数理統計学・期末試験問題 (2016.07.22)

- **[1]–[6] は必答. [7]–[8] から 1 題だけを選択解答せよ.** (100 点満点)
- 電卓などの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] (必答) サイコロを 2 個投げて出た目の大きい方を X, 小さい方を Y とする. ただし, 同じ目が出たときは, $X = Y$ とする. (5 点 ×2)

(1) 確率 $P(X - Y = 4)$ を求めよ.

(2) 条件付き確率 $P(X - Y \geq 2 | X + Y \leq 9)$ を求めよ.

[2] (必答) 中心を O とする半径 5 の円の内部にランダムに 1 点 A を選び, 点 A と 円周までの最短距離を X とする. (5 点 ×4)

(1) X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ を求め, そのグラフの概形を示せ.

(2) X の確率密度関数 $f(x)$ を求め, そのグラフの概形を示せ.

(3) 平均値 $\mathbf{E}[X]$ を求めよ.

(4) 分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ.

[3] (必答) 大規模な選抜試験が実施され, 上位から 20% までが合格となる. 試験の結果, 平均点は 58 点, 標準偏差は 12 点であった. 受験者全体の得点分布は正規分布であると仮定して, 合格するための最低点を整数で求めよ. (10 点)

[4] (必答) ある国では, 病気 A の感染者は 100 人に 4 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 90%に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう. 次の確率を求めよ (%で表わし, 小数第 2 位を四捨五入せよ). (5 点 ×2)

(1) この検査を受けて陽性反応が出た人が感染者である確率.

(2) この検査を受けて陰性反応が出た人が非感染者である確率.

[5] (必答) 100 万世帯から 600 世帯を無作為抽出して, 番組 A の視聴率調査を行ったところ, 131 世帯が視聴していた. これより, 信頼係数 95% として視聴率の信頼区間 $21.8 \pm 3.3\%$ が導かれた. (5 点 ×2)

(1) ここでいう信頼区間とは何か? 確率論にもとづく導出を説明して, その意味するところを述べよ. 信頼区間の幅をより狭くするにはどうすればよいかも合わせて答えよ.

(2) 信頼係数 99 % の信頼区間を求めよ.

[6] (必答) ある食品の製造ラインでは, 製品 100g 中に含まれる砂糖が 2.50g になるように調整している. あるロットから選んだ 9 個の標本は, 平均 2.32g の砂糖を含んでいた. (10 点 ×2)

(1) この工場の工程から, 砂糖の含有量は標準偏差 0.24g の正規分布であることが経験的に知られている. 製造ラインに狂いが生じているかどうかを有意水準 5% の仮説検定で判定せよ.

(2) 上記の標準偏差が未知のときは, どのように仮説検定をすればよいか, 概略を説明せよ.

[7] (選択) コインを 256 回投げたところ, 表が 140 回出た. このコインが公平かどうかを有意水準 5% の仮説検定によって判定したい. (10 点 $\times 2$)

(1) 「第 2 種誤り確率」の定義を述べて, その基本的な性質を上の問題に即して説明せよ.

(2) 第 2 種誤り確率が 10%以下になるような状況はどのような場合であるか答えよ.

[8] (選択) n, N を自然数で, $1 \leq n \leq N$ を満たすものとする. 1 番から N 番まで通し番号のついた N 枚のカードから, 同時に 4 枚のカードを抜き取り, その中の最大の番号を X とする. (10 点 $\times 2$)

(1) $4 \leq k \leq N$ に対して, 確率 $P(X = k)$ を求めよ.

(2) 平均値 $\mathbf{E}[X]$ を計算せよ.

付録：標準正規分布表　　$P = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学期末試験 (2016.07.22 実施) 解説

[1] $P(X=x, Y=y)$ を一覧表にすると, 以下の通り.

$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6	合計
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
合計	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

(1) $P(X-Y=4) = P(X=6, Y=2) + P(X=5, Y=1) = \dfrac{4}{36}$

(2) まず, $P(X+Y \le 9) = \dfrac{30}{36}$, $P(X-Y \ge 2, X+Y \le 9) = \dfrac{18}{36}$ に注意して,

$$P(X-Y \ge 2 | X+Y \le 9) = \frac{18}{30}$$

[2] (1) $F(x) = P(X \le x)$ であるから, $x < 0$ のとき $F(x) = 0$, $x > 5$ のとき, $F(x) = 1$ となることは明らか. $0 \le x \le 5$ のとき, 面積比によって確率が決まるから,

$$F(x) = \frac{25\pi - (5-x)^2\pi}{25\pi} = 1 - \frac{(5-x)^2}{25} = \frac{2}{5}x - \frac{x^2}{25}$$

(2) $f(x) = F'(x)$ であるから,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(5-x)}{25}, & 0 \le x \le 5, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

(3) 平均値の定義によって,

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^5 \frac{2(5-x)x}{25} dx = \frac{5}{3}.$$

(4) まず,

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^5 \frac{2(5-x)x^3}{25} dx = \frac{25}{6}.$$

したがって,

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{25}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}.$$

[3] 受験者の得点を X, 合格の最低点を a とすれば, $P(X \ge a) = 0.2$ が成り立つ. $X \sim N(58, 12^2)$ であるから,

$$P(X \ge a) = P\left(\frac{X-58}{12} \ge \frac{a-58}{12}\right) = P\left(Z \ge \frac{a-58}{12}\right) = 0.2.$$

ここで, $Z \sim N(0,1)$ である. 標準正規分布表によって, $P(Z \ge 0.84\cdots) = 0.2$ であるから, 求める a は,

$$\frac{a-58}{12} = 0.84\cdots \quad \Longleftrightarrow \quad a = 68.08$$

したがって, 69 点が合格するための最低点である.

[4] A: 感染者である; B: 陽性反応が出る, とすれば,

$$P(A) = \frac{4}{100}, \qquad P(B|A) = 0.9 \qquad P(B|A^c) = 0.05$$

となる.

(1) $P(A|B)$ を求めればよい. ベイズの公式によって,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{0.9 \times \frac{4}{100}}{0.9 \times \frac{4}{100} + 0.05 \times \frac{96}{100}} = \frac{36}{36+48} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7} = 42.9\%.$$

(2) $P(A^c|B^c)$ を求めればよい. ベイズの公式によって,

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(B^c|A^c)P(A^c)}{P(B^c|A^c)P(A^c) + P(B^c|A)P(A)} = \frac{0.95 \times \frac{96}{100}}{0.95 \times \frac{96}{100} + 0.1 \times \frac{4}{100}} = \frac{91.2}{91.2+0.4} = \frac{912}{916} = \frac{228}{229} = 99.6\%.$$

[5] (1) 教科書等を参照.

(2) 信頼係数 95% のためには $N(0,1)$ の両側 5% 点である 1.96 が係数となって,

$$\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

が信頼区間となる. 信頼係数 99% のためには $N(0,1)$ の両側 1% 点である 2.58 が係数として用いられる. したがって, 求める信頼区間は

$$21.8 \pm 3.3 \times \frac{2.58}{1.96} = 21.8 \pm 3.3 \times \frac{129}{98} = 21.8 \pm 4.34... = 21.8 \pm 4.3$$

[6] (1) $H_0 : m = 2.5$, $H_1 : m \neq 2.5$ とおく. 大きさ 9 の標本平均は $\bar{X} \sim N\left(2.5, \dfrac{0.24^2}{9}\right) = N(2.5, 0.08^2)$. 規準化して

$$Z = \frac{\bar{X} - 2.5}{0.08} \sim N(0,1).$$

実現値 $\bar{x} = 2.32$ を代入して,

$$z = \frac{2.32 - 2.5}{0.08} = -2.25$$

H_1 から両側検定となる. 有意水準 $\alpha = 0.05$ (5%) に対する棄却域は $|z| \geq 1.96$. 実現値 $z = -2.25$ は棄却域に落ちる. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, 製造ラインに狂いが生じていると判定される.

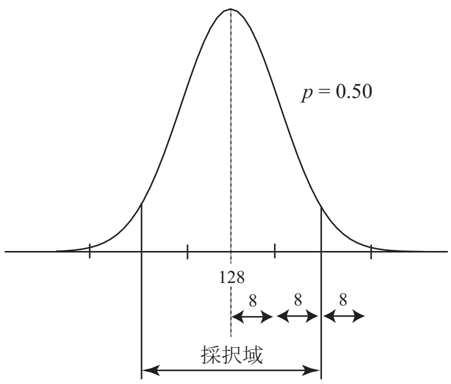
(2) T 検定を行う. その説明については教科書等を参照.

[7] (1) $H_0 : p = \dfrac{1}{2}$, $H_1 : p \neq \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 0.05$ によって検定を行う. コインを 256 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(256, 1/2) \approx N(128, 8^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

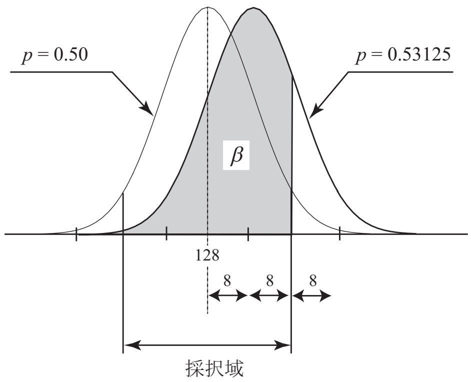
$$W : \left|\frac{x - 128}{8}\right| \geq 1.96 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 128 - 15.68 \text{ または } 128 + 15.68 \leq x$$

実現値 $x = 140$ は W に落ちない. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却されず, コインは公正であると判定される. この判定が間違っている確率, すなわち, コインは公正ではないのにもかかわらず公正であると判定してまう確率が第 2 種誤り確率である. コインが公正ではない場合, 可能な p は無限にあり, 第 2 種誤り確率を簡単に評価することはできない.

採択域を図示したものが次の図である. $1.96 \approx 2$ として説明すれば十分である.

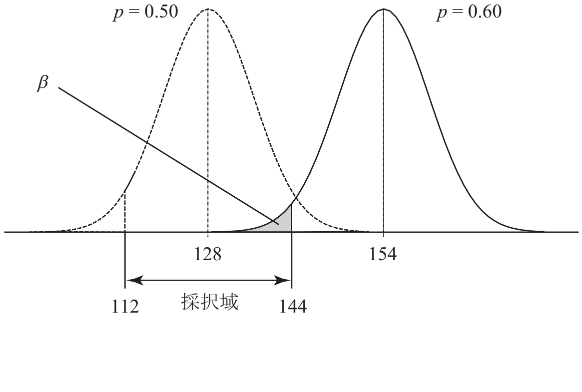


イカサマコインの例示として, 平均値が $136 = 128 + 8$ であるコインを投げていたとする. 逆算して $p = 0.53125$ のイカサマコインということである. $B(256, 0.53125)$ の標準偏差も約 8 として見積もってよい. その分布を重ねて書いたものが次の図である.



採択域に実現値が現れる確率は, 網掛け部分の面積であり, これが第 2 種誤り確率 β である. 明らかに, $\beta > 0.5$ となるほどに大きい. つまり, 投げているコインがイカサマであっても, 公平なコインに近い ($p = 0.53125$) 場合は, それを区別することは難しく, 仮説検定では「公平なコインである」と判定されがちである. つまり, 第 2 種の誤りを犯しやすい.

(2) 第 2 種誤り確率が小さい状況とは, 投げているコインのイカサマ度が大きく, その分布が $p = 1/2$ の分布とかけ離れている場合である. たとえば, $p = 0.6$ の分布を書いて, 採択域に実現値が出る確率を見積もろう. $p = 0.6$ のとき, 表の回数は概ね $N(154, 8^2)$ に従うとしてよい. そうすると, β は標準正規分布の $z = (154 - 144)/8 = 1.25$ より上側に対応する確率である. 標準正規分布表によって $\beta = 0.5 - 0.3944 \approx 0.1$ である. したがって, 表の出る確率が $p \leq 0.4$ あるいは $p \geq 0.6$ のように公平なコインから相当にずれているときは, $\beta \leq 0.1$ といえる.



[8] (1) $X = k$ ということは, 4 枚のうち 1 枚が k であって, 他の 3 枚が $k-1$ 以下ということ. したがって,

$$P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{3}}{\binom{N}{4}} = \frac{4(k-1)(k-2)(k-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \qquad 4 \leq k \leq N.$$

(2) 定義から,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=4}^{N} kP(X=k) = \sum_{k=4}^{N} \frac{4k(k-1)(k-2)(k-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \\ &= \frac{4}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{k=4}^{N} k(k-1)(k-2)(k-3)\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}&(k+1)k(k-1)(k-2)(k-3) - k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) \\ &= \{(k+1)-(k-4)\}k(k-1)(k-2)(k-3) = 5k(k-1)(k-2)(k-3)\end{aligned}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=4}^{N} k(k-1)(k-2)(k-3) \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=4}^{N}\{(k+1)k(k-1)(k-2)(k-3) - k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)\} \\ &= \frac{1}{5}(N+1)N(N-1)(N-2)(N-3).\end{aligned}$$

したがって,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{4}{5}(N+1).$$