(水曜 1 限, 尾畑)

数理統計学・期末試験問題 (2016.07.20)

- **[1]–[6] は必答. [7]–[8] から 1 題だけを選択解答せよ.** (100 点満点)
- 電卓などの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] (必答) サイコロを 2 個投げて出た目の大きい方を X, 小さい方を Y とする. ただし, 同じ目が出たときは, $X = Y$ とする. (5 点 $\times 3$)

(1) 確率 $P(X = 5)$ を求めよ.

(2) 条件付き確率 $P(Y \le 2 | X \ge 5)$ を求めよ.

(3) $X - Y$ の平均値 $\mathbf{E}[X - Y]$ を計算せよ.

[2] (必答) 中心を O とする半径 1 の円の内部にランダムに 1 点 A を選び, A と O との距離を X とする. (5 点 $\times 3$)

(1) X の確率密度関数 $f(x)$ を求めよ.

(2) 平均値 $\mathbf{E}[X]$ を求めよ.

(3) 分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ.

[3] (必答) 正規分布表を用いて, 次の問いに答えよ. (5 点 $\times 2$)

(1) $X \sim N(4, 3^2)$ のとき, $P(X \ge 2.47)$ を求めよ.

(2) $Y \sim N(-2, 5^2)$ のとき, $P(Y \le a) = 0.877$ となる a の値を求めよ.

[4] (必答) ある国では, 病気 A の感染者は 500 人に 2 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 90%に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう. (5 点 $\times 2$)

(1) ある人がこの検査を受けて陽性反応が出た. この人が感染者である確率を求めよ.

(2) ある人がこの検査を受けて陰性反応が出た. この人が非感染者である確率を求めよ.

[5] (必答) 100 万世帯から 600 世帯を無作為抽出して, 番組 A の視聴率調査を行ったところ, 131 世帯が視聴していた. これより, 信頼係数 95% として視聴率の信頼区間 $21.8 \pm 3.3\%$ が導かれた. (10 点 $\times 2$)

(1) ここでいう信頼区間とは何か? 確率論にもとづく導出を説明して, その意味するところを述べよ. 信頼区間の幅をより狭くするにはどうすればよいかも合わせて答えよ.

(2) 信頼係数 90 % の信頼区間を求めよ.

[6] (必答) ある食品の製造ラインでは, 製品 100g 中に含まれる砂糖が 2.50g になるように調整している. 一方, この工場の工程から, 砂糖の含有量は標準偏差 0.24g の正規分布であることが経験的に知られている. あるロットから選んだ 9 個の標本は, 平均 2.32g の砂糖を含んでいた. 製造ラインに狂いが生じているかどうかを有意水準 5% の仮説検定で判定せよ. 有意水準 1% ではどうか? (10 点)

[7] (選択) コインを 256 回投げたところ, 表が 140 回出た. このコインが公平かどうかを有意水準 5% の仮説検定によって判定したい. (10 点 $\times 2$)

(1) 「第 2 種誤り確率」の定義を述べて, その基本的な性質を上の問題に即して説明せよ.

(2) 第 2 種誤り確率が 10%以下になるような状況はどのような場合であるか答えよ.

[8] (選択) 0 から 9 までの数字を重複を許して 5 個並べて作った乱数 $00000, 00001, \ldots, 99999$ から 1 個を選ぶとき, 次の確率を求めよ. (5 点 $\times 4$)

(1) 選ばれた乱数に 9 がちょうど 1 個含まれる確率を求めよ.

(2) 選ばれた乱数に 9 がちょうど 2 個含まれる確率を求めよ.

(3) 選ばれた乱数に $0, 1, \ldots, 9$ のうち少なくとも 1 つがちょうど 2 個含まれる確率を求めよ.

(4) 選ばれた乱数に $0, 1, \ldots, 9$ のうち少なくとも 2 つがちょうど 1 個含まれる確率を求めよ.

付録：標準正規分布表 $\quad P = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学 (2016.07.20 実施) 期末試験解説

[1] $P(X=x, Y=y)$ を一覧表にすると, 以下の通り.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	合計
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
合計	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

(1) $P(X=5) = \dfrac{9}{36}$

(2) $P(X \geq 5) = \dfrac{20}{36}$, $P(Y \leq 2, X \geq 5) = \dfrac{8}{36}$ であるから,

$$P(Y \leq 2 | X \geq 5) = \frac{P(Y \leq 2, X \geq 5)}{P(X \geq 5)} = \frac{8}{20}$$

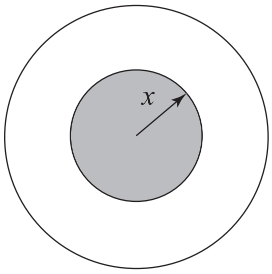
(3) $X-Y$ の確率分布は以下の通り.

k	0	1	2	3	4	5	合計
$P(X-Y=k)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36	1

したがって,

$$\mathbf{E}[X-Y] = 0 \times \frac{6}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + \cdots + 5 \times \frac{2}{36} = \frac{70}{36}$$

[2] (1) 分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ を求める. $x < 0$ のとき $F(x) = 0$, $x > 1$ のとき $F(x) = 1$ は明らか. そこで, $0 \leq x \leq 1$ とする. $X \leq x$ はランダムに選んだ 1 点と中心 O との距離が x 以下となることを意味するが, それはランダム点が O を中心とする半径 x の円板から選ばれたことと同値である.



円の面積比を考えて,

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2.$$

分布関数を微分して,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

(2) 定義によって,

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

(3) まず,

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}\,.$$

したがって,

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}\,.$$

[3] (1) $X \sim N(4, 3^2)$ から

$$P(X \geq 2.47) = P\left(\frac{X-4}{3} \geq \frac{2.47-4}{3}\right) = P\left(Z \geq -0.51\right) = 0.5 + 0.1950 = 0.695$$

(2) $Y \sim N(-2, 5^2)$ から,

$$P(Y \leq a) = P\left(\frac{Y-(-2)}{5} \leq \frac{a-(-2)}{5}\right) = P\left(Z \leq \frac{a+2}{5}\right) = 0.877$$

ここで, $Z = \dfrac{Y-(-2)}{5} \sim N(0,1)$ である. 標準正規分布表から $P(Z \leq b) = 0.877$ となる b は $b = 1.16$ である. よって,

$$b = \frac{a+2}{5} = 1.16 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 5b - 2 = 3.8$$

[4] A: 感染者である; B: 陽性反応が出る, とすれば,

$$P(A) = \frac{2}{500}\,, \qquad P(B|A) = 0.9 \qquad P(B|A^c) = 0.05$$

となる.

(1) $P(A|B)$ を求めればよい. ベイズの公式によって,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{0.9 \times \frac{2}{500}}{0.9 \times \frac{2}{500} + 0.05 \times \frac{498}{500}} = \frac{18}{18+249} = \frac{18}{267} = \frac{6}{89} = 6.7\%.$$

(2) $P(A^c|B^c)$ を求めればよい. ベイズの公式によって,

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(B^c|A^c)P(A^c)}{P(B^c|A^c)P(A^c) + P(B^c|A)P(A)} = \frac{0.95 \times \frac{498}{500}}{0.95 \times \frac{498}{500} + 0.1 \times \frac{2}{500}} = \frac{4731}{4731+2} = \frac{4731}{4733} = 99.96\%.$$

[5] (1) 省略

(2) 信頼係数 95% のためには $N(0,1)$ の両側 5% 点である 1.96 が係数となって,

$$\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

が信頼区間となる. 信頼係数 90% のためには $N(0,1)$ の両側 10% 点である 1.64 が係数として用いられる. したがって, 求める信頼区間は

$$21.8 \pm 3.3 \times \frac{1.64}{1.96} = 21.8 \pm 3.3 \times \frac{41}{49} = 21.8 \pm 2.76... = 21.8 \pm 2.8$$

[6] $H_0: m = 2.5,\ H_1: m \neq 2.5$ とおく. 大きさ 9 の標本平均は $\bar{X} \sim N\left(2.5, \dfrac{0.24^2}{9}\right) = N(2.5, 0.08^2)$.
規準化して

$$Z = \frac{\bar{X} - 2.5}{0.08} \sim N(0,1).$$

実現値 $\bar{x} = 2.32$ を代入して,

$$z = \frac{2.32 - 2.5}{0.08} = -2.25$$

H_1 から両側検定となる．有意水準 $\alpha = 0.05$ (5%) に対する棄却域は $|z| \geq 1.96$. 実現値 $z = -2.25$ は棄却域に落ちる．したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, 製造ラインに狂いが生じていると判定される．

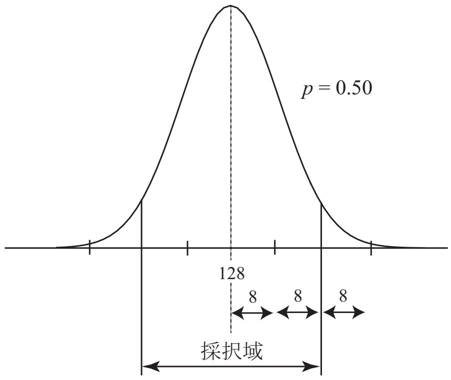
有意水準 $\alpha = 0.01$ とすると, 両側検定の 5%棄却域は $|z| \geq 2.58$. 実現値 $z = -2, 25$ は棄却域に落ちない．したがって, 有意水準 1% では H_0 は棄却されない．（高度に有意ではない）

[7] (1) $H_0 : p = \dfrac{1}{2}$, $H_1 : p \neq \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 0.05$ によって検定を行う．コインを 256 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(256, 1/2) \approx N(128, 8^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

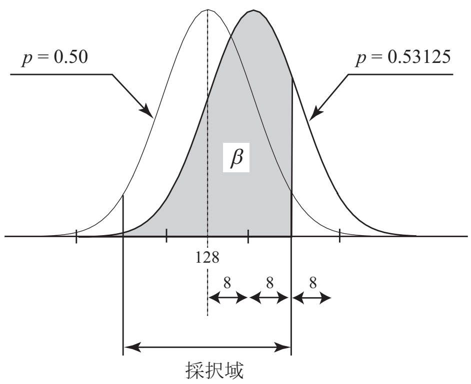
$$W : \left| \frac{x - 128}{8} \right| \geq 1.96 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 128 - 15.68 \text{ または } 128 + 15.68 \leq x$$

実現値 $x = 140$ は W に落ちない．したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却されず, コインは公正であると判定される．この判定が間違っている確率, すなわち, コインは公正ではないのにもかかわらず公正であると判定してまう確率が第 2 種誤り確率である．コインが公正ではない場合, 可能な p は無限にあり, 第 2 種誤り確率を簡単に評価することはできない．

採択域を図示したものが次の図である．$1.96 \approx 2$ として説明すれば十分である．



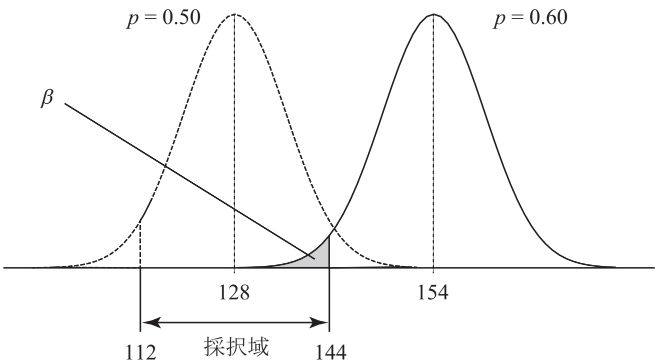
イカサマコインの例示として, 平均値が $136 = 128 + 8$ であるコインを投げていたとする．逆算して $p = 0.53125$ のイカサマコインということである．$B(256, 0.53125)$ の標準偏差も約 8 として見積もってよい．その分布を重ねて書いたものが次の図である．



採択域に実現値が現れる確率は, 網掛け部分の面積であり, これが第 2 種誤り確率 β である．明らかに, $\beta > 0.5$ となるほどに大きい．つまり, 投げているコインがイカサマであっても, 公平なコインに近い

$(p = 0.53125)$ 場合は, それを区別することは難しく, 仮説検定では「公平なコインである」と判定されがちである. つまり, 第 2 種の誤りを犯しやすい.

(2) 第 2 種誤り確率が小さい状況とは, 投げているコインのイカサマ度が大きく, その分布が $p = 1/2$ の分布とかけ離れている場合である. たとえば, $p = 0.6$ の分布を書いて, 採択域に実現値が出る確率を見積もろう. $p = 0.6$ のとき, 表の回数は概ね $N(154, 8^2)$ に従うとしてよい. そうすると, β は標準正規分布の $z = (154 - 144)/8 = 1.25$ より上側に対応する確率である. 標準正規分布表によって $\beta = 0.5 - 0.3944 \approx 0.1$ である. したがって, 表の出る確率が $p \leq 0.4$ あるいは $p \geq 0.6$ のように公平なコインから相当にずれているときは, $\beta \leq 0.1$ といえる.



[8] (1) 0 から 9 までの数字を 5 個並べて作った乱数で 9 がちょうど 1 個だけ含まれる事象を A_9 とする. A_9 に属する根元事象は

$$9**** \qquad *9*** \qquad **9** \qquad ***9* \qquad ****9$$

のような形をもつ. ただし, $*$ には 9 以外の数字が自由に入る. そのような乱数の個数は

$$|A_9| = 5 \times 9^4.$$

したがって,

$$P(A_9) = \frac{5 \times 9^4}{10^5} = \frac{32805}{100000} = \frac{6561}{20000}\,.$$

(2) 0 から 9 までの数字を 5 個並べて作った乱数で 9 がちょうど 2 個だけ含まれる事象を B_9 とする. B_9 に属する根元事象は,

$$99*** \qquad 9*9** \qquad \cdots \qquad ***99$$

のような形をもつ. ただし, $*$ には 9 以外の数字が自由に入る. そのような乱数の総数は

$$|B_9| = \binom{5}{2} \times 9^3 = 10 \times 9^3.$$

よって,

$$P(B_9) = \frac{10 \times 9^3}{10^5} = \frac{729}{10^4}\,.$$

(3) $P(B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_9)$ を求めればよい. ここで, 異なる 3 個の B_i, B_j, B_k の共通部分は空であるから,

$$P(B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_9) = \sum_{k=0}^{9} P(B_k) - \sum_{0 \leq j < k \leq 9} P(B_j \cap B_k)$$

$P(B_j \cap B_k) = P(B_0 \cap B_1)$ である．$B_0 \cap B_1$ は 0 がちょうど 2 個, 1 がちょうど 2 個含まれる乱数の全体であるから,

$$|B_0 \cap B_1| = 8 \times \frac{5!}{2!2!1!} = 240.$$

よって,

$$P(B_j \cap B_k) = \frac{240}{10^5} = \frac{24}{10^4}$$

したがって,

$$\begin{aligned} P(B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_9) &= \sum_{k=0}^{9} P(B_k) - \sum_{0 \leq j < k \leq 9} P(B_j \cap B_k) \\ &= 10 \times \frac{729}{10^4} - 45 \times \frac{24}{10^4} = \frac{729}{10^3} - \frac{1080}{10^4} = \frac{621}{10^3} \end{aligned}$$

(4) 少なくとも 2 つの数字がちょうど 1 回現れるので, 次の 3 通りの場合がある．

(i) 2 つの数字がちょうど 1 回現れるもの．たとえば, 01222

(ii) 3 つの数字がちょうど 1 回現れるもの．たとえば, 01233

(ii) 5 つの数字がちょうど 1 回現れるもの．たとえば, 01234

(i) のパターンの乱数は

$$\binom{10}{2} \times 8 \times \frac{5!}{1!1!3!} = 7200$$

個ある．(ii) のパターンの乱数は

$$\binom{10}{3} \times 7 \times \frac{5!}{1!1!1!2!} = 50400$$

個ある．(iii) のパターンの乱数は

$$\binom{10}{5} \times 5! = 30240$$

個ある．よって, 求める確率は,

$$\frac{7200 + 50400 + 30240}{10^5} = \frac{87840}{10^5} = \frac{8784}{10000} = \frac{549}{625}$$

(注意) (3) で, (4) のようにパターンに分けて確率を計算してもよい．また, (4) では,

$$P\left(\bigcup_{0 \leq j < k \leq 9} (A_j \cap A_k)\right)$$

の確率を計算してもよい．