平成 29(2017) 年度 解析学 C 期末試験問題

実施: 2017. 7.18 (火) 08:50–10:20

- 1–6 番は必答. 7 番は 7A または 7B の一つだけ, 8 番は 8A または 8B の一つだけを選択して解答せよ.
- 丁寧な文章で論拠を明示することで加点される.
- 式の羅列のみの解答, 読めない (薄い、小さい、汚い) 解答は 0 点.

1. 次の微分方程式の解をすべて求めて, 得られる曲線群を xy-平面に図示せよ. [15 点]

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

2. 次の微分方程式の解をすべて求めて, 得られる曲線群を xy-平面に図示せよ. [15 点]

$$(1-y)dx + (1+x)dy = 0$$

3. 次の微分方程式の解をすべて求めて, 得られる曲線群を xy-平面に図示せよ. [15 点]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

4. 次の微分方程式の解をすべて求めて, 得られる曲線群を xy-平面に図示せよ. [15 点]

$$y = y'x + \frac{1}{y'}$$

5. $y = y(x)$ に関する次の定係数線形微分方程式の一般解を求めよ. [10 点]

$$y'' - y' - 2y = -4x + 5\sin x$$

6. $y=y(x)$, $z=z(x)$ に関する次の連立微分方程式を行列を用いて解け．[10 点]

$$\begin{cases} y' = 5y - 2z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

7A [選択]. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x\,\cos x$ の一般解を求めよ．[10 点]

7B [選択]. 微分方程式 $(x^2y - y^2)dx - x^3dy = 0$ の両辺に $x^\alpha y^\beta$ をかけて完全微分方程式に変換して解け．[10 点]

8A [選択]. ばね定数 $\lambda > 0$ のばねにつながれた質量 m の質点が速度に比例する抵抗を受けて運動する．時刻 x におけるその質点の位置 $y = y(x)$ は運動方程式

$$my'' = -\lambda y - \gamma y'$$

に従う．ただし，$\gamma = \sqrt{4m\lambda}$ とする．初期条件を $y(0) = 1$, $y'(0) = v$ とするとき，$y(x) = 0$ となる $x > 0$ が存在するための λ, m, v の条件を求めよ．[10 点]

8B [選択]. べき級数 $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が微分方程式 $y' = 1 + xy$ および初期条件 $y(0) = 1$ を満たすように，係数列 $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ を定めよ．[10 点]

平成 29(2017) 年度 解析学 C 期末試験解説

1. [p. 9] まず, $y(x) \equiv 0$ は解である．それ以外の解を求めるために, $\dfrac{dy}{y^2} = 2xdx$ と変形して両辺を積分すると,

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

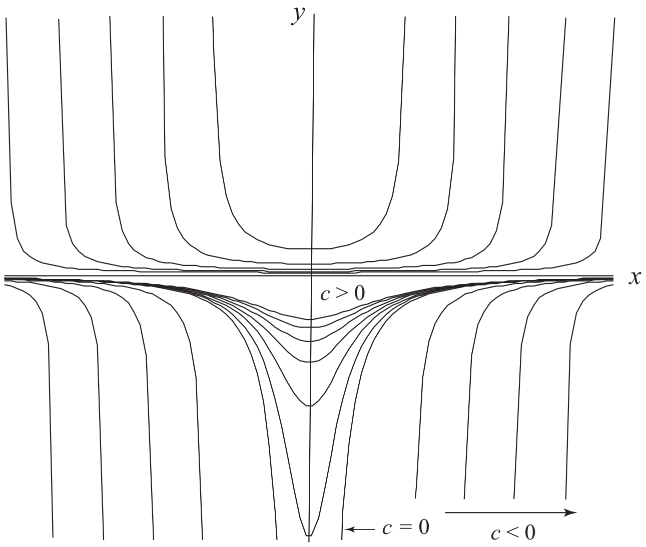
したがって,

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

よって, 求める解は,

$$y = 0, \qquad y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

グラフの形状は $C > 0$, $C = 0$, $C < 0$ で異なるので注意せよ．得られる曲線群は全平面を埋めつくす.



2. [p.12] まず, $y(x) \equiv 1$ は解である．次に $\dfrac{dy}{y-1} = \dfrac{dx}{x+1}$ と変形して, 両辺を積分して,

$$\log|y-1| = \log|1+x| + C_1$$

したがって,

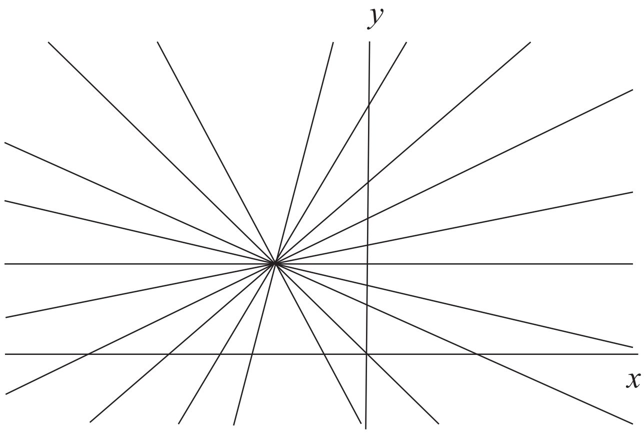
$$y = C(x+1) + 1$$

$C = 0$ とおけば, $y = 1$ であるから, 求める解は

$$y = C(x+1) + 1$$

で尽きる．得られる曲線群は $(-1, 1)$ を通る直線群である.

元々の微分方程式は x, y について, どちらが独立変数で, どちらが従属変数ということはなく, 対称的に書かれているので, $x = -1$ を解曲線に加えてもよい.



3. [p.17] 同次形である. ここで, $u = \dfrac{y}{x}$ とおいて,

$$y = xu, \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\,\frac{du}{dx}$$

を代入して, 微分方程式に書き直すと

$$u + x\,\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-u}{1+u^2}\,du = \frac{dx}{x}$$

となる. 積分して

$$\begin{aligned}
&\arctan u - \frac{1}{2}\,\log(1+u^2) = \log|x| + C_1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\arctan u - \log(1+u^2) = 2\log|x| + C_2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\arctan u = \log(1+u^2)x^2 + C_2 = \log C_3(1+u^2)x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & e^{2\arctan u} = C_3(1+u^2)x^2 = C_3(x^2+y^2) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 = Ce^{2\arctan\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

これ以上は見やすくならないので, 解は,

$$x^2 + y^2 = Ce^{2\arctan\frac{y}{x}}$$

でよい.

曲線群を見るときは, 極座標が便利である.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

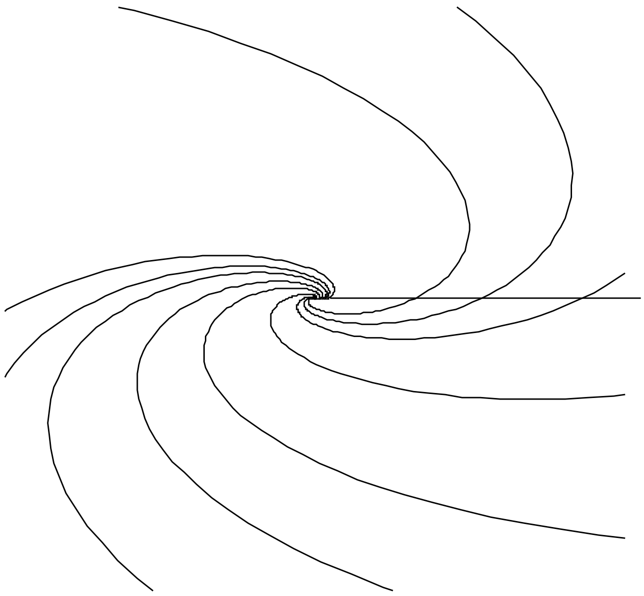
とおくと,

$$r^2 = Ce^{2\theta}$$

となるから, 定数を取り直して,

$$r = Ce^{\theta} \qquad C \geq 0 \text{ は任意定数}$$

となる.



4. [p.46] $p = y'$ とおくと

$$y = px + \frac{1}{p}$$

両辺を微分して,

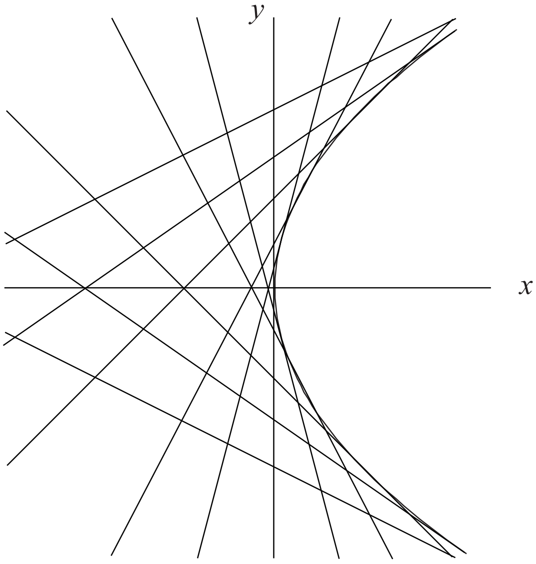
$$y' = p'x + p - \frac{p'}{p^2}$$

$p = y'$ と合わせて,

$$p'\left(x - \frac{1}{p^2}\right) = 0.$$

これから, $p = C$ と $p^2 = \dfrac{1}{x}$ が出る. 元に戻して,

$$y = Cx + \frac{1}{C}, \qquad y^2 = 4x.$$



5. [p.73] まず,

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{*}$$

を解く. 特性方程式は $\xi^2 - \xi - 2 = (\xi - 2)(\xi + 1) = 0$ であるから, 特性根は $\xi = 2, -1$. したがって, 基本解は $\{e^{2x}, e^{-x}\}$ であり, (*) の一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

で与えられる. そうすると, $y'' - y' - 2y = -4x + 5\sin x$ の一般解は, 特殊解の 1 つ y_* を用いて $y + y_*$ として求められる.

計算の要領として, まず, $y'' - y' - 2y = 5\sin x$ の特殊解を求めよう. 解を $y = a\cos x + b\sin x$ の形を想定する. 方程式に代入すると,

$$(-3a - b)\cos x + (a - 3b)\sin x = 5\sin x$$

となる. よって, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ が出て, 特殊解として,

$$y_1 = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2}\sin x$$

が得られる. 次に, $y'' - y' - 2y = -4x$ の特殊解を求めるために解を $y = ax + b$ の形を想定する. 代入して,

$$-a - 2ax - 2b = -4x$$

から, $a = 2$, $b = -1$. よって, 特殊解

$$y_2 = 2x - 1$$

を得る. 以上から, 一般解は,

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2}\sin x + 2x - 1$$

6. [p. 115]

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

と書ける. さて,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 1) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

であるから, 固有値は 3 のみ. 固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

を解いて, $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ がわかる. 固有空間が 1 次元であるから対角化はできない. したがって, y, z ともに e^{3x}, xe^{3x} の線形結合になる. そこで,

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x}, \qquad z = C_3 e^{3x} + C_4 xe^{3x},$$

とおいて, 任意定数を 2 個に減らせばよい. 与えられた方程式 $y' = 5y - 2z$ に代入して, 各辺を整理すると,

$$(3C_1 + C_2)e^{3x} + 3C_2 xe^{3x} = (5C_1 - 2C_3)e^{3x} + (5C_2 - 2C_4)xe^{3x}$$

係数を比較すると,

$$C_3 = C_1 - \frac{1}{2}\,C_2, \qquad C_4 = C_2\,.$$

連立方程式の第 2 式についても同様に扱うと, 全く同じ式が出る. したがって, 求める一般解は,

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}, \qquad z = \bigl(C_1 - \frac{1}{2}\,C_2\bigr)e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

[参考] 係数行列は対角化できないので, ジョルダン標準形を用いる必要がある.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

とおいて, a, b を求めると, $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$. こうして,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

が得られる. 解くべき方程式は,

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

ところで,

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

の一般解は,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \exp x \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \exp x \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} & x e^{3x} \\ 0 & e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

したがって,

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3x} & x e^{3x} \\ 0 & e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3x} + \frac{1}{2}\,C_2 e^{3x} + C_2 e^{3x} \\ C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \end{bmatrix}$$

7A. [p.22] まず,

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0$$

を解く. これは変数分離型であり,

$$\frac{dy}{y} = -\cos x\, dx$$

と変形して積分すれば,

$$\log |y| = -\sin x + C_1$$

となり,

$$y = C e^{-\sin x}$$

が一般解となる. さて, $\dfrac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x\, \cos x$ を解くために, 解を

$$y = u e^{-\sin x}$$

と想定して, 方程式に代入すると,

$$u' e^{-\sin x} - u(\cos x) e^{-\sin x} + u e^{-\sin x} \cos x = \sin x \, \cos x.$$

よって,

$$u' = \sin x \, \cos x \, e^{\sin x}.$$

両辺を積分して,

$$u = \int \sin x \, \cos x \, e^{\sin x} dx = (\sin x - 1) e^{\sin x} + C.$$

よって, 求める解は

$$y = \{(\sin x - 1) e^{\sin x} + C\} e^{-sinx} = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}.$$

7B. [p.36] 微分方程式 $(x^2 y - y^2) dx - x^3 dy = 0$ の両辺に $x^\alpha y^\beta$ をかけて完全微分方程式に変換して解け.

$$\begin{aligned} F &= x^\alpha y^\beta (x^2 y - y^2) = x^{\alpha+2} y^{\beta+1} - x^\alpha y^{\beta+2}, \\ G &= x^\alpha y^\beta (-x^3) = -x^{\alpha+3} y^\beta \end{aligned}$$

とおいて,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$$

が成り立つように α, β を定めればよい.

$$(\beta+1) x^{\alpha+2} y^\beta - (\beta+2) x^\alpha y^{\beta+1} = -(\alpha+3) x^{\alpha+2} y^\beta$$

なので,

$$\beta + 1 = -(\alpha+3), \qquad \beta + 2 = 0.$$

よって, $\alpha = \beta = -2$. したがって,

$$(y^{-1} - x^{-2}) dx - x y^{-2} dy = 0$$

は完全微分方程式. 実際, 左辺は $d(xy^{-1} + x^{-1})$ に一致する. よって, 一般解は $xy^{-1} + x^{-1} = C$ たうまり,

$$x^2 + y = Cxy$$

および $y = 0$ である.

8A. 特性方程式は

$$m\xi^2 + \gamma\xi + \lambda\xi = 0$$

であり, 特性根は

$$\xi = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4m\lambda}}{2m}$$

である. 条件 $\gamma = \sqrt{4m\lambda}$ から特性根は重根であって,

$$\xi = -\frac{\gamma}{2m} = -\frac{\sqrt{4m\lambda}}{2m} = -\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$$

がわかる. よって, 基本解は $\{e^{\xi x}, x e^{\xi x}\}$, 一般解は

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\xi x}$$

で与えられる．

$$y' = (C_2 + (C_1 + C_2 x)\xi)e^{\xi x}$$

に注意する．初期条件は，

$$y(0) = C_1 = 1, \qquad y'(0) = C_2 + C_1\xi = v$$

となる．よって，

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = v - \xi$$

となり，運動は

$$y = (1 + (v - \xi)x)e^{\xi x}$$

で与えられることがわかる．$y = 0$ となるのは，

$$x = -\frac{1}{v - \xi}$$

であり，これが $x > 0$ を満たせばよいから，

$$-\frac{1}{v - \xi} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v - \xi < 0 \quad \Leftrightarrow \quad v < \xi$$

したがって，求める条件は，

$$v < -\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$$

8B. $y = \sum c_n x^n$ を微分方程式 $y' = 1 + xy$ および初期条件 $y(0) = 1$ に直接代入する．まず，

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n$$

に注意して，

$$y' = 1 + xy \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n$$

係数を比較して，

$$c_1 = 1, \qquad c_{n+1} = \frac{c_{n-1}}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

また，

$$y(0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad c_0 = 1$$

したがって，

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = 1, \qquad c_n = \frac{c_{n-2}}{n}, \quad n \geq 2.$$

そうすると，$n = 2k$ (偶数) のときは，

$$c_{2k} = \frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{c_{2k-4}}{2k(2k-2)} = \cdots = \frac{c_0}{2k(2k-2)\cdots 2} = \frac{1}{(2k)!!}$$

$n = 2k-1$ (奇数) のときは，

$$c_{2k-1} = \frac{c_{2k-3}}{2k-1} = \frac{c_{2k-5}}{(2k-1)(2k-3)} = \cdots = \frac{c_1}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3} = \frac{1}{(2k-1)!!}$$

いずれにせよ，

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = 1, \qquad c_n = \frac{1}{n!!} \quad n \geq 2.$$