数理統計学・期末試験問題 (2017.07.19)

- **[1]–[6] は必答. [7]–[8] から 1 題だけを選択解答せよ.** (100 点満点)
- 電卓などの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] (必答) サイコロを 2 個投げて得点を争うゲームを行う. 得点として, 出た目の大きい方 (同じ目が出たときはその目) を L, 出た目の小さい方 (同じ目が出たときはその目) の 2 倍を M とする. どちらが得であろうか. (5 点 $\times 2$)

(1) 確率 $P(L \geq M)$ を求めよ.

(2) 平均値の差 $\mathbf{E}[L] - \mathbf{E}[M]$ を求めよ.

[2] (必答) 辺の長さが L の正方形の内部から, どの点も同等の確率で選ばれるようにランダムに 1 点を選び, A とする. A から 4 辺に下ろした垂線のうち最短なものの長さを X とする. 一言で言えば, X は点 A から正方形の周までの距離である. (5 点 $\times 4$)

(1) X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ を求め, そのグラフを図示せよ. ただし, x は実数である.

(2) X の確率密度関数 $f(x)$ を求めよ.

(3) X の平均値を求めよ.

(4) X の分散を求めよ.

[3] (必答) 正規分布表を用いて, 次の問いに答えよ. (5 点 $\times 2$)

(1) $X \sim N(4, 3^2)$ のとき, $P(X \geq 2.47)$ を求めよ.

(2) Y が $N(50, 10^2)$ に従う確率変数のとき, $P(Y \leq a) = 0.33$ を満たす a を求めよ.

[4] (必答) ある地域では, 病気 A の感染者は 100 人に 2 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 80%に陽性反応を示すが, 非感染者の 10% にも陽性反応が出るという. 次の確率を % で小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ. (5 点 $\times 2$)

(1) この検査を受けて陽性反応が出た人が感染者である確率.

(2) この検査を受けて陰性だった人が非感染者である確率.

[5] (必答) ある工場の製造ラインで 1 万個の部品を製造した. 部品 1 個の重量は 20.00g になるように調整しているが, この製造ラインの特性によって, 重量は標準偏差 0.24g の正規分布に従って変動する. 製品から選んだ 9 個の標本の平均重量は 20.19g であった. 製造ラインに狂いが生じているかどうかを仮説検定で判定せよ. また, 標準偏差 0.24g があらかじめ知られていないときは, どのような検定をすればよいか答えよ. (15 点)

[6] (必答) 100 万世帯から 600 世帯を無作為抽出して, 番組 A の視聴率調査を行い, 信頼係数 95% の信頼区間 $22.1 \pm 3.3\%$ が得られた. ここでいう信頼区間とはどのようにして導かれ, どのような意味をもつか? 500 文字を目安に (数式を除く. この問題文の 1 行が 50 文字程度である) 説明せよ. (15 点)

[7] (選択) 表が出る確率 p が $p = 0.5$ のコインと $p = 0.6$ のコインがあり, 見かけでは区別できない. そのうちの 1 つをとって, 100 回投げてみたところ, 表が 57 回が出た. このコインが公平なコインかどうかを仮説検定によって判定したい. (10 点 $\times 2$)

(1) 一般に「第 2 種誤り確率」とは何か? その定義と基本的な性質を 4 つ述べよ.

(2) 有意水準 $\alpha = 0.05, 0.01$ に対して第 2 種誤り確率 β の大きさを見積もれ.

[8] (選択) $\{0, 1, 2, \dots\}$ に値をとる離散型確率変数 X に対して, $P(X = k)$ が最大になるような k を X のモードという. X が次の分布に従うとき, モードを求めよ. (10 点 $\times 2$)

(1) 二項分布 $B(n, p)$.

(2) パラメータ λ のポアソン分布.

付録：標準正規分布表　$P = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学 (2017.07.19 実施) 期末試験解説

[1] $P(L=x, M=y)$ を一覧表にすると, 以下の通り.

$x \backslash y$	2	4	6	8	10	12	合計
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
合計	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

(1) $P(L \geq M) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

(2)

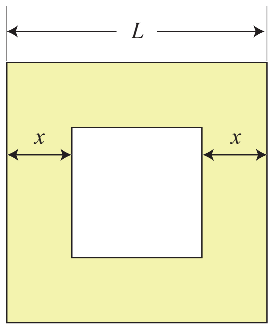
$$\mathbf{E}[L] = 1 \times \frac{1}{36} + \cdots + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36},$$
$$\mathbf{E}[M] = 2 \times \frac{11}{36} + \cdots + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{182}{36}.$$

したがって,

$$\mathbf{E}[L] - \mathbf{E}[M] = -\frac{21}{36} = -\frac{7}{12}.$$

[2] (1) $x \leq 0$ のとき $F(x) = 0$, $x \geq L/2$ のとき $F(x) = 1$ は明らか. $0 < x < L/2$ とする.

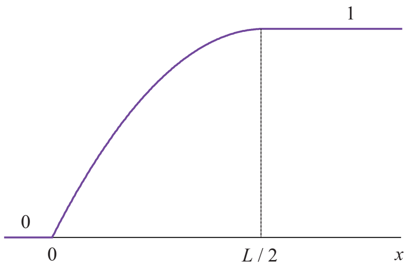
$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{L^2 - (L-2x)^2}{L^2} = \frac{1}{L^2}(-4x^2 + 4Lx)$$

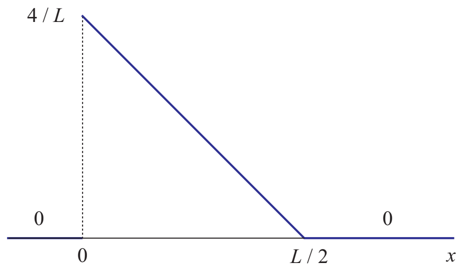


(2) $0 < x < L/2$ のとき,

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{L^2}(-8x + 4L)$$

それ以外では, $f(x) = 0$.





(3)

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{L^2} \int_0^{L/2} x(-8x + 4L) dx = \frac{L}{6}$$

(4)

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{L^2} \int_0^{L/2} x^2(-8x + 4L) dx = \frac{L^2}{24}$$

したがって,

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{L^2}{24} - \left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{L^2}{72}\,.$$

[3] (1) $X \sim N(4, 3^2)$ から

$$P(X \geq 2.47) = P\left(\frac{X-4}{3} \geq \frac{2.47-4}{3}\right) = P\left(Z \geq -0.51\right) = 0.5 + 0.1950 = 0.695$$

ただし, $Z \sim N(0,1)$ である.

(2)

$$0.33 = P(Y \leq a) = P\left(\frac{Y-50}{10} \leq \frac{a-50}{10}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-50}{10}\right) = P\left(Z \geq -\frac{a-50}{10}\right)$$

よって,

$$P\left(0 \leq Z \leq -\frac{a-50}{10}\right) = 0.5 - 0.33 = 0.17.$$

標準正規分布表から

$$-\frac{a-50}{10} = 0.44$$

したがって, $a = 45.6$.

[4] 病気 A に感染している確率と感染していない確率は

$$P(A) = \frac{2}{100}\,, \qquad P(A^c) = \frac{98}{100}\,.$$

検査 B に陽性反応を示す確率は, 条件付確率であって,

$$P(B|A) = 0.8 \qquad P(B|A^c) = 0.1$$

(1) ベイズの公式によって,

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)} \\
&= \frac{\frac{2}{100}\times 0.8}{\frac{2}{100}\times 0.8+\frac{98}{100}\times 0.1} = \frac{1.6}{1.6+9.8} = \frac{1.6}{11.4} = 0.140 \approx 14.0\%.
\end{aligned}
$$

(2) ベイズの公式によって,

$$
\begin{aligned}
P(A^c|B^c) &= \frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(A^c)P(B^c|A^c)+P(A)P(B^c|A)} \\
&= \frac{\frac{98}{100}\times 0.9}{\frac{98}{100}\times 0.9+\frac{2}{100}\times 0.2} = \frac{88.2}{88.2+0.4} = \frac{88.2}{88.6} = 0.995 \approx 99.5\%.
\end{aligned}
$$

[5] $H_0 : m = 20$, $H_1 : m \neq 20$ とおく. 大きさ 9 の標本平均は $\bar{X} \sim N\left(20, \dfrac{0.24^2}{9}\right) = N(20, 0.08^2)$. 規準化して

$$
Z = \frac{\bar{X}-20}{0.08} \sim N(0,1).
$$

実現値 $\bar{x} = 20.19$ を代入して,

$$
z = \frac{20.19-20}{0.08} = 2.375
$$

H_1 から両側検定となる. 有意水準 $\alpha = 0.05$ (5%) に対する棄却域は $|z| \geq 1.96$. 実現値 $z = 2.375$ は棄却域に落ちる. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, 製造ラインに狂いが生じていると判定される.

有意水準 $\alpha = 0.01$ とすると, 両側検定の 1%棄却域は $|z| \geq 2.58$. 実現値 $z = 2.375$ は棄却域に落ちない. したがって, 有意水準 1% では H_0 は棄却されない. （高度に有意ではない）

[6] 省略

[7] (1) 帰無仮説と対立仮説を

$$
H_0 : p = \frac{1}{2} \qquad H_1 : p = 0.6
$$

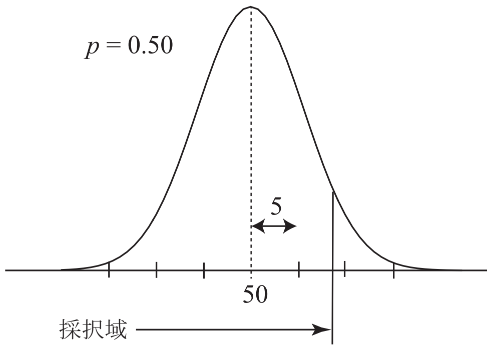
とする. 有意水準 $\alpha = 0.05$ の片側検定を行うことにする.

公平なコインを 100 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(100, 1/2) \approx N(50, 5^2)$. 棄却域は

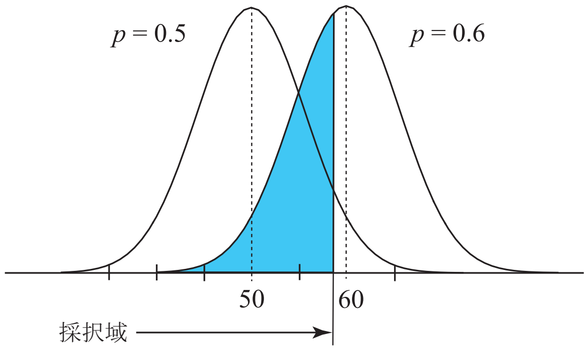
$$
W : \frac{x-50}{5} \geq 1.64 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 50 + 1.64 \times 5 = 58.2
$$

実現値 $x = 57$ は W に落ちない. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却されず, コインは公正であると判定される. この判定が間違っている確率, すなわち, コインは公正ではないのにもかかわらず公正であると判定してまう確率が第 2 種誤り確率である. コインが公正ではない場合, 可能な p は一般には無限にあり, 第 2 種誤り確率を簡単に評価することはできない. このケースでは, $p \neq 0.5$ は $p = 0.6$ を意味するので, 第 2 種誤り確率を計算することができる.

採択域を図示したものが次の図である.



表が出る確率が $p=0.6$ のコインを 100 回投げるときの表の回数を Y とすると, $Y \sim B(100, 0.6) \approx N(60, 24) \approx N(60, 5^2)$ の分布を重ねて書いたものが次の図である.



採択域に実現値が現れる確率は, 網掛け部分の面積であり, これが第 2 種誤り確率 β である.

β 大きい $\Longleftrightarrow$ 採択域が大きい $\Longleftrightarrow$ α 小さい

の関係がみられる. また, α, β とも小さくなるのは, 分布の分散が小さいときであり, それは標本数 n が大きいときである. その他, 教科書等を参照.

(2) $\alpha=0.05$ のとき採択域の上限は $50+1.64\times 5=58.2$ である. これを $p=0.6$ の分布に合わせて,

$$\beta = P(Y \leq 58.2) = P\left(Z \leq \frac{58.2-60}{5}\right) = P(Z \leq -0.36) = 0.5-0.1406 = 0.3594$$

$\alpha=0.01$ のとき採択域の上限は $50+2.33\times 5=61.65$. これを $p=0.6$ の分布に合わせて,

$$\beta = P(Y \leq 61.65) = P\left(Z \leq \frac{61.65-60}{5}\right) = P(Z \leq 0.33) = 0.5+0.1293 = 0.6293$$

[9] (1) 比を考えよう.

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{1-p}$$

よって,

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \geq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{1-p} \geq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad k(1-p) \leq (n-k+1)p$$

$$\Longleftrightarrow\quad k-kp \leq np-kp+p \quad\Longleftrightarrow\quad k \leq np+p$$

したがって, $k = [np+p]$ のとき, $P(X=k)$ が最大になる. ただし, $k = np+p$ のとき,

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = 1$$

になるから, $P(X=k-1) = P(X=k)$ になる.

つまり, $np+p = (n+1)p$ が整数なら, $k = np+p, np+p-1$ がモードとなり, $np+p = (n+1)p$ が整数でないときは, $k = [(n+1)p]$ がモードになる.

(2) 比を考えよう.

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{\lambda^k/k!}{\lambda^{k-1}/(k-1)!} = \frac{\lambda}{k}$$

から,

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad = \frac{\lambda}{k} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad k \leq \lambda \quad \Leftrightarrow \quad k \leq \lambda.$$

したがって, $k \leq [\lambda]$ までは $P(X=k-1) \leq P(X=k)$ であり, $k > [\lambda]$ ならば $P(X=k-1) > P(X=k)$ となる. したがって, $k = [\lambda]$ のときに最大になる. もし, λ が整数であれば, $k = \lambda$ のとき, $P(X=k) = P(X=k-1)$ が最大値となるから, モードは 2 つある.