

## 平成 29(2017) 年度 解析入門 期末試験問題

実施: 2017. 7.25 (火) 08:50–10:20

- 1 番から 5 番は必答, 6-7 番から 1 問を選択解答せよ (100 点満点).
- 文章が重要. 読めない (式のみ, 答のみ, 薄い, 小さい, 汚い) 解答は 0 点.
- 問題解説はウェブサイトを参照 [www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/](http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/)

1. 次の集合  $A$  の元の個数を, 理由もあわせて答えよ. [5 点  $\times$  6 = 30 点]

- (1)  $A = \{\{2, 3, 4\}, \{4, 3, 4, 2\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$
- (2)  $A = \{6, 2, 3, 4, 3, 4, 1\} \cap \{4, 1, 4, 5\}$
- (3)  $A = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$ , ただし,  $\emptyset$  は空集合
- (4)  $A = \{f \mid f: \{3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ 写像} \}$
- (5)  $A = \{f \mid f: \{3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ 単射} \}$
- (6)  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  のべき集合  $A = 2^B$

2.  $X, Y, Z$  を集合として,  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  を写像とする. [5 点  $\times$  2 = 10 点]

- (1)  $f$  と  $g$  が単射であれば,  $g \circ f$  も単射であることを示せ.
- (2)  $g \circ f$  が単射でも  $g$  が単射であるとは限らない. 具体例を一つ示せ.

3. 任意の集合  $A, B, C$  に対して,

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

が成り立つことを証明せよ. ただし,  $X \setminus Y$  は差集合であり,  $X - Y$  とも書かれる. [10 点]

(注意 1) 図に訴えるだけでは証明にはならない.

(注意 2) この等式はド・モルガンの法則と呼ばれるものなので, ド・モルガンの法則を用いた証明は認められない.

4. 自然数の集合  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  と濃度の等しい集合を可算集合という. [10 点  $\times$  2 = 20 点]

- (1) 0 より大きく 1 より小さい有限小数 (ある桁から以後, 0 ばかりが続く小数) の全体を  $A$  とする.  $A$  は可算集合であることを示せ.
- (2) 無限数列  $(b_1, b_2, \dots)$  で各項が 0 または 1 となっているものの全体を  $B$  とする.  $B$  は可算集合ではないことを示せ.

裏へ

5. 自然数  $\mathbb{N}$  に次の4通りの順序を定義する. ただし,  $x < y$  は通常 of 自然数の大小を表す.

- (a)  $x < y$  のとき  $x \prec_a y$  と定義する.
- (b)  $x, y$  がともに偶数で  $x < y$  のとき, または  $x, y$  がともに奇数で  $x < y$  のとき, または  $x$  が偶数で  $y$  が奇数のとき,  $x \prec_b y$  と定義する.
- (c)  $x, y$  がともに偶数で  $x < y$  のとき, または  $x, y$  がともに奇数で  $y < x$  のとき, または  $x$  が偶数で  $y$  が奇数のとき,  $x \prec_c y$  と定義する.
- (d)  $x, y$  がともに偶数で  $y < x$  のとき, または  $x, y$  がともに奇数で  $x < y$  のとき, または  $x$  が偶数で  $y$  が奇数のとき,  $x \prec_d y$  と定義する.

次の問いに答えよ. [10点  $\times$  2 = 20点]

- (1) 4つの順序集合  $(\mathbb{N}, \prec_i)$  ( $i = a, b, c, d$ ) は順序同型か? 理由もあわせて答えよ.
- (2) 4つの順序集合  $(\mathbb{N}, \prec_i)$  ( $i = a, b, d, d$ ) は整列集合か? 理由もあわせて答えよ.

6 (選択).  $X$  を無限集合とする.  $a \in X$  として,  $Y = X \setminus \{a\}$  とおく. ただし,  $X \setminus \{a\}$  は差集合であり,  $X - \{a\}$  と同じものである. [5点  $\times$  2 = 10点]

- (1)  $Y$  は無限集合であることを示せ.
- (2)  $X$  から  $Y$  への全単射が存在することを示せ.

7 (選択). 実数  $\mathbb{R}$  の部分集合 (区間) を

$$[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}, \quad (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

とする. [5点  $\times$  2 = 10点]

- (1)  $[0, 1)$  から  $(0, 1)$  への全単射を具体的に1つ構成せよ.
- (2)  $[0, 1)$  から  $\mathbb{R}$  への全単射を具体的に1つ構成せよ.

## 平成 29(2017) 年度 解析入門 期末試験解説

1. 理由は省略.

(1) 3 個 (2) 2 個 (3) 2 個 (4) 64 個 (5) 24 個 (6) 16 個

2. (1)  $x_1, x_2 \in X$  で  $x_1 \neq x_2$  とする.  $f$  は単射なので  $f(x_1) \neq f(x_2)$  である. さらに,  $g$  は単射なので  $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$  である. よって,  $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$  である. したがって,  $g \circ f$  は単射.

(2)  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$ ,  $Z = \{1, 2\}$  として,  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$  で,  $g: Y \rightarrow Z$  を  $g(1) = 1$ ,  $g(2) = g(3) = 2$  で定義する. このとき,  $g \circ f: X \rightarrow Z$  で  $g \circ f(1) = 1$ ,  $g \circ f(2) = 2$  であるから  $g \circ f$  は単射である. しかし,  $g$  は  $g(2) = g(3)$  なので単射ではない.

3.  $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$  と  $A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$  を示す. 詳しくは教科書を参照.

4. (1) ごく簡単に方針だけ述べる (教科書にもある). 有効桁数  $n$  の有限小数の全体を

$$A_n = \{0.\xi_1\xi_2\cdots\xi_n000\cdots \mid \xi_1\xi_2\cdots\xi_n \in \{0, 1, \dots, 9\}, \xi_n \neq 0\}$$

とすれば,  $A_n$  は有限集合で  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  となる.  $A_1$  の元を一行に並べ, 次に  $A_2$  の元を一行に並べ, というように, すべての有限小数を一行に並べることができ, 順に番号を付けることができる.

(2)  $B$  が可算集合であると仮定して, すべての数列を 1 行に並べたリストを作っておく. このリストを見ながら, あらたに数列  $x = (x_1, x_2, \dots)$  を  $x_1$  は第 1 番の数列の第 1 項とは異なる,  $x_2$  は第 2 番の数列の第 2 項とは異なる,  $\dots$ ,  $x_n$  は第  $n$  番の数列の第  $n$  項とは異なる, という風に構成する. もちろん  $x \in B$  ではあるが, リストに載っていないものになる. よって, 矛盾.  $B$  が可算集合ではない. これはカントルの対角線論法である.

5. それぞれの配列は次のようになる.

(a) 1 2 3 4 5  $\cdots$

(b) 2 4 6  $\cdots$  1 3 5  $\cdots$

(c) 2 4 6  $\cdots$  5 3 1

(d)  $\cdots$  6 4 2 1 3 5  $\cdots$

(1) どの 2 つも同型ではない.

理由: (a)(b)(c) には最小元があるが, (d) にはない. よって, (d) は (a)(b)(c) のいずれとも同型にならない. (c) には最大元があるが, (a)(b) にはない. よって, (c) は (a)(b) のいずれとも同型にならない. (a)(b) は同型ではない. なぜなら (b) から (a) への同型  $f$  があったとして  $f(1)$  に注目して,

$$B = \{x \mid x \prec_a f(1)\}, \quad C = \{y \mid y \prec_b 1\}$$

とおくと,  $f$  は同型であるから  $B, C$  は一対一対応がつく. しかし,  $B$  は有限集合であり,  $C$  は無限集合であるから, 対応はない. よって, 矛盾. (b) から (a) への同型はない.

(2) (a)(b) が整列集合. (c) では, 奇数の集合を考えると最小元がない. (d) では, 偶数の集合を考えると最小元はない.

6. (1) まず,

$$X = Y \cup \{a\}$$

は互いに素な集合の和集合である. もし  $|Y|$  が有限集合であれば,  $|X| = |Y| + 1$  となり,  $X$  が無限集合である仮定に反する. よって,  $Y$  は無限集合である.

(2)  $X$  は無限集合であるから, 順に元を取り出して  $a_1 = a, a_2, a_3, \dots$  のような元の列が得られる. 写像  $f$  を

$$f(x) = \begin{cases} a_{n+1}, & x = a_n, \\ x, & \text{その他,} \end{cases}$$

とおくと,  $f: X \rightarrow Y$  である. 簡単のため,  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  とおくと,

$$X = A \cup X \setminus A$$

のように互いに素な部分集合に分割されて,  $f$  は,  $A \rightarrow A \setminus \{a\}$  として番号をずらす対応なので全単射. また,  $f: X \setminus A \rightarrow Y \setminus A = X \setminus A$  として恒等写像なので全単射. したがって,  $f: X \rightarrow Y$  は全単射である.

7. (1) たとえば,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ x, & \text{そのほか.} \end{cases}$$

(2)  $g(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$  や  $g(x) = \tan \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$  とおくと  $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  が全単射になる. したがって,  $g \circ f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  が全単射になる.