end{aligned}$$

分散の正の平方根

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\mathbf{E}[(X - m)^2]}$$

を標準偏差という.

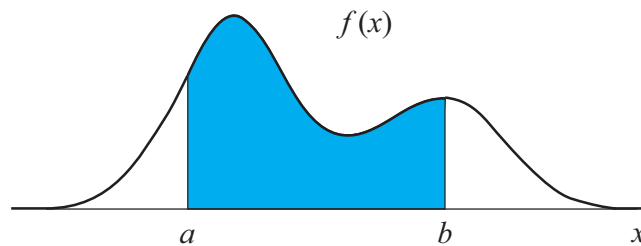
例題 3.3 コインを3回投げるとき, 3回ともに表なら100円, 2回だけ表なら50円, 1回だけなら10円もらえるが, 表が出ないときは80円支払うゲームを考える. このゲームを1回するとき, もらえる金額の平均値と分散を求めよ. $[m = 25, \sigma^2 = 2400, \sigma = 20\sqrt{6}]$

3.3 Distributions of Continuous Random Variables

- (1) 連続型確率変数 X に対しては, 特定の値をとる確率は常に $P(X = a) = 0$.
- (2) そこで, $P(a \leq X \leq b)$ を考えて, それがある関数 $f(x)$ を用いて

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

となることを期待する. このとき, $f(x)$ を X の probability density function (確率密度関数) と呼ばれる.



定義 3.4 X を (離散型または連続型) 確率変数とすると,

$$F(x) = F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbf{R},$$

で定まる関数を X の分布関数という. (注意) 分布関数の定義域は実数全体である.

(1) 連続型確率変数 X の分布関数 $F(x)$ から

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \iff F'(x) = f(x)$$

を満たす $f(x)$ を求める ($F(x)$ は区分的に微分可能であればよい.)

(2) このとき,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つから, $f(x)$ は確率密度関数になる.

(3) 確率密度関数 $f(x)$ は次の性質をもつ.

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

例題 3.5 長さ L の棒をランダムに折ったとき, 長いほうの断片の長さを X とする. X の分布関数と密度関数は次で与えられる:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq L/2, \\ \frac{2x-L}{L}, & L/2 \leq x \leq L, \\ 1, & x \geq L, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq L/2, \\ \frac{2}{L}, & L/2 \leq x \leq L, \\ 0, & x \geq L. \end{cases}$$

定義 3.6 確率密度関数 $f(x)$ をもつ確率変数 X の平均値と分散を次で定義する:

$$\begin{aligned} m = m_X &= \mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \\ \sigma^2 = \sigma_X^2 &= \mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[(X-m)^2] = \mathbf{E}[X^2] - m^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m^2. \end{aligned}$$

分散の正の平方根 $\sigma = \sigma_X$ を標準偏差という.

例題 3.7 (例題 3.5 の続き) 長さ L の棒をランダムに折ってできる, 長いほうの断片の長さを X とする. 確率変数 X の平均値, 分散, 標準偏差を求めよ. $[m = 3L/4, \sigma^2 = L^2/48, \sigma = L/4\sqrt{3}]$

HW 10 長さ L の棒をランダムに折ってできる短いほうの断片の長さを Y とする. 確率変数 Y の分布関数, 密度関数, 平均値, 分散を求めよ.

HW 11 単位円の内部から 1 点をランダムに選んだとき, その点と中心との距離 X は連続型の確率変数になる. この X の分布関数, 密度関数, 平均値, 分散を求めよ.

3.4 Covariance and Correlation Coefficients

定義 3.8 2つの確率変数 X, Y に対して, **covariance** (共分散) が

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])] = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

で定義される. さらに, **correlation coefficient** (相関係数) が次で定義される:

$$r_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_{XX}} \sqrt{\sigma_{YY}}}$$

定理 3.9 相関係数は $-1 \leq r_{XY} \leq 1$ を満たす.

共分散の計算のためには結合分布が必要.

例題 3.10 サイコロを2個投げて出た目のうち大きい方 (同じ目のときはその目) を X , 小さい方 (同じ目のときはその目) を Y とする. X, Y のとり得る値について確率を求めて表にしたものが結合分布.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	合計
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
合計	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

$$\mathbf{E}[X] = \frac{161}{36}, \quad \mathbf{E}[Y] = \frac{91}{36}, \quad \mathbf{V}[X] = \mathbf{V}[Y] = \frac{2555}{36^2}, \quad \text{Cov}(X, Y) = \frac{1225}{36^2}, \quad r = \frac{35}{73}$$

HW 12 サイコロを4回投げるとき, 1の目の出る回数を X , 6の目の出る回数を Y とする. X, Y の相関係数を求めよ. [$r_{XY} = -1/5$]

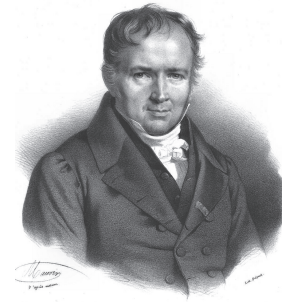
演習問題 5 サイコロを2個投げて出た目のうち大きい方 (同じ目のときはその目) を X , 小さい方 (同じ目のときはその目) を Y とする. X と Y の平均値と分散を求めよ. [例題 3.10]

演習問題 6 中心を O とする半径 R の円の内部にランダムに1点を選び, その点を通る中心を O とする円の面積を X とする. X の分布関数, 密度関数, 平均, 分散を求めよ.

演習問題 7 確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に対して, 次の等式を示せ:

$$\mathbf{V} \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}[X_k] + \sum_{j \neq k} \text{Cov}(X_j, X_k).$$

第4章 基本的な離散分布



Siméon-Denis Poisson (1781–1840)

4.1 Binomial Distribution (二項分布)

表が出る確率が p であるコインを n 回投げたとき, 表の出る回数 X の分布

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

を二項分布といい, $B(n, p)$ で表す. 特に, $B(1, p)$ を成功確率 p のベルヌーイ分布という.

例題 4.1 $B(4, 1/2)$ と $B(4, 1/4)$ を図示せよ.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{4}{2^4}$	$\frac{6}{2^4}$	$\frac{4}{2^4}$	$\frac{1}{2^4}$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{81}{4^4}$	$\frac{108}{4^4}$	$\frac{54}{4^4}$	$\frac{12}{4^4}$	$\frac{1}{4^4}$

4.2 Geometric Distribution (幾何分布)

表が出る確率が p であるコインを投げ続けるとき, 表が初めて出るまでに出た裏の回数 X の分布は

$$P(X = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

この分布をパラメータ p の幾何分布という. (待ち時間の分布として重要)

補注 文献によっては, 表が出る確率が p であるコインを投げ続けるとき, 表が初めて出るまでに要したコイン投げの回数 (表が出た回も 1 回と数える) Y の分布を幾何分布といっている.

$$P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

4.3 Poisson Distribution (ポアソン分布)

確率変数 X がパラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布に従うとは,

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

例題 4.2 $\lambda = 2$ のときのポアソン分布を図示せよ. $\lambda = 0.5, \lambda = 1$ の場合はどうか?

k	0	1	2	3	4	...
$P(X = k)$	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	...

例題 4.3 (栗ようかんに入っている栗の個数) 1 本当たり 3 個の栗が行き渡るように材料を調整して, 大鍋で栗ようかんを作った. 大鍋を適当にかき混ぜて, 大きな柄杓で 1 本分をすくい取るとき, (1) その 1 本に全く栗が入っていない確率を求めよ. [0.05] (2) 栗が 5 個以上入っている確率を求めよ. [0.18]

定理 4.4 (ポアソンの少数の法則) 二項分布 $B(n, p)$ は $np = \lambda$ (これは平均値である) を保ったまま, $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ とすると, パラメータ λ のポアソン分布に収束する.

HW 13 50 名のクラスに 5 月 5 日生まれの学生は何人くらいいるだろうか? 1 年を 365 日として, どの日に生まれる確率も同じと仮定すると, 5 月 5 日生まれの学生の人数 X は二項分布 $B(50, 1/365)$ に従う. ポアソンの少数の法則を用いて, $P(X = k)$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) を計算せよ. [厳密値は次の通り: 0.87182, 0.11976, 0.00806, 0.00035, 0.00001]

4.4 Mean and Variance

確率分布	平均値 (m)	分散 (σ^2)
ベルヌイ分布 (2 点分布) $B(1, p)$	p	$p(1 - p)$
二項分布 $B(n, p)$	np	$np(1 - p)$
幾何分布 (パラメータ p)	$(1 - p)/p$	$(1 - p)/p^2$
ポアソン分布 (パラメータ λ)	λ	λ

例題 4.5 (確率母関数) $\{0, 1, 2, \dots\}$ に値をとる離散型確率変数 X に対して,

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k)$$

を X の (または X の確率分布の) 確率母関数という. このとき,

$$\mathbf{E}(X) = G'(1), \quad \mathbf{E}(X^2) = G''(1) + G'(1), \quad \mathbf{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2.$$

このことを用いて, 二項分布の平均値と分散を求めよ.

HW 14 「ナンバーズ 3 ストレート」では 000~999 の数を 1 つ指定する. 掛け金は 200 円であり, 当たればしかるべき賞金がもらえる. 週 5 日毎日買ったとして, 当たるまでの平均待ち時間 (週) を求めよ.

HW 15 確率母関数を用いて, 幾何分布とポアソン分布の平均値と分散を求めよ.

第5章 基本的な連続分布



5.1 Uniform Distribution (一様分布)

区間 $[a, b]$ からどの点も同等な確からしきで1点を選ぶときのモデルとして現れる.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

5.2 Exponential Distribution (指数分布)

ランダム到着の待ち時間をモデル化するときに現れる. $\lambda > 0$ を定数として

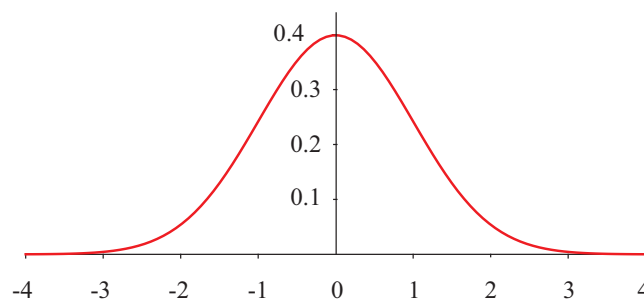
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

5.3 Normal Distribution (正規分布)

$N(m, \sigma^2)$: 平均 m , 分散 σ^2 の正規分布 (またはガウス分布)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$N(0, 1)$: 標準正規分布



● 他に, χ^2 -(カイスクエア) 分布, t -分布, F -分布 (後出)

HW 16 $X \sim N(0, 1)$ のとき, X^2 の分布関数 $F(x) = P(X^2 \leq x)$ を正規分布の密度関数を用いて表示せよ. 次に, $F(x)$ を微分して, X^2 の密度関数を導け.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

5.4 Mean and Variance

確率分布	平均値 (m)	分散 (σ^2)
$[a, b]$ 上の一様分布	$(a + b)/2$	$(b - a)^2/12$
指数分布 (パラメータ λ)	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正規分布 $N(m, \sigma^2)$	m	σ^2

HW 17 積分を計算して, 上の表を確認せよ. ただし, 正規分布に関しては, 次の公式 (重積分の応用として有名) を用いよ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

5.5 Standard Normal Distribution $N(0, 1)$

例題 5.1 確率変数 Z の分布が標準正規分布である (このことを $Z \sim N(0, 1)$ と書く) とする. 標準正規分布表を用いて,

- (1) 次の確率を求めよ. $P(Z \leq 1.15)$, $P(Z \leq -1.23)$, $P(|Z| < 2.4)$
- (2) 次の等式が成り立つような a を求めよ.

$$P(Z \geq a) = 0.33, \quad P(Z < a) = 0.75, \quad P(|Z| \geq a) = 0.4$$

[(1) 0.8749, 0.1093, 0.9836; (2) 0.44, 0.67, 0.84]

定理 5.2 (標準化あるいは規準化) $X \sim N(m, \sigma^2)$ のとき,

$$aX + b \sim N(am + b, a^2\sigma^2), \quad \text{特に, } Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

例題 5.3 $X \sim N(2, 5^2)$ のとき, $P(X \leq 0)$, $P(|X| \geq 4)$ を求めよ.

HW 18 確率変数 X が正規分布 $N(20, 4^2)$ に従うとき, $P(X > 17.8)$ を求めよ. [0.7088]

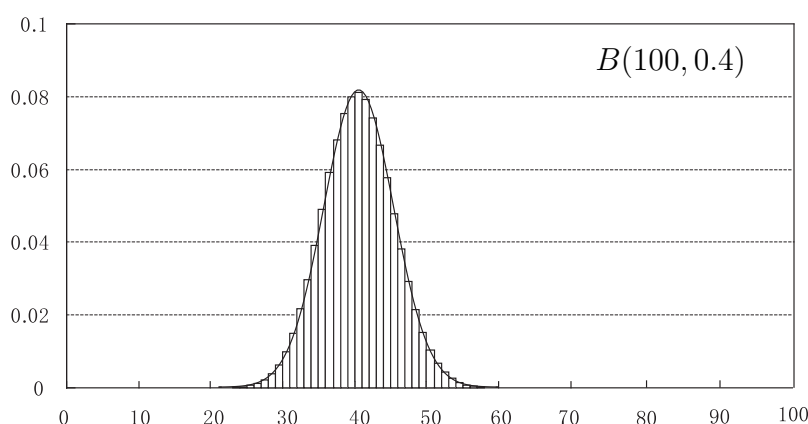
HW 19 $X \sim N(50, 10^2)$ のとき, $P(X > a) = 0.985$ を満たす a を求めよ. [28.3]

HW 20 大規模な選抜試験が実施され, 上位 5% が合格となる. 試験の結果, 平均点は 68 点, 標準偏差が 8 点であった. 受験者全体の得点分布は正規分布であると仮定できるとして, 合格するための最低点を求めよ. [81.16 点あるいは 82 点]

補足 表にない値は (線形) 補間法で求める. つまり, $x = x_1$ のとき $y = y_1$, $x = x_2$ のとき $y = y_2$ はわかっているとき, $x_1 < x < x_2$ に対する y 値は次式で与える:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

5.6 De Moivre–Laplace Theorem



定理 5.4 二項分布は, 同じ平均と分散をもつ正規分布で近似できる.

$$B(n, p) \approx N(np, np(1 - p)), \quad 0 < p < 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

例題 5.5 公平なコインを 400 回投げたとき, 表が 225 回以上出る確率を正規分布近似を用いて求めよ (連続補正 (半目補正) に注目).

HW 21 ある大学では過去のデータによると, 入学試験の合格者のうち 4% が入学を辞退するという. 1000 人の定員のところ 1050 人を合格にすると, 定員割れを起こす確率を求めよ. [0.0901]

演習問題 8 サイコロを 60 回投げるとき, 1 の目が 12 回以上出る確率を求めよ. 次に, サイコロを 600 回投げるとき, 1 の目が 120 回以上出る確率を求め, 先の答と比較せよ.

標準正規分布表 $I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第6章 Conditional Probability



6.1 Conditional Probability

定義 6.1 A, B を2つの事象とする. $P(A) > 0$ のとき,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

を A の下での B の条件付確率という. 事象 A が起こったことを知った上で, 事象 B の起こる確率と解釈される.

例題 6.2 (Drawing lots) 箱の中に10本のくじが入っていて, そのうち2本が当たりとなっている. 2人が順番に1本ずつくじを引くとき, 先に引くのが有利か, 後のほうが有利か?

例題 6.3 サイコロを2個振って出る目のうち大きい方を X , 小さい方を Y とする (同じ目が出た場合は $X = Y$ とする). $P(X \geq 5|Y = 2)$ と $P(X + Y \geq 8|X \geq 4)$ を求めよ. $[4/9, 5/9]$

HW 22 2つの事象 E, F に対して, $P(E) = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$ がわかっている. 次の確率を求めよ.

$$P(E^c), \quad P(E \cap F^c), \quad P((E \cup F^c)^c), \quad P(E|F), \quad P(E|F^c), \quad P(E \cap F|E \cup F)$$

6.2 Independence of Events

定義 6.4 2つの事象 A, B が独立であるとは,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

を満たすときにいう. 事象の有限または無限列 $A_1, A_2, \dots$ が独立であるとは, そこから取り出した任意有限個の事象 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_n$) に対して

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_n})$$

が成り立つときにいう.

定理 6.5 $P(A) > 0$ とするとき, 2つの事象 A, B が独立であるための必要十分条件は $P(B) = P(B|A)$ である.

例題 6.6 壺の中に 112, 121, 211, 222 という番号のついた 4 個の玉が入っている. この壺から 1 個の玉を取り出して番号を読むとき, 1 位の数字が 1 である事象を A_1 , 10 位の数字が 1 である事象を A_2 , 100 位の数字が 1 である事象を A_3 とする. A_1, A_2, A_3 のいずれの 2 つも独立であるが, 3 つの事象は独立ではない.

HW 23 A, B, C が独立で, $P(A) = a, P(B) = b, P(C) = c$ とする. 次の確率を a, b, c を用いて表せ.

$$P(A \cap B^c), \quad P(A \cup B), \quad P(A \cup B \cup C), \quad P(A|B \cup C)$$

6.3 Bayes' Formula

定理 6.7 (Bayes' formula) $\Omega = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 = \emptyset$ のとき, 任意の事象 B に対して,

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

「結果から原因を知る公式」として解釈される.

例題 6.8 (1) ある国では, 病気 A の感染者は 500 人に 2 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 95% に陽性反応を示すが, 非感染者の 2% にも陽性反応が出てしまう. ある人がこの検査を受けて陽性反応が出た. この人が感染者である確率を求めよ.

(2) 次に, 非感染者の 100 p % に陽性反応が出ると一般化して, この検査を受けて陽性反応が出た人が感染者である確率を求めよ. この確率が p とともにどのように変化するかを考察せよ.

HW 24 ある地域では, 病気 A の感染者は 1000 人に 2 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 90% に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出るという.

(1) この検査を受けて陽性反応が出た人が感染者である確率を求めよ. [0.0348...]

(2) この検査を受けて陰性反応が出た人が非感染者である確率を求めよ. [0.9997...]

演習問題 9 (無記憶性) (1) T を幾何分布に従う確率変数とすると,

$$P(T \geq m + n | T \geq m) = P(T \geq n), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

(2) T を指数分布に従う確率変数とすると,

$$P(T \geq a + b | T \geq a) = P(T \geq b), \quad a, b \geq 0.$$

演習問題 10 (条件付き確率は直感にあわないかも) 1 から 10 の番号が付いている 10 枚のチケットがある. このうち 1 番と 2 番が当たりくじとなっている. 一郎は 4 枚のチケットを買った.

(1) 一郎が「1 番をもっている」と告げたとき, 残りの 6 枚にあたりが残っている確率を求めよ. [2/3]

(2) 一郎が「少なくとも 1 枚の当たりをもっている」と告げたとき, 残りの 6 枚にあたりが残っている確率を求めよ. [4/5]

第7章 母数の推定 I

— 二項母集団の母比率



7.1 Audience Rating Survey (視聴率調査)

テレビ局では視聴率の獲得にしのぎを削っているようである。果たして、コンマ以下の数字に意味はあるのだろうか？

2015年5月25日(月)～5月31日(日) ドラマ(関東地区) 視聴率ベスト10

番組名	放送局	放送日 放送開始時刻 - 分数	視聴率 (%)*
連続テレビ小説・まれ	NHK総合	15/05/26(火) 8:00 - 15	19.6
天皇の料理番	TBS	15/05/31(日) 21:00 - 64	14.1
ようこそ、わが家へ	フジテレビ	15/05/25(月) 21:00 - 54	13.4
木曜ドラマ・アイムホーム	テレビ朝日	15/05/28(木) 21:00 - 54	13.1
Dr. 倫太郎	日本テレビ	15/05/27(水) 22:00 - 60	12.3
警視庁捜査一課9係	テレビ朝日	15/05/27(水) 21:00 - 54	11.6
花燃ゆ	NHK総合	15/05/31(日) 20:00 - 45	11.0
土曜ワイド劇場・事件16	テレビ朝日	15/05/30(土) 21:00 - 126	10.2
火曜ドラマ・マザー・ゲーム	TBS	15/05/26(火) 22:00 - 54	9.5
木曜劇場・医師たちの恋愛事情	フジテレビ	15/05/28(木) 22:00 - 54	9.3

* ビデオリサーチ社による番組平均世帯視聴率

日本の放送エリアは全部で32ありますが、それぞれの放送エリアごとに視聴率調査が行なわれています。ビデオリサーチでは、関東地区をはじめ全国27地区の調査エリアで、PMシステムによる調査とオンラインメータシステムによる調査を実施しています。（日本全国をひとつの調査エリアとした視聴率調査は実施していません）また、調査対象世帯数は、PMシステムによる調査の関東地区・関西地区・名古屋地区で600世帯、それ以外のオンラインメータシステムによる調査地区は200世帯です。（ビデオリサーチ社のウェブページから、2015.6現在）

参考：藤平芳紀「視聴率の正しい使い方」（朝日新書）

7.2 Sampling (標本抽出)

調査対象の集団(母集団)に対して、全数調査が不可能である場合に、その一部分(標本)を調査して全体の性質を推定することが重要である。

標本を1個取り出せば、観測値 x が1個得られる。観測値は取り出された標本ごとに違った数値となるが、母集団をよくかき混ぜて無作為に標本を選ぶのなら、観測値 x の現れ方に母集団

分布が反映する．そこで，母集団分布に従う確率変数を X として，観測値 x を X の実現値とみなすことができる．

Random Sampling with Replacement (無作為復元抽出) 母集団から 1 個の標本を無作為に取り出して得られる値は，母集団分布に従う確率変数である．取り出した標本を元に戻して，同じ操作で次々に標本を取り出すことにすれば，1 回目の標本 X_1 , 2 回目の標本 $X_2, \dots, n$ 回目の標本 X_n のように確率変数の列が得られる．このような標本の取り出し方を**無作為復元抽出**といい， $X_1, X_2, \dots, X_n$ を母集団から得られた n 個の**(無作為) 標本**という．

注意 非復元抽出では毎回の標本調査のあと母集団が変化するが，母集団が巨大なら「非復元抽出 $\approx$ 復元抽出」と考えてよい．つまり，母集団が巨大なら n 個の無作為標本を得たいときに，まとめて n 個を取り出しても実用上の誤差は無視してよい．

Estimate of Population Parameters (母数の推定) 母集団分布そのものを標本調査によって推定することは困難な問題であり，実用上知りたいのは母集団分布を特徴づける統計量やパラメータである．そのような量を母数と総称する．特に，母集団分布の平均値を母平均，分散を母分散と呼ぶ．母平均や母分散などの基本的な母数の推定がこれからのメインテーマである．

7.3 Inference for Binomial Parameter

ある属性 E によって 2 つの集団に分かれているような母集団を**二項母集団**といい，属性 E をもつ集団の比率 p を母比率という．母比率の推定を扱う．属性 E をもつ個体には数値 1 を，もたない個体には数値 0 を与えると便利．

取り出された大きさ n の標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とおく．各 k に対して，

$$X_k = \begin{cases} 1, & k \text{ 番目の標本が属性 } E \text{ をもつ,} \\ 0, & k \text{ 番目の標本が属性 } E \text{ をもたない,} \end{cases}$$

であり，

$$P(X_k = 1) = p, \quad P(X_k = 0) = 1 - p$$

が成り立つ．さらに，無作為復元抽出ということから $X_1, X_2, \dots, X_n$ は独立になる．

一般に，標本の関数 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ で母数を推定する方式を**点推定**という．母比率の推定には，**標本比率**

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

が用いられている．その根拠は:

(i) 不偏性 $\mathbf{E}[\hat{p}] = p$

(ii) 一致性 $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{p} = p\right) = 1$ [大数の法則より]

しかし、標本の取り方が異なれば $\hat{p}$ の値 (実現値) も変化する (あたりまえ!). さらに、 $\hat{p}$ が母比率 p に丁度一致する確率は限りなくゼロに近い。そこで、 $\hat{p}$ の変動を評価して、母平均を信頼度もこめて推定することが重要になる。

7.4 標本比率 $\hat{p}$ の分布

- (1) $\sum_{k=1}^n X_k$ は二項分布 $B(n, p)$ に従う。
- (2) n が大きいとき、 $B(n, p)$ は同じ平均と分散をもつ正規分布 $N(np, np(1-p))$ で近似できる。実用上 $pn \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ ならよい。
- (3) したがって、 n が大きいときは

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \iff \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1).$$

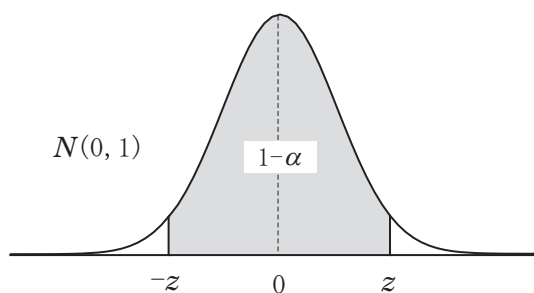
7.5 Interval Estimation of Binomial Parameter

両側 α 点 = 片側 $\alpha/2$ 点 与えられた α に対して、 $Z \sim N(0, 1)$ (標準正規分布) が

$$P(-z \leq Z \leq z) = 1 - \alpha$$

を満たすような z を $N(0, 1)$ の両側 α 点という。

z	1.00	1.64	1.96	2.00	2.58	3.00	3.29
α	0.317	0.100	0.050	0.045	0.010	0.003	0.001
$1 - \alpha$	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997	0.999



● 二項母集団における母比率の区間推定 母比率 p に対する信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間

$$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

区間の端点を信頼限界と呼ぶ. 信頼係数としては

$$90\% (\alpha = 0.1, z = 1.64) \quad 95\% (\alpha = 0.05, z = 1.96) \quad 99\% (\alpha = 0.01, z = 2.58)$$

などが習慣的に用いられる.

補足 2 次不等式の近似 (詳細は教科書)

$$|\hat{p} - p| \leq z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx |\hat{p} - p| \leq z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

α	1	大	小	0
信頼係数 $(1 - \alpha)$	0%	小	大	100%
信頼区間の幅	0 (点推定)	小 (シャープな推定)	大 (アバウトな推定)	∞

信頼区間の意味 標本調査の結果, 観測値 $x_1, \dots, x_n$ が得られたとする (二項母集団のときは, $x_k = 0$ または $= 1$). 標本比率 $\hat{p}$ を計算して, 上の公式を用いると信頼区間が得られる. この信頼区間が母平均を含んでいるか含んでいないかはどちらかであるが, これはわからない. コイン投げと同じである. 言えることは, 「確率 $1 - \alpha$ で信頼区間は母平均を含み, 確率 α で含まない」ということだけである. 「信頼区間の中点が母比率に近い確率が高い」とか「信頼区間の端の方は母比率から外れている確率が高い」などというのは理論を知らないことさらしているだけだが, 世間には意外と多いので注意.

例題 7.1 (視聴率調査) 標本数 600 から視聴率の推定値 14.1% が得られた. 信頼係数 95% の信頼区間は,

$$0.141 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.141(1-0.141)}{600}} \approx 0.141 \pm 0.0278$$

例題 7.2 視聴率調査において, 信頼係数 95% の信頼区間の長さが 0.01 以下になるためには, どれほどの標本数が必要か? [38416]

HW 25 世論調査により 1062 人から回答を得て, 内閣支持率 51% がわかった (NHK 放送文化研究所 2015 年 5 月 8–10 日). 区間推定の考え方を説明しながら, 90% 信頼区間を求めよ.

HW 26 世論調査において, 信頼係数 90% の信頼区間の長さが 0.01 以下になるためには, どれほどの標本数が必要か?

演習問題 11 商店街のスピードくじを 100 回引いたところ, 12 本のあたりを引いた. このスピードくじに含まれている当たりくじの比率の信頼区間を求めよ.

[解答例] 信頼係数 90% とすると,

$$0.12 \pm 1.64 \times \sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{100}} \approx 0.12 \pm 0.053$$

演習問題 12 視聴率調査結果について, 信頼区間を求め, その順位について考察せよ.



第8章 母数の推定 II

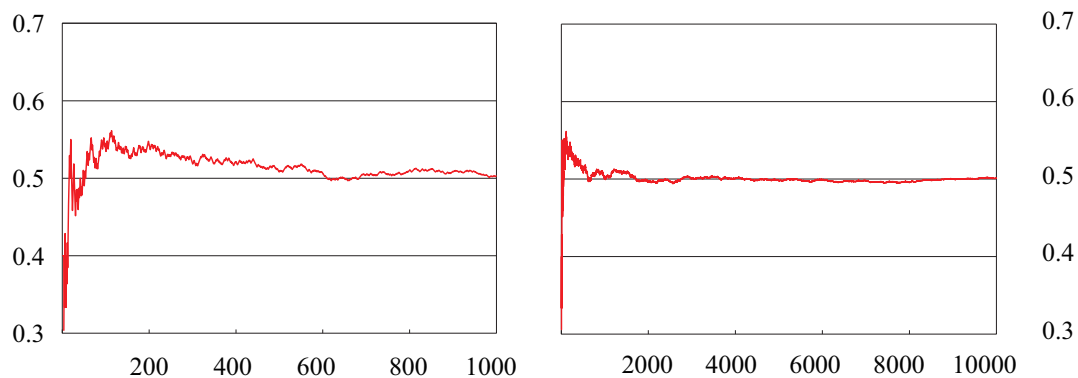
— 母平均と母分散の推定

8.1 Law of Large Numbers (大数の法則)

例題 8.1 (コイン投げのシミュレーション) いつも通り, コイン投げの結果を表なら 1, 裏なら 0 として数値化する. コインを投げ続けて, その結果 $x_1, x_2, \dots$ に対して

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

とおく. t_n は初めの n 回のコイン投げで, 表の出た相対頻度である.



定理 8.2 (Strong law of large numbers (大数の強法則)) $X_1, X_2, \dots$ を独立で同分布な確率変数列とし, その平均値を m とする. このとき,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = m\right) = 1$$

8.2 点推定

無作為復元抽出による標本 $X_1, X_2, \dots$ は独立で同分布な (iid) 確率変数列となる. 標本平均 $\bar{X}$ が母平均の推定量 (点推定) として適当である根拠として, 次の 2 つの性質がある.

定理 8.3 (標本平均の一致性) 大きさ n の無作為標本 $\bar{X}$ について,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} = m\right) = 1$$

定理 8.4 (標本平均の不偏性) $E[\bar{X}] = m$.

8.3 Central Limit Theorem (中心極限定理)

定理 8.5 (中心極限定理) $X_1, X_2, \dots$ を独立で同分布な確率変数列とし, その平均値を $m = 0$, 分散を $\sigma^2 = 1$ とする. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \leq x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

この事実から, n が十分に大きいとき, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k$ は近似的に $N(0, 1)$ に従う.

定理 8.6 平均値 m , 分散 σ^2 の母集団から取り出した標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$, それらの標本平均を $\bar{X}$ とする. n が十分大きいとき, 次が近似的に成り立つ:

$$\bar{X} \sim N \left(m, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

証明 中心極限定理によって, 規準化された $\frac{X_k - m}{\sigma}$ に対して,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

が, 十分大きな n に対して近似的に成り立つ. 左辺を変形して,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (X_k - m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (n\bar{X} - nm) = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

したがって,

$$\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{X} \sim N \left(m, \frac{\sigma^2}{n} \right).$$

8.4 母平均の区間推定 (母分散が既知)

母平均 m (未知), 母分散 σ^2 (既知) をもつ母集団から, 大きさ n の標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を取り出す.

● 母平均の区間推定 母平均 m に対する信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間は,

$$\left[\bar{X} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], \quad z \text{ は } N(0, 1) \text{ の両側 } \alpha \text{ 点 (= 上側 } \alpha/2 \text{ 点)}$$

ただし, $N(0, 1)$ の両側 α 点とは, $Z \sim N(0, 1)$ として $P(-z \leq Z \leq z) = 1 - \alpha$ を満たすような z をいう.

z	1.00	1.64	1.96	2.00	2.58	3.00	3.29
α	0.317	0.100	0.050	0.045	0.010	0.003	0.001
$1 - \alpha$	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997	0.999

HW 27 ある工場のロットから, ランダムに 200 個の標本を選んで不純物量を測定したとき, 平均 2.2 g の不純物が含まれていた. この工場の工程から, 不純物量の標準偏差は 1.5 g であることが経験的に知られている. このロット全体では, 不純物を平均何 g 含んでいるといえるだろうか? 信頼区間を求めよ. [1.992, 2.408]

8.5 母平均の区間推定 (母分散未知の場合)

母平均 m (未知), 母分散 σ^2 (未知) をもつ母集団から, 大きさ n の標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を取り出す.

定義

$$U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

前者を不偏分散, 後者を標本分散という. (文献によっては, 前者も標本分散と呼んでいるので, いささか混乱するので注意せよ)

定理 8.7 不偏分散 U^2 は不偏性を満たす: $\mathbf{E}(U^2) = \sigma^2$.

標本分散は不偏性を満たさない, 母分散の推定量としては不偏分散が優れている. ただし, 標本数 n が大きくなれば, S^2 と U^2 の差はわずかである.

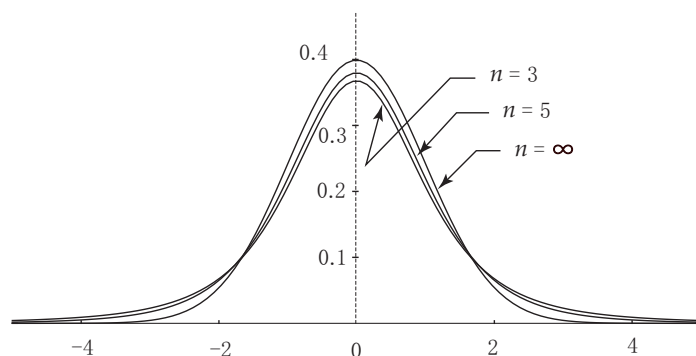
定理 8.8 正規母集団 $N(m, \sigma^2)$ から取り出した n 個の標本を $X_1, \dots, X_n$ に対して,

$$T = \frac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{自由度 } (n-1) \text{ の } t\text{-分布}$$

正規母集団でなくとも, 標本数が大きいときは近似として成り立つ.

自由度 n の t -分布

$$\frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



補足

(1) Γ はガンマ関数.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

(2) B はベータ関数.

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

(3) $N(0, 1)$ に比べて, すそ野が厚い.

(4) 自由度 $n = \infty$ の t -分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ に一致する.

(5) 実用上, $n \geq 30$ で標準正規分布 $N(0, 1)$ で代用.

● 母平均の区間推定 母平均 m に対する信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間は,

$$\left[\bar{X} - t \frac{U}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \frac{U}{\sqrt{n}} \right], \quad t \text{ は } t_{n-1} \text{ の両側 } \alpha \text{ 点}$$

例題 8.9 ある薬品を精製する実験を同一条件下で8回行ったところ, 生成物の重量は次のようになった. この方法で得られる生成物の平均重量の90%信頼区間を求めよ.

32.5 31.8 33.0 32.4 32.2 31.3 32.9 32.1

$[\bar{x} = 32.275, u^2 = 0.3135 = 0.56^2, t_7 = 1.895 \text{ などから } 32.275 \pm 0.375]$

演習問題 13 ある製品を抜き取り調査してその寿命を測定した結果, 以下の数値を得た. 母集団の平均寿命の95%信頼区間を求めよ.

23 42 33 29 34 41 30 36 34 28

$[33 \pm 4.17]$

演習問題 14 ある生産ラインで1万個の製品を作った。ランダムに選んだ40個の製品の平均重量は156gであった。この生産ラインの機械的特性から、生産される製品の重量の標準偏差は8gである。生産した1万個の製品の平均重量の信頼区間を求めよ。 [95% 信頼区間は 156 ± 2.48]

演習問題 15 演習問題14において、95%信頼区間の幅を1g以下にするためには何個の標本をとる必要があるか? [984]

演習問題 16 (偏差値) 受験者全員の平均点を m , 標準偏差を σ とするとき,

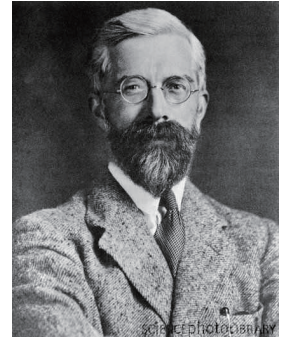
$$(\text{偏差値}) = 50 + 10 \times \frac{x - m}{\sigma}$$

受験者数が多数の時、得点の分布は正規分布に近いと想定されることが多い。偏差値は、20 以下にも 80 以上にもなり得るが、そのような極端な値の出る確率を求めよ。

t 分布表 $P(|T| \geq t_n(\alpha)) = \alpha$

$n \backslash \alpha$	0.100	0.050	0.020	0.010
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.645	1.960	2.326	2.576

第9章 Testing Hypotheses



Sir Ronald Aylmer Fisher (1890–1962)

9.1 仮説検定の基本

1. 母数に関する帰無仮説 (null hypothesis) H_0 と対立仮説 (alternative hypothesis) H_1 を決める.
2. 関連する確率変数 T (検定統計量) を選び, 仮説 H_0 の下で, この確率変数の分布を調べる.
3. 有意水準 (significance level) $0 < \alpha < 1$ と棄却域 (critical region) を決める.
 - 有意水準とは, H_0 が真なのに誤りであると判定してしまう誤り確率のこと. 慣習では, 10%, 5%, 1% などが用いられる.
 - 棄却域とは, T の実現値として稀と判断される領域で, T がその領域に値をとる確率がちょうど α になる ($P(T \in W) = \alpha$) ように決める. 両側検定か片側検定か (これは H_1 で決まる. 明示すること) によって, 棄却域の取り方が異なる.
4. 標本から T の実現値 t を計算し, W に落ちる ($t \in W$) かどうかを判定する.
 - $t \in W$ のとき. 検定統計量 T の実現値が棄却域に落ちたので, H_0 から想定される揺らぎを超えた稀な値が実現したということ. 実現値は「有意水準 α で有意」であり, 「 H_0 を棄却 (reject) し, H_1 を採択 (accept)」する.
 - $t \notin W$ のとき. 実現値 T は棄却域に落ちないので, 「有意水準 α で有意ではない」したがって, 「 H_0 を棄却できない (あるいは, 採択する)」となる.

例題 9.1 コインを 400 回投げたところ, 表が 223 回出た. コインは公正といえるだろうか?

1. このコインで表が出る確率を p とする. 帰無仮説と対立仮説は

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$$

2. 400 回投げて表の出る回数を X とする. H_0 のもとで, $X \sim B(400, 1/2) \approx N(200, 10^2)$. 標準化して,

$$Z = \frac{X - 200}{10} \sim N(0, 1)$$

これを検定統計量とする.

3. 有意水準を $\alpha = 0.05$ とする. 棄却域は, 正規分布曲線の両側から合わせて 5% 分を切り取る (両側検定). 両側 5% 点 (= 上側 2.5% 点) は 1.96 なので,

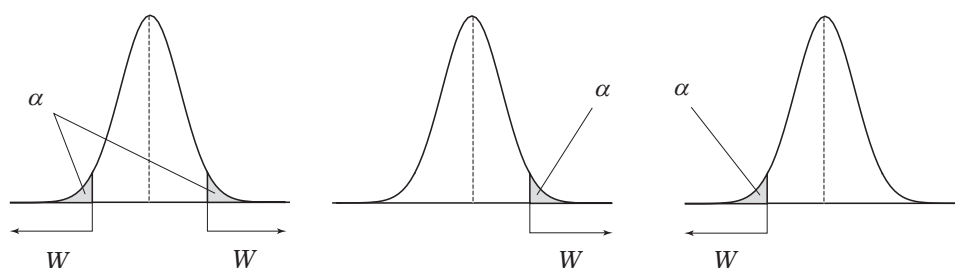
$$W : |z| \geq 1.96$$

4. 実験結果 $x = 223$ から Z の実現値

$$z = \frac{223 - 200}{10} = 2.3$$

が得られる. これは棄却域に落ちるから, H_0 を棄却する. 結論は, 「有意水準 5% の両側検定で H_0 を棄却する」となる. したがって, このコインは公平ではないとの判断に至る.

5. 有意水準 1% では, 両側 1% 点が 2.58 であることより, 実現値 $z = 2.3$ は棄却域に落ちない. 結論は「有意水準 1% の両側検定で H_0 を棄却できない」となる.



参考 : $N(0, 1)$ の両側 α 点

α	0.317	0.100	0.050	0.045	0.010	0.003	0.001
z	1.00	1.64	1.96	2.00	2.58	3.00	3.29
$1 - \alpha$	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997	0.999

9.2 母平均の検定 (母分散既知の場合)

母平均 m , 母分散 σ^2 の母集団から取り出した大きさ n の標本の標本平均について,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \iff \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

ただし, $\sim$ は厳密ではなく, n が大きい時に近似的に成り立つ (近似の根拠は中心極限定理による. 正規母集団 $N(m, \sigma^2)$ なら近似は不要).

例題 9.2 (両側検定) ある機械部品の長さは規格によって 25 mm と定められている。部品の長さの微小な狂いはやむをえないが、規格より長すぎても短すぎても困る。ある製造ラインでは、管理状況から、部品の長さは標準偏差 0.8 mm の正規分布にしたがっているとしてよい。16 個のサンプルで実際に長さを調べたところ長さの平均値は 25.45 mm であった。この製造ラインは適正に部品を作っているといえるだろうか？ [有意水準 5% の両側検定で $H_0: m = 25$ を棄却 (実現値 $2.25 \geq 1.96$)]

例題 9.3 (片側検定) ある工場で使っている機械に新しい部品を採用するかどうか考えている。従来の部品の寿命は 120 時間であるが、新しい部品の寿命はそれを上回るという。そこで、16 個のサンプルで実際に寿命を調べたところ平均寿命は 121.2 時間であった。部品の製造工程の管理状況から、新しい部品の寿命は標準偏差 2.4 時間の正規分布にしたがっているとしてよい。新しい部品を導入する価値があるかどうかを仮説検定で判断せよ。[新しい部品の平均寿命を m とおく。 $H_0: m = 120$ $H_1: m > 120$]

HW 28 (両側検定) コインが公平かどうかを確かめるために、100 回振ったところ表が 62 回出た。このコインは公平であるといえるか。

HW 29 (両側検定) ある調味料の製造ラインでは、各製品の砂糖の含有量は $m = 60$ (g) になるように調整している。しかしながら、原料の不均一や製造ラインの狂いなどから、 m の値は 50 ~ 70 の間を変動するが、これまでの経験から標準偏差は常に一定で $\sigma = 3$ となっている (母分散既知)。ある時点で、製品を 25 個抜き取って、調査したところ、砂糖の含有量の平均値は 61.43 であった。その時点で製造ラインは $m = 60$ を保持していると考えてよいか？

9.3 2種類の過誤 (Two Types of Error)

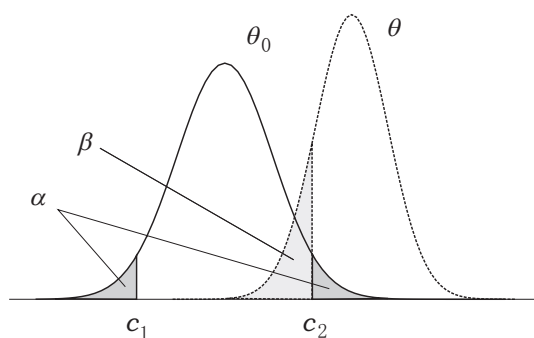
帰無仮説 H_0 をめぐって、次の 4 つの場合がある。

採否 \ 真偽	H_0 は真	H_0 は偽
H_0 を採択	正しい判断	第 2 種の誤り
H_0 を棄却	第 1 種の誤り	正しい判断

α : 第 1 種の誤り (Type I error) 確率 = 有意水準
確率 β : 第 2 種の誤り (Type II error)

第 1 種の誤り = 生産者危険 = あわて者の間違い
第 2 種の誤り = 消費者危険 = ぼんやり者の間違い

例題 9.4 コインを 400 回投げたとき、表が 215 回出た。コインは公正といえるだろうか？ 第 2 種誤り確率について考察せよ。特に、 α と β を同時に小さくはできないことを説明せよ。



注意 検定統計量の実現値が棄却域に落ちない場合、「 H_0 を採択する」とは言うが、はっきり否定するだけの状況ではないという消極的な採択である。「 H_0 が偽なのに採択している」誤りを犯しているかもしれず、その確率 (第2種誤り確率 β) は極めて大きい可能性がある。そこで「 H_0 を棄却できない」という表現も多用される。

定期試験

1. 日時：1月26日(火) 4講時・いつもの講義室
2. 教科書・参考書・ノート・計算機等の持ち込み不可。鉛筆と消しゴムだけで解答する。
3. 期末試験は1回だけ実施し、欠席者・成績不良者に対する再試験はしない。
4. やむを得ない事情(病気、忌引等)で定期試験を欠席し、追試験を希望する者は正規の手続きに従って取り扱う。
5. 配布プリントの「宿題」と「演習問題」を中心に、概念の理解を含めてよく研究しておいてください。なお、過去問等はウェブページに掲載している。

第10章 母平均の検定



William Sealy Gosset (1876–1937)

10.1 母平均の検定 (母分散既知の場合)

●基礎となる理論的結果 母平均 m , 母分散 σ^2 の正規母集団から取り出した大きさ n の標本の標本平均について,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \iff \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

正規母集団でないときは, 近似的に成り立つ (中心極限定理).

10.2 母平均の検定 (母分散未知の場合)

●基礎となる理論的結果 正規母集団 $N(m, \sigma^2)$ から取り出した n 個の標本を $X_1, \dots, X_n$ とするとき, 不偏分散が

$$U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

で定義される. 標本平均 $\bar{X}$ に対して,

$$T = \frac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{自由度 } (n-1) \text{ の } t\text{-分布}$$

例題 10.1 正味 500g と書いてある製品を 120 個選んで調べたところ標本平均 498g, 不偏分散 10^2 g であった. この製品は, 明記されたとおりの内容になっているか?

例題 10.2 (片側検定) ある製造ラインで大量の製品を作っており, その重量は正規分布に従っている. 規定値は 50kg であるが, 製品の平均重量が 50kg を切っているときはラインを直ちに止めて調整する必要がある. ある日に製造された大量の製品から 12 個をサンプリングして重量 (kg) を測定した結果, 平均値 $\bar{x} = 48.6$, 不偏分散 $u^2 = 1.6^2$ を得た. ラインを止める必要があるかを判断せよ. [有意水準 5% の片側検定で $H_0 : m = 50$ を棄却 (実現値 $-3.03 \leq -1.796$)]

HW 30 ある日に製造された大量の製品から 10 個をサンプリングして重量 (kg) を測定した結果,

53.2 61.5 48.1 51.3 55.7 47.2 54.5 57.9 53.8 49.2

となった. 規定値は 50kg であるが, この日に生産した製品の平均重量は規定に沿っているか?

HW 31 ある英語の資格試験の全国平均は 66 点であった. A 塾から 10 名が受験した. 結果は

78 72 65 86 58 64 76 88 74 59

であり, その平均点 72 点が 66 点を大きく上回ると A 塾は主張している. 検定によって A 塾の主張を確認せよ. [有意水準 5% の片側検定で「上回っているとは言えない」]

10.3 P 値 (P-value)

伝統的な仮説検定では, 有意水準 α を示して H_0 の棄却・採択を述べる. が, ユーザーにとって, 実現値が帰無仮説 H_0 からどのくらい外れているかを数量的に詳しく知りたいこともある. 実現値 t に対して, H_0 の下で,

$P =$ 実現値 t を含めて, それ以上に起こりにくい実現値が得られる確率

を実現値 t の P 値という. この値をどう判断するかは, 個別事情によるもので, 数理統計学の枠外の話となる.

HW 32 A 君は公平なコインを作成したつもりだ. 確認のため 80 回振ったところ表が 32 回出た. このコインは公平であるといえるか. P 値を示せ.

HW 33 (片側検定) ある機械部品の寿命は規格によって 250 時間と定められている. ある製造ラインでは, 管理状況から, 部品の長さは標準偏差 2.25 時間の正規分布にしたがっているとしてよい. 25 個のサンプルで実際に長さを調べたところ長さの平均値は 248.8 時間であった. この製造ラインの部品は規格を満たしているといえるだろうか? P 値を示せ.

10.4 母平均の差の検定

定理 10.3 2つの正規母集団 $N(m_1, \sigma_1^2)$, $N(m_2, \sigma_2^2)$ から独立に取り出した大きさ n_1 , n_2 の標本平均を $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ とするとき,

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(m_1 - m_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

例題 10.4 (母分散が既知の場合) ある物質の融点を測定した. 技術者 A は 5 回測定して平均 1264.6 度を得た. 技術者 B は 8 回測定して平均 1263.9 度を得た. 過去の経験によれば A の測定値の標準偏差は 0.7 度, B の測定値の標準偏差は 0.6 度である. さらに 2 人とも測定結果は正規分布に従うとしてよい. 2 人の測定結果に有意の差はあるか検定せよ. [$H_0 : m_1 = m_2$, $H_1 : m_1 \neq m_2$. $z = 1.85$ を得る. 有意水準 5% の両側検定で H_0 は棄却されない.]

HW 34 A 組 36 名, B 組 40 名に同じ試験をしたところ, A 組の平均点は $\bar{x}_A = 64.5$, B 組の平均点は $\bar{x}_B = 61.2$ であった. A 組は B 組よりも成績がよいといえるか. ただし, 成績は両組とも母分散 11^2 の正規分布に従うものとする.

定理 10.5 分散が等しい 2 つの正規母集団 $N(m_1, \sigma^2)$, $N(m_2, \sigma^2)$ から独立に取り出した大きさ n_1, n_2 の標本平均を $\bar{X}_1, \bar{X}_2$, 不偏分散を U_1^2, U_2^2 とする.

$$U^2 = \frac{(n_1 - 1)U_1^2 + (n_2 - 1)U_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

とおくとき,

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) U^2}}$$

は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布に従う.

例題 10.6 (母分散は未知であるが等分散である場合) 2 つの環境 A, B のもとである作物の試験栽培を行った. 環境 A からは 6 個のサンプル, 環境 B からは 8 個のサンプルをとって収穫高を調べた結果は次の通りである.

A : 6.2 6.0 5.9 6.2 6.1 5.8

B : 6.0 5.8 5.7 6.2 6.4 5.9 5.8 6.3

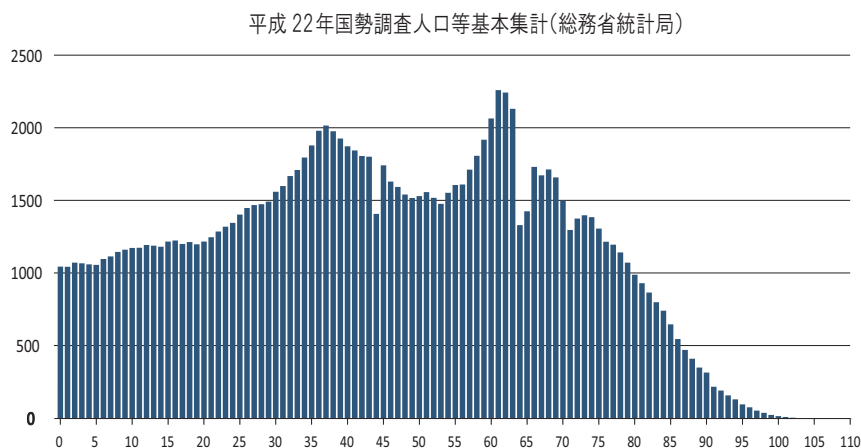
両者の収穫高は同じ分散をもつ正規分布に従うと仮定してよい. 環境 A, B に有意の差はあるか検定せよ. [$\bar{x}_A = 6.0333$, $u_A^2 = 0.1633^2$, $\bar{x}_B = 6.0125$, $u_B^2 = 0.2207^2$, $u^2 = 0.1987^2$, $t = 0.1937$. 一方, t_{12} -分布の上側 2.5% 点は 2.179. 有意水準 5% の両側検定で有意差を認めない.]

10.5 演習問題 (仮説検定)

演習問題 17 ある映画で観客の人数を調べたら, 男 45 人, 女 55 人であった. このことからこの映画は女性に人気が高いと言えるだろうか? 二項母集団の母比率の検定で確かめよ.

演習問題 18 人口 4000 人の町で子供の遊び場をめぐる賛否が割れている. 無作為に選んだ 100 人の意見は, 賛成 38 人, 反対 62 人であった. 町民の過半数が反対と判定してよいだろうか? [有意水準 5% の両側検定すれば「反対」と判定される]

演習問題 19 日本人の平均年齢は 44.5 歳、標準偏差は 23.5 歳である (平成 22 年 10 月). あるサークルのメンバー 25 名の平均年齢は 32 歳である. このサークルは日本人の無作為標本といえるだろうか? 考察せよ.

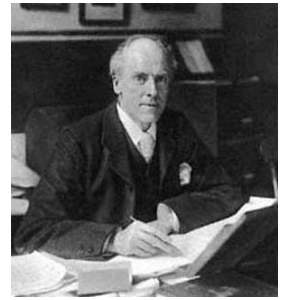


演習問題 20 女子学生 1000 名の学校からランダムに選ばれた 200 人の平均身長は 157.7 cm であった. 全国と同じ年齢の女子の平均値は 158.6 cm, 標準偏差は 4.63 cm である. このクラスの平均身長は全国平均と異なると考えてよい? [有意水準 1% の両側検定で「異なる」と判定される]

演習問題 21 ある食品の製造ラインでは, 製品 100g 中に含まれる砂糖が 2g 以下になるように調整している. ただし, 2g を多少越しても出荷して問題はない. あるロットから選んだ 200 個の標本は, 平均 2.2g の砂糖を含んでいた. 一方, この工場の工程から, 砂糖の含有量の標準偏差は 1.5g であることが経験的に知られている. 製造ラインに狂いが生じているかどうかを判定せよ. [有意水準 5% の片側検定で「狂いが生じているとはいえない」]

演習問題 22 ある工場で作られる製品の不良率は 8% であるという. ある日の結果は, 良品 175 個, 不良品 25 個であった. 生産工程などに異常がないと言ってよいかどうかを仮説検定で判断せよ.

第11章 特論



Karl Pearson (1857–1936)

11.1 分布の適合度検定 (Goodness of Fit Test)

母集団の属性が $A_1, A_2, \dots, A_k$ の k 種類に分けられている. n 個の標本から, それぞれに属するものが $X_1, X_2, \dots, X_k$ 個得られたとする.

属性	A_1	A_2	$\dots$	A_k	合計
理論分布	p_1	p_2	$\dots$	p_k	1
観測度数	X_1	X_2	$\dots$	X_k	n

観測値から, 各属性の現れる理論分布 $p_1, p_2, \dots, p_k$ が妥当かどうかを検定する.

定理 11.1 $m_i = np_i$ とおくとき,

$$\chi_{k-1}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - m_i)^2}{m_i}$$

は, $m_1, \dots, m_k$ が大きいとき ($m_i = np_i \geq 5$), 自由度 $k-1$ のカイ 2 乗分布に近似的に従う.

密度関数が

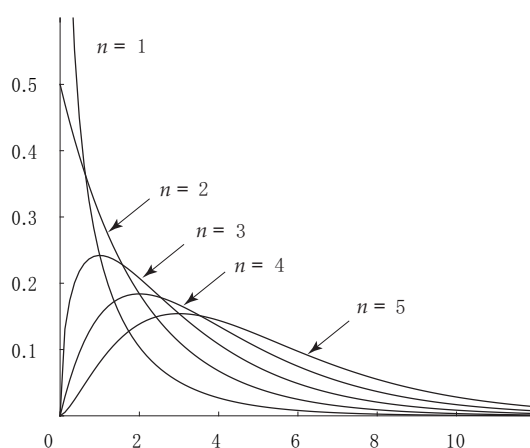
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

で与えられる確率分布を自由度 n のカイ 2 乗分布 (χ^2 -分布) という. (χ^2 は一つの文字として扱う.) 自由度を明記して, χ_n^2 と書くこともある. ここで, $\Gamma(t)$ はガンマ関数.

例題 11.2 (Pearson の χ^2 -検定) 次の表は, サイコロを 120 回投げて出た目を記録したものである. このサイコロは公平と言えるだろうか?

目	1	2	3	4	5	6	合計
回数	24	18	16	22	23	17	120

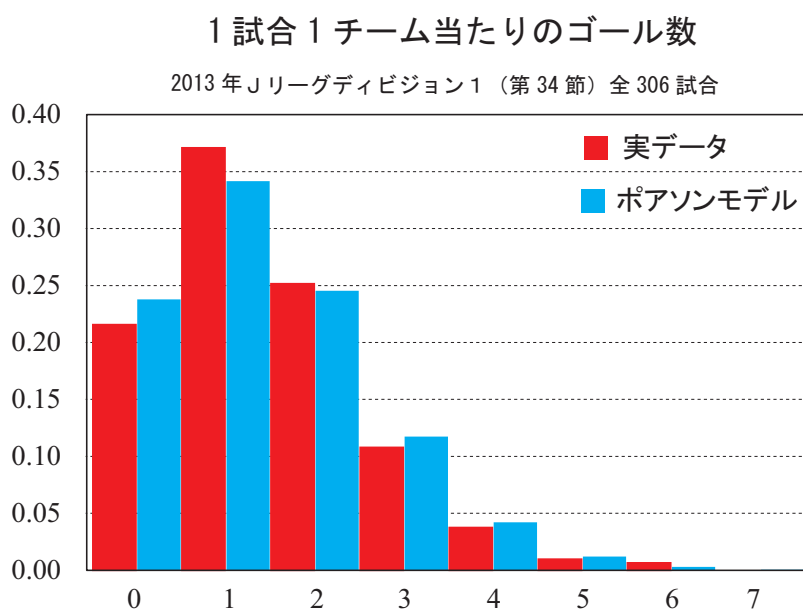
$[\chi^2 = 2.9. \chi_5^2$ -分布の上側 5%点は 11.07. 有意水準 5% でサイコロは公平であると判断する.]



例題 11.3 次の表は、サッカーの試合において、1試合1チーム当たりのゴール数を調べた結果である (2013 年 J リーグ・ディビジョン 1・第 34 節 18 チーム総当たり全 306 試合)。

ゴール数	0	1	2	3	4	5	6	7 以上	合計
試合数	132	227	154	66	23	6	4	0	612
ポアソン分布	0.2379	0.3416	0.2453	0.1174	0.042	0.0121	0.0029	0.0006	1
同上理論予想	145.6	209.1	150.1	71.8	25.8	7.4	1.8	0.4	612

1 試合 1 チーム当たりのゴール数について、平均値は 1.436、分散は 1.367 となっている。パラメータ $\lambda = 1.436$ のポアソン分布による理論値を併記した



- (i) $m_i = np_i \geq 5$ となるようにゴール数を 0, 1, ..., 5 以上の 6 クラスに分ける.
- (ii) ポアソン分布特有の事情によって、自由度 $6 - 1 - 1 = 4$ のカイ 2 乗分布を用いる.

演習問題 23 人口 150 万人のある都市で, 子供を 5 人持つ 3868 家庭を無作為抽出して, 子供 5 人の性別を調べた. この結果から, この都市で, 子供を 5 人持つ家庭では男女の性比が 1:1 であると言えるだろうか? [二項分布と比較する]

男:女	0:5	1:4	2:3	3:2	4:1	5:0	合計
家庭数	92	603	1137	1254	657	125	3868

11.2 最大値の推定

例題 11.4 (ドイツ戦車の問題) 1 番から N 番まで通し番号のついた N 台の戦車がある. どの戦車も同じ頻度で街を巡回している. このうち, 異なる番号の n 台が目撃されたとき, その n 台の番号から, 保有台数 N を推定せよ.

$\{1, 2, \dots, N\}$ から無作為非復元抽出で取り出した n 個の標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ として,

$$M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

とおく. M の確率分布は,

$$P(M = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}, \quad n \leq k \leq N.$$

であり, 平均値は

$$\mathbf{E}[M] = \sum_{k=n}^N k P(M = k) = \frac{n}{n+1} (N+1)$$

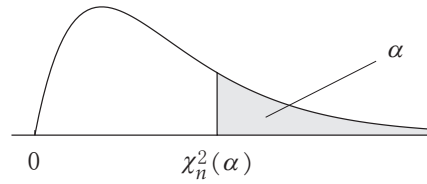
となる [意欲ある方はトライせよ. 特に難しくはない]. したがって,

$$\hat{N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) M - 1$$

は $\mathbf{E}[\hat{N}] = N$ を満たし, $\hat{N}$ は N の不偏統計量になる.

演習問題 24 箱の中に通し番号のついたカードが大量に入っている. ここから数枚を取り出して, 箱の中のカードの枚数を推定したい. どのような方法が考えられるか, さまざまに考察せよ [ドイツ戦車の問題にこだわる必要はない].

カイ・スクエア分布: $P(\chi_n^2 \geq \chi_n^2(\alpha)) = \alpha$



$n \backslash \alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0 ⁴ 393	0.0 ³ 157	0.0 ³ 982	0.0 ² 393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	124.342	129.561	135.807	140.169

値は小数第 4 位以下 ($n = 1$ では表示桁未満) を四捨五入してある。

数理統計学・期末試験問題 (2016.01.26)

- [1]–[7] は必答. [8]–[9] から 1 題だけを選択解答せよ. (100 点満点)
- 電卓などの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] (必答) 1 本の棒をランダムに折って 2 本に分割してできる長い方の長さが, 短い方の 2.5 倍以上になる確率を求めよ. 用いた確率モデルを説明してから答えよ. (10 点)

[2] (必答) 2 変量 (x, y) について 4 個のデータが得られた: $(-1, 1), (0, 3), (2, 6), (3, 6)$. x を説明変数, y を目的変数とする線形回帰モデルを最小二乗法で求めよ. (10 点)

[3] (必答) 大規模な選抜試験が実施され, 上位 4% が合格となる. 試験の結果, 平均点は 64 点, 標準偏差は 9 点であった. 受験者全体の得点分布は正規分布であると仮定して, 合格するための最低点を求めよ. (10 点)

[4] (必答) 2 つの事象 E, F は独立であって, $P(E) = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{1}{3}$ がわかっている. (10 点)

(1) $P(E \cup F)$ を求めよ.

(2) 条件付確率 $P(E \cap F^c | E \cup F)$ を求めよ. ただし, F^c は F の余事象である.

[5] (必答) ある国では, 病気 A の感染者は 100 人に 2 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 90% に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう. ある人がこの検査を受けて陽性反応が出た. この人が感染者である確率を求めよ. (10 点)

[6] (必答) 「100 万世帯に対して番組 A の視聴率調査を行った. 600 世帯を無作為抽出して視聴率 22.1% が得られたので, 標準的な計算によって, 信頼係数 95% の信頼区間 $22.1 \pm 3.3\%$ が導かれた」このことに関して以下の問に答えよ. (20 点)

(1) ここでいう信頼区間とは何か? 確率論にもとづく導出を説明して, その意味するところを述べよ.

(2) 信頼係数 95% を保ったまま, 信頼区間の幅をより狭く $22.1\% \pm 1.1\%$ のように精度を高めるためには, どうすればよいか? 理由も合わせて述べよ.

[7] (必答) ある食品の製造ラインでは, 製品 100g 中に含まれる砂糖が 2.00g になるように調整している. 一方, この工場の工程から, 砂糖の含有量は標準偏差 0.24g の正規分布であることが経験的に知られている. あるロットから選んだ 16 個の標本は, 平均 2.16g の砂糖を含んでいた. 製造ラインに狂いが生じているかどうかを有意水準 5% の仮説検定で判定せよ. 有意水準 1% ではどうか? (10 点)

[8] (選択) コインは公平といえるかどうかを有意水準 5% の仮説検定によって判定したい. 実際にコインを 256 回投げたところ, 表が 116 回出た. (20 点)

- (1) 第 2 種誤り確率について知るところを詳しく述べよ.
- (2) 第 2 種誤り確率が 5% 以下になるような状況はどのような場合であるか答えよ.

[9] (選択) 中心を O とする半径 1 の円の内部にランダムに 1 点 A を選び, A と O との距離を X とする. X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ と確率密度関数 $f(x)$ を求めよ. 次に, O を中心として A を通る円の面積 $S = \pi X^2$ の平均値 $\mathbf{E}[S]$ と分散 $\mathbf{V}[S]$ を求めよ. (20 点)

付録：標準正規分布表 $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学 (2016.01.26 実施) 期末試験解説

[1] 区間 $[0, L]$ からどの点も同等の確率で点を選ぶと考え、選ばれた点が区間 $[a, b]$ に含まれる確率を

$$P([a, b]) = \frac{b - a}{L}$$

で与える確率モデルを考える (他でもよいが、明示的に述べる必要がある). 求める確率は絵でも描けばすぐわかる: $P = 4/7$.

[2] 求める回帰直線を $y = ax + b$ として, $x = -1, 0, 2, 3$ に対する y の値と $y = 1, 3, 6, 6$ との差を考える.

$$\begin{aligned} Q &= (1 - (-a + b))^2 + (3 - b)^2 + (6 - (2a + b))^2 + (6 - (3a + b))^2 \\ &= 14a^2 + 8ab + 4b^2 - 58a - 32b + 82 \end{aligned}$$

そうすると,

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 28a + 8b - 58, \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = 8a + 8b - 32.$$

$\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial b} = 0$ を解いて, $a = 1.3, b = 2.7$. したがって, 求める回帰直線は $y = 1.3x + 2.7$. なお, 本問では公式を暗記していることは想定していない.

[3] (1) 得点 X は $X \sim N(64, 9^2)$ となる. $P(X \geq a) = 0.04$ となるような a を求めればよい. 標準正規分布表により, $Z \sim N(0, 1)$ なら, $P(Z \geq 1.75) = 0.0401$. したがって,

$$Z = \frac{X - 64}{9} \geq 1.75 \quad \Leftrightarrow \quad X \geq 79.75$$

したがって, 79.75 点以上 (80 点以上でも可) とればよい.

[4] (1) 独立性から $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ となることを用いる. 排反 ($P(E \cup F) = P(E) + P(F)$) と勘違いしないこと.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E)P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(2) まず, $(E \cap F^c) \cap (E \cup F) = E \cap F^c$ を確認する (集合算で計算するか、またはベン図でも描く). そして,

$$P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F) = P(E) - P(E)P(F) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

そうすれば,

$$P(E \cap F^c | E \cup F) = \frac{P((E \cap F^c) \cap (E \cup F))}{P(E \cup F)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

[5] 病気 A に感染している確率と感染していない確率は

$$P(A) = \frac{2}{100}, \quad P(A^c) = \frac{98}{100}.$$

検査 B に陽性反応を示す確率は、条件付確率であって,

$$P(B|A) = 0.9 \quad P(B|A^c) = 0.05$$

ベイズの公式によって,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \\ &= \frac{\frac{2}{100} \times 0.9}{\frac{2}{100} \times 0.9 + \frac{98}{100} \times 0.05} = \frac{1.8}{1.8 + 4.9} = \frac{1.8}{6.7} = 0.2686 \cdots \approx 26.9\% \end{aligned}$$

[6] (1) 教科書を参照のこと.

(2) 95%信頼区間は

$$\bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

で与えられるので, 信頼区間の幅を $1/3$ にするためには標本数は 9 倍必要になる.

[7] $H_0: m = 2, H_1: m \neq 2, \alpha = 0.05$ によって検定を行う. 16 個の標本平均は $\bar{X} \sim N\left(2, \frac{0.24^2}{16}\right) = N(2, 0.06^2)$. 規準化して

$$Z = \frac{\bar{X} - 2}{0.06} \sim N(0, 1).$$

実現値 $\bar{x} = 2.16$ を代入して,

$$z = \frac{2.16 - 2}{0.06} = 2.66$$

H_1 から両側検定する. 5%棄却域は $|z| \geq 1.96$. 実現値 $z = 2.66$ は棄却域に落ちる. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, コインは公正ではないと判定される.

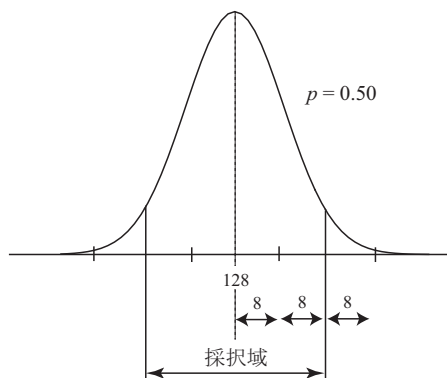
有意水準 $\alpha = 0.01$ とすると, 両側検定の 5%棄却域は $|z| \geq 2.58$. 実現値 $z = 2.66$ は棄却域に落ちる. したがって, 有意水準 1% でも H_0 は棄却される. 高度に有意と判定される.

[8] $H_0: p = \frac{1}{2}, H_1: p \neq \frac{1}{2}, \alpha = 0.05$ によって検定を行う. コインを 256 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(256, 1/2) \approx N(128, 8^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

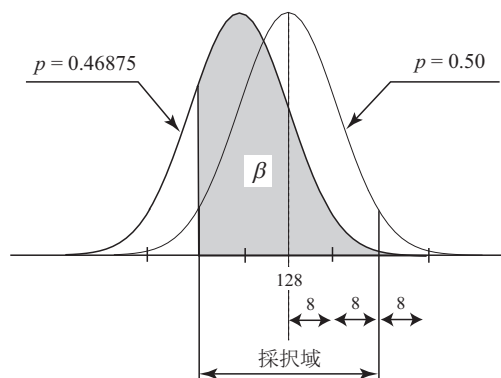
$$W: \left| \frac{x - 128}{8} \right| \geq 1.96 \iff x \leq 128 - 15.68 \text{ または } 128 + 15.68 \leq x$$

実現値 $\bar{x} = 116$ は W に落ちない. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却されず, コインは公正であると判定される. この判定が間違っている確率, すなわち, コインは公正ではないにもかかわらず公正であると判定してしまう確率が第 2 種誤り確率である. コインが公正ではない場合, 可能な p は無限にあり, 第 2 種誤り確率を簡単に評価することはできない.

採択域を図示したものが次の図である. $1.96 \approx 2$ として説明すれば十分である.

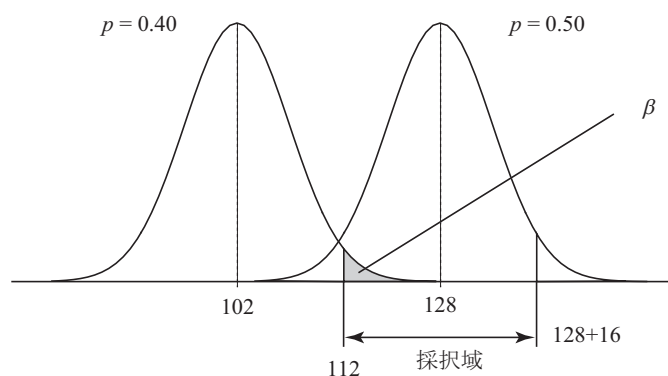


今, 平均値が $120 = 128 - 8$ であるコインを投げていたとする. 逆算して $p = 0.46875$ のイカサマコインということである. $B(256, 0.46875)$ の標準偏差も約 8 として見積もってよい. その分布を重ねて書いたものが次の図である.

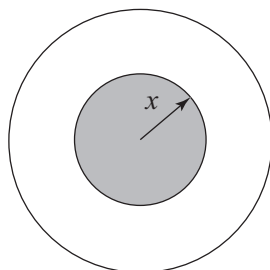


採択域に実現値が現れる確率は, 網掛け部分の面積であり, これが第 2 種誤り確率 β である. 明らかに, $\beta > 0.5$ となるほどに大きい. つまり, 投げているコインがイカサマであっても, 公平なコインに近い ($p = 0.46875$) 場合は, 仮説検定では公平なコインと判定されがちであり, 第 2 種の誤りを犯しやすいことを言っている.

第 2 種誤り確率が小さい状況とは, 投げているコインのイカサマ度が大きく, その分布が $p = 1/2$ の分布とかけ離れている場合である. たとえば, $p = 0.4$ の分布を書いて, 採択域に実現値が出る確率を見積もると 5% 以下である. つまり, $\beta \leq 0.05$ である.



[9]



題意から X は $0 \leq X \leq 1$ の範囲の値をとるから, $x < 0$ では $F(x) = 0$, $x \geq 1$ では $F(x) = 1$ である. そこで, $0 \leq x \leq 1$ とする. $X \leq x$ はランダムに選んだ 1 点と中心 O との距離が x 以下となることを

意味するが、それはランダム点が O を中心とする半径 x の円板から選ばれたことと同値である。したがって、

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2.$$

以上まとめて、

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

これを微分したものが確率密度関数である：

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

これを用いて、

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[\pi X^2] = \int_0^1 \pi x^2 f(x) dx$$

となる。あとは、簡単な積分計算である。

$$\mathbf{E}[S] = \pi \int_0^1 2x^3 dx = \frac{\pi}{2}$$

分散のためには、まず、

$$\mathbf{E}[S^2] = \mathbf{E}[\pi^2 X^4] = \int_0^1 \pi^2 x^4 f(x) dx = \pi^2 \int_0^1 2x^5 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

を準備して、

$$\mathbf{V}[S] = \mathbf{E}[S^2] - \mathbf{E}[S]^2 = \frac{\pi^2}{3} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12}$$