第10章　濃度の算法

これまでに, 集合 A, B に対して濃度が等しいことを $|A| = |B|$ と書き, 濃度の大小については $|A| \leq |B|$ のような記号を導入した. A, B が有限集合であれば, $|A|, |B|$ はそれらの元の個数を表すので, $|A| = |B|$ や $|A| \leq |B|$ は通常の数に対する等式や不等式と一致する. しかし, 一般の集合 A に対しては, 記号 $|A|$ は集合の濃度を表すものと理解されるのだが, それ自身は単独で定義されていないことは注意を要する. 本章では, 集合の演算に対応して, 濃度に通用する演算を導入して, 濃度が数のようにふるまうことを見てゆこう.

10.1　濃度の相等と大小

一般の集合 A に対して濃度そのものは定義されていないが, $|A|$ の代わりにドイツ文字の小文字を用いて, $|A| = \mathfrak{a}$ のように書いて, 集合 A は濃度 $\mathfrak{a}$ をもつという. つまり, 濃度 $\mathfrak{a}$ というときは, その濃度をもつ集合 A が念頭にあって, それと濃度が等しい集合 $B, C, \ldots$ とともに,

$$|A| = |B| = |C| = \cdots = \mathfrak{a} \tag{10.1}$$

という等式を代表するものと理解する. すでに導入した可算濃度 $\aleph_0$ や連続体濃度 $\aleph$ はこのように取り扱ってきた.

有限集合 A に対しては, A に属する元の個数のことを (単独の) 記号 $|A|$ で表し, A の濃度と呼んでいる (第 7.1 節). 有限集合の濃度を有限濃度と総称すれば, 有限濃度は $n \in \mathbb{N}_0$ で与えられることになる.[1)] したがって, $|A| = n$ は集合 A が n 個の元をもつことを意味するが, 同時に, 集合 A は濃度 n をもつことを表す. 以下では, $n \in \mathbb{N}_0$ を数としてだけではなく, (有限) 濃度の意味でも用いるが, その区別は文脈によって大概は明らかである.

[1)] ここで $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ である (第 6.1 節).

■ 濃度の相等 上で述べた用法にしたがって, 濃度の相等を定義する. 2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対して, 集合 A, B で

$$\mathfrak{a} = |A|, \quad \mathfrak{b} = |B|, \quad |A| = |B|$$

を満たすものが存在するとき, 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ は等しいと言い,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

と書く. 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ をもつ集合は一意ではなく, 別の集合 A_1, B_1 で $\mathfrak{a} = |A_1|$, $\mathfrak{b} = |B_1|$ を満たすものをとることができる. このとき,

$$|A| = |A_1| = \mathfrak{a}, \qquad |B| = |B_1| = \mathfrak{b},$$

であるから, $|A| = |B|$ と $|A_1| = |B_1|$ は同値な条件となる (定理 7.2). したがって, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ならば, 集合 A, B が $\mathfrak{a} = |A|$, $\mathfrak{b} = |B|$ を満たす限り, いつでも $|A| = |B|$ となる.

定 理 10.1 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して次が成り立つ.

(1) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

(2) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \ \Rightarrow \ \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

(3) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \ \Rightarrow \ \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

証 明 濃度の相等の定義と定理 7.2 から明らかである. ∎

■ 濃度の大小 すでに第 9.1 節において, 集合の濃度の比較を議論した. ここでは, それを濃度の大小という形に整理しておく. 2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対して, 集合 A, B で

$$|A| = \mathfrak{a}, \quad |B| = \mathfrak{b}, \quad |A| \leq |B|$$

を満たすものが存在するとき,

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$$

と定義する. 同様に, 集合 A, B で

$$|A| = \mathfrak{a}, \quad |B| = \mathfrak{b}, \quad |A| < |B|$$

を満たすものが存在するとき,

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$$

と定義する. 定義によって, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ または $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ を意味し, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ と $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ は同時に起こらない.

定 理 10.2 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}$.

(2) $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

(3) $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c} \ \Rightarrow\ \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$.

証 明 (1) は明らかである.

(2) $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ から集合 A, B で $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$, $|A| \leq |B|$ を満たすものが存在する. 同様に, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$ から集合 A_1, B_1 で $|A_1| = \mathfrak{a}$, $|B_1| = \mathfrak{b}$, $|B_1| \leq |A_1|$ を満たすものが存在する. そうすると, $|A_1| = |A|$, $|B_1| = |B|$ となり, $|B_1| \leq |A_1|$ から $|B| \leq |A|$ が従う. カントル-ベルンシュタインの比較定理 9.9 によって, $|A| = |B|$ となる. したがって, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ が成り立つ.

(3) $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ から集合 A, B で $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$, $|A| \leq |B|$ を満たすものが存在する. 同様に, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ から集合 B_1, C で $|B_1| = \mathfrak{b}$, $|C| = \mathfrak{c}$, $|B_1| \leq |C|$ を満たすものが存在する. $|B_1| = |B|$ であるから, $|B| \leq |C|$ となる. 濃度の推移性 (定理 9.4) によって, $|A| \leq |C|$ となるから, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ が成り立つ. ■

定理 10.1, 定理 10.2 は, 特別な場合として当然, 有限濃度に対しても成り立つ. 有限濃度は 0 または自然数で与えられることを思い出すと, そこに述べられていることは, 数に関する基本的な性質である. つまり, 自然数に対して定義されている相等や大小が, 濃度に対して自然に拡張されたと言える.

■ 濃度の比較可能性 ここに至って, 2 つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ について,

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} > \mathfrak{b},$$

のいずれか 1 つが成り立つのではないかと推察されよう. このことは正しいのだが, 今の段階ではまだ準備不足で証明できない. 第 13.2 節で扱う.

10.2 濃度の和

2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対して $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を定義したい. 有限濃度に対しては自然数の和に他ならないが, これを集合を通して見直すことで, 一般の濃度の和を導入する.

有限濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が与えられたとして, 集合 A, B で

$$|A| = \mathfrak{a}, \quad |B| = \mathfrak{b}, \quad A \cap B = \emptyset$$

を満たすものをとろう．自然数の集合などを考えれば，そのような A, B は確かに存在する．このとき，

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=|A \cup B| \tag{10.2}$$

が成り立つ (定理 6.12)．この考え方を一般の濃度に拡張しよう．まず，2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対して $|A|=\mathfrak{a}$, $|B|=\mathfrak{b}$ を満たす集合 A, B が存在することはよい．そもそも，濃度を議論するときは，その濃度をもつ集合を考えるのが前提である．しかし，A, B を互いに素にとることはできるだろうか．今の段階では，A, B を互いに素と仮定できないが，それらをもとにして順序対の集合

$$A_1=\{(1, x) \mid x \in A\}, \qquad B_1=\{(2, y) \mid y \in B\},$$

を作れば，$|A_1|=|A|=\mathfrak{a}$, $|B_1|=|B|=\mathfrak{b}$ かつ $A_1 \cap B_1=\emptyset$ となる．したがって，初めに戻って，与えられた 2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対して，

$$|A|=\mathfrak{a}, \quad |B|=\mathfrak{b}, \quad A \cap B=\emptyset \tag{10.3}$$

を満たす集合 A, B は存在する．そこで，これらを用いて，

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=|A \cup B| \tag{10.4}$$

と定義する．ただし，2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対して，(10.3) を満たす集合 A, B の選び方は一意的でないので，上の定義 (10.4) が機能するためには，別の A_1, B_1 をとったとしても，$|A \cup B|=|A_1 \cup B_1|$ が成り立たなくてはならない．

補 題 10.3 集合 A, B, A_1, B_1 に対して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} & |A|=|A_1|, \quad |B|=|B_1|, \quad A \cap B=\emptyset, \quad A_1 \cap B_1=\emptyset \\ & \Rightarrow \quad |A \cup B|=|A_1 \cup B_1|. \end{aligned}$$

証 明 仮定から，全単射 $g: A \longrightarrow A_1$ と $h: B \longrightarrow B_1$ が存在する．A, B は互いに素なので，写像 $f: A \cup B \longrightarrow A_1 \cup B_1$ が

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x \in A, \\ h(x), & x \in B, \end{cases}$$

で定義される．g, h が全単射で，A_1 と B_1 が互いに素であることから，f が全単射であることがわかる．したがって，$|A \cup B|=|A_1 \cup B_1|$ である． ∎

こうして, 濃度の和が定義できたので, 基本的な演算法則を導いて, 濃度が数と同じように振舞う様子を見ておこう.

定 理 10.4 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, 次が成り立つ.
(1) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$.
(2) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$.
(3) $0+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+0=\mathfrak{a}$.

証 明 (1) まず, $|A|=\mathfrak{a}$, $|B|=\mathfrak{b}$ を満たす互いに素な集合 A, B を選んでおく. 和集合に関する交換法則 $A\cup B=B\cup A$ によって,

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=|A\cup B|=|B\cup A|=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$$

が成り立つ.

(2) は和集合の結合法則に帰着すればよい. 詳細は読者に委ねる.

(3) は $\emptyset\cup A=A\cup\emptyset=A$ から明らかである. ∎

定 理 10.5 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して,

$$\mathfrak{a}\le\mathfrak{b} \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{c}\le\mathfrak{b}+\mathfrak{c}.$$

証 明 $|A|=\mathfrak{a}$, $|B|=\mathfrak{b}$, $|C|=\mathfrak{c}$ を満たす互いに素な集合 A, B, C を選んでおく. $\mathfrak{a}\le\mathfrak{b}$ なので, 単射 $f: A\longrightarrow B$ が存在する. $A\cap C=\emptyset$ であるから, 写像 $g: A\cup C\longrightarrow B\cup C$ が

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A,\\ x, & x\in C,\end{cases}$$

によって定義される. $B\cap C=\emptyset$ に注意すれば, g が単射であることがわかる. したがって, $|A\cup C|\le|B\cup C|$ となり, $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\le\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ が成り立つ. ∎

問 10.1 3 つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ であっても $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}<\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ が成り立つとは限らない. 例を示せ.

10.3 濃度の積

2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ の積は, $|A|=\mathfrak{a}$, $|B|=\mathfrak{b}$ となる集合 A, B をとって,

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=|A\times B| \tag{10.5}$$

として定める. 濃度の和と同様に, 集合の取り方によらず積が定まっていることが必要であるが, それは容易に確かめられる (補題 7.15).

定 理 10.6 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$.

(2) $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$.

(3) $\mathfrak{a}1 = 1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

(4) $\mathfrak{a}0 = 0\mathfrak{a} = 0$.

証 明 $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$, $|C| = \mathfrak{c}$ を満たす集合 A, B, C を選んでおく.

(1) 写像 $f : A \times B \longrightarrow B \times A$ を $f(x, y) = (y, x)$ で定義すれば, f は全単射になる. したがって, $|A \times B| = |B \times A|$ であり, 主張が成り立つ.

(2) 定義によって,

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = |(A \times B) \times C|, \qquad \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = |A \times (B \times C)|$$

が成り立つ. 一方, 直積集合 $(A \times B) \times C$ の元 $((x, y), z)$ と $A \times (B \times C)$ の元 $(x, (y, z))$ を対応させることで, それら 2 つの集合間の全単射が定義される. したがって, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ が成り立つ.

(3) B をただ 1 つの元からなる集合として $B = \{b\}$ とおく. 写像 $f : A \longrightarrow A \times B$ を $f(x) = (x, b)$ で定義すれば, f は全単射になり, $|A| = |A \times B|$ が成り立つ. $|B| = 1$ であるから, 定義によって $|A \times B| = \mathfrak{a}1$ となる. したがって, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}1$. 同様に, あるいは (1) を用いて $\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a}$ もわかる.

(4) $B = \emptyset$ とすれば, $|B| = 0$ である. このとき, $A \times B = \emptyset$ であるから, $\mathfrak{a}0 = 0$ となる同様に, あるいは (1) を用いて $0\mathfrak{a} = 0$ もわかる. ■

通常, 直積集合について, $(A \times B) \times C$ と $A \times (B \times C)$ を区別せず, $A \times B \times C$ と書く. 定理 10.6 (2) は, このような扱いに合わせて濃度を考えてよいことを言っており, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ と書いてよい.

定 理 10.7 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{a}\mathfrak{c} \leq \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

証 明 $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$, $|C| = \mathfrak{c}$ を満たす互いに素な集合 A, B, C を選んでおく. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ なので, 単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在する. そうすると, 単射 $g : A \times C \longrightarrow B \times C$ が $g(x, y) = (f(x), y)$ によって定義される. したがって, $|A \times C| \leq |B \times C|$ が成り立ち, $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \leq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ が示された. ■

問 10.2 3 つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \neq 0$ であっても $\mathfrak{a}\mathfrak{c} < \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ が成り立つとは限らない. 例を示せ.

定 理 10.8 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

証 明 集合 A, B, C を $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$, $|C| = \mathfrak{c}$, かつ $B \cap C = \emptyset$ を満たすように選ぶ. 直積の定義から,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

であって, 右辺は互いに素な 2 つの集合の和集合になる. したがって,

$$|A \times (B \cup C)| = |(A \times B) \cup (A \times C)| = |A \times B| + |A \times C| = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

となる. 一方, 左辺は

$$|A \times (B \cup C)| = |A| \cdot |B \cup C| = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$$

となり, 示すべき等式が得られる. ■

ここまでの議論をまとめておこう. まず, 有限濃度に対して定義される和と積 (これは, $\mathbb{N}_0$ に本来備わっている和と積と同じ) が, 無限濃度も含めて一般の濃度に対して拡張された. そして, 一連の定理 10.4–10.8 によって, $\mathbb{N}_0$ の和と積が満たす演算法則がそのまま一般の濃度に対して拡張されていることがわかる. 濃度を扱う上で, すこぶる有用である.

問 10.3 自然数 n と任意の濃度 $\mathfrak{a}$ に対して,

$$\overbrace{\mathfrak{a} + \cdots + \mathfrak{a}}^{n} = n\mathfrak{a}$$

が成り立つことを示せ. ただし, 左辺は濃度 $\mathfrak{a}$ を n 回繰り返してとった和, 右辺は有限濃度 n と濃度 $\mathfrak{a}$ との積である.

10.4 濃度のべき

2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ のべきは, $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$ となる集合 A, B をとって,

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = |\mathrm{Map}(B, A)| \tag{10.6}$$

として定める. 集合の取り方によらず, (10.6) の右辺が定まっていることは次のようにして確かめられる.

補 題 10.9 集合 A, B, A_1, B_1 に対して, 次が成り立つ.

$$|A| = |A_1|,\ \ |B| = |B_1| \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Map}(A, B)| = |\mathrm{Map}(A_1, B_1)|.$$

証 明　仮定から, 全単射 $f : A \longrightarrow A_1$ と $g : B \longrightarrow B_1$ が存在する. $F \in \mathrm{Map}(A, B)$ に対して, 合成写像 $g \circ F \circ f^{-1} : A_1 \longrightarrow B_1$ を考えて, これを $\varphi(F)$ と書く.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A_1 \arrow[r, "\varphi(F)"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

そうすると, 写像 $\varphi : \mathrm{Map}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Map}(A_1, B_1)$ が得られる. これが全単射になることが容易にわかる. ∎

定 理 10.10 濃度 $\mathfrak{a}$ に対して次が成り立つ.

(1) $\mathfrak{a} \neq 0 \Rightarrow 0^{\mathfrak{a}} = 0$.

(2) $\mathfrak{a}^0 = 1$.

(3) $1^{\mathfrak{a}} = 1$.

(4) $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}$.

証 明　(1) $A \neq \emptyset$ に対して, 写像 $A \to \emptyset$ は存在しない (第 4.1 節). したがって, $|\mathrm{Map}(A, \emptyset)| = 0$ である.

(2) 任意の集合 A に対して, 写像 $\emptyset \to A$ はただ 1 個存在する (第 4.1 節). したがって, $|\mathrm{Map}(\emptyset, A)| = 1$ である.

(3) $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = 1$ とする. B に属するただ 1 個の元を b とする. 写像 $f : A \to B$ は, すべての $x \in A$ に対して $f(x) = b$ となるものに限る. したがって, $|\mathrm{Map}(A, \{b\})| = 1$ である.

(4) $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = 1$ とする. B に属するただ 1 個の元を b とする. 写像 $f : B \to A$ は, $f(b)$ によって決まるので, 対応 $f \mapsto f(b)$ が全単射 $\mathrm{Map}(\{b\}, A) \longrightarrow A$ を与える. したがって, $|\mathrm{Map}(\{b\}, A)| = |A|$ が成り立つ. ∎

定 理 10.11 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$.

(2) $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$.

(3) $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$.

証 明 $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$, $|C| = \mathfrak{c}$ を満たす集合 A, B, C を選んでおく. さらに, (1) の証明では $B \cap C = \emptyset$ を満たすようにとる. (1)–(3) のいずれの証明も, 両辺に対応する集合を A, B, C を用いて表して, 集合間に全単射を構成すればよい. 実際, (1) では,

$$\mathrm{Map}(B \cup C, A) \longleftrightarrow \mathrm{Map}(B, A) \times \mathrm{Map}(C, A), \tag{10.7}$$

(2) では,

$$\mathrm{Map}(B \times C, A) \longleftrightarrow \mathrm{Map}(C, \mathrm{Map}(B, A)), \tag{10.8}$$

(3) では,

$$\mathrm{Map}(C, A \times B) \longleftrightarrow \mathrm{Map}(C, A) \times \mathrm{Map}(C, B), \tag{10.9}$$

の対応を与える全単射を構成する. いずれも容易であるが, ここではやや込み入っている (2) を扱い, 残りは読者に委ねよう (問 10.4, 問 10.5).

さて, $f \in \mathrm{Map}(B \times C, A)$ とする. $(y, z) \in B \times C$ に対して $f(y, z) \in A$ が定まるのだが, $z \in C$ を固定して, $y \mapsto f(y, z)$ を考えると, これは B から A への写像になる. この写像を

$$F_z(y) = f(y, z), \qquad y \in B, \quad z \in C,$$

と書けば, $z \mapsto F_z$ が C から $\mathrm{Map}(B, A)$ への写像になる. この写像は, 初めに与えた f ごとに決まるので $\varphi(f)$ と書くと, $\varphi(f) \in \mathrm{Map}(C, \mathrm{Map}(B, A))$ である. こうして, 写像 $\varphi : \mathrm{Map}(B \times C, A) \longrightarrow \mathrm{Map}(C, \mathrm{Map}(B, A))$ が定義できた. 定義の仕方から, $[\varphi(f)](z) = F_z$ であって,

$$[[\varphi(f)](z)](y) = F_z(y) = f(y, z)$$

である. 定義に基づいて, 写像 $\varphi : \mathrm{Map}(B \times C, A) \longrightarrow \mathrm{Map}(C, \mathrm{Map}(B, A))$ が全単射になることが容易に確認できる. そうすれば,

$$|\mathrm{Map}(B \times C, A)| = |\mathrm{Map}(C, \mathrm{Map}(B, A))|$$

が成り立つ．左辺は

$$|\mathrm{Map}(B\times C, A)| = |A|^{|B\times C|} = |A|^{|B||C|} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

となり, 右辺は,

$$|\mathrm{Map}(C, \mathrm{Map}(B, A))| = |\mathrm{Map}(B, A)|^{|C|} = (|A|^{|B|})^{|C|} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}}$$

となる．こうして, 主張は示された． ∎

問 10.4 集合 A, B, C で $B\cap C=\emptyset$ を満たすものに対して, 対応 (10.7) を与える全単射を 1 つ構成せよ．

問 10.5 集合 A, B, C に対して, 対応 (10.9) を与える全単射を 1 つ構成せよ．

定 理 10.12 濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ に対して,

$$\mathfrak{a}\le\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}\le\mathfrak{d} \Rightarrow \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \le \mathfrak{c}^{\mathfrak{d}}.$$

証 明　$\mathfrak{c}=0$ のときは自明であるから, $\mathfrak{c}\neq 0$ とする．$|A|=\mathfrak{a}$, $|B|=\mathfrak{b}$, $|C|=\mathfrak{c}$, $|D|=\mathfrak{d}$ を満たす集合 A, B, C, D と単射 $f: A\longrightarrow C$, $g: B\longrightarrow D$, および $c\in C$ を選んでおく．さらに, $D_1=g(B)$ として全単射 $g_1: B\longrightarrow D_1$ を $g_1(x)=g(x)$ で定義する．さて, 写像

$$\varphi : \mathrm{Map}(B, A) \longrightarrow \mathrm{Map}(D, C) \tag{10.10}$$

を $F\in\mathrm{Map}(B, A)$ に対して,

$$[\varphi(F)](x) = \begin{cases} f\circ F\circ g_1^{-1}(x), & x\in D_1, \\ c, & x\in D\setminus D_1, \end{cases}$$

で定義する．φ は単射であることを示すために, $F_1, F_2\in\mathrm{Map}(B, A)$, $\varphi(F_1)=\varphi(F_2)$ とする．定義によって, $x\in D_1$ に対して,

$$f\circ F_1\circ g_1^{-1}(x) = f\circ F_2\circ g_1^{-1}(x)$$

が成り立つ．まず, f は単射であるから $F_1\circ g_1^{-1}(x)=F_2\circ g_1^{-1}(x)$ となり, 次に, $g_1: B\longrightarrow D_1$ は全単射であるから $F_1=F_2$ がわかる．こうして, (10.10) の写像 φ は単射である．したがって, $|\mathrm{Map}(B, A)|\le|\mathrm{Map}(D, C)|$ が示された． ∎

定 理 10.13 自然数 n と任意の濃度 $\mathfrak{a}$ に対して,

$$\overbrace{\mathfrak{a}\cdots\mathfrak{a}}^{n} = \mathfrak{a}^n \tag{10.11}$$

が成り立つ. ただし, 左辺は濃度 $\mathfrak{a}$ を n 回繰り返して積をとったものであり, 右辺は有限濃度 n と濃度 $\mathfrak{a}$ とのべきである.

証 明 $|A| = \mathfrak{a}$ となる集合 A をとる. 写像 $\varphi : \mathrm{Map}([n], A) \longrightarrow A^n$ を

$$\varphi(f) = (f(1), f(2), \ldots, f(n)), \qquad f \in \mathrm{Map}([n], A)$$

で定義すると, 容易にわかるように φ は全単射である. したがって,

$$|\mathrm{Map}([n], A)| = |A^n|$$

が成り立つ. 左辺は, 濃度のべきの定義から,

$$|\mathrm{Map}([n], A)| = |A|^{|[n]|} = \mathfrak{a}^n$$

である. 右辺は, 直積集合の濃度なので,

$$|A^n| = |\overbrace{A \times \cdots \times A}^{n}| = \overbrace{\mathfrak{a}\cdots\mathfrak{a}}^{n}$$

である. したがって, (10.11) が成り立つ. ∎

10.5 可算濃度と連続体濃度

可算濃度 $\aleph_0$ とと連続体濃度 $\aleph$ を含む公式を導いておく. 以下では, 有限濃度 n と数 $n \in \mathbb{N}_0$ は区別せずに扱う.

定 理 10.14 有限濃度 n, 可算集合の濃度 $\aleph_0$, 連続体の濃度 $\aleph$ について, 次が成り立つ.

(1) $n + \aleph_0 = \aleph_0$.

(2) $n + \aleph = \aleph$.

(3) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. したがって,

$$\overbrace{\aleph_0 + \cdots + \aleph_0}^{n} = n\aleph_0 = \aleph_0\,.$$

(4) $\aleph + \aleph = \aleph$. したがって,

$$\overbrace{\aleph + \cdots + \aleph}^{n} = n\aleph = \aleph.$$

(5) $\aleph_0 + \aleph = \aleph$.

証 明　(1) 有限集合と可算集合の和集合は可算集合である (補題 7.9) から明らかである．本節で整理してきた濃度の演算法則を使ってもよい．まず, 明らかな包含関係

$$\mathbb{N} \subset \{-1, -2, \ldots, -n\} \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

と $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$ に注意すると,

$$\aleph_0 \leq |\{-1, -2, \ldots, -n\} \cup \mathbb{N}| = n + \aleph_0 \leq \aleph_0$$

がわかる．ここで, 定理 10.2 (2) を用いて $n + \aleph_0 = \aleph_0$ が示される．

(2) 明らかな包含関係

$$(0, 1) \subset \{1, 2, \ldots, n\} \cup (0, 1) \subset \mathbb{R}$$

と $|(0, 1)| = |\mathbb{R}| = \aleph$ から,

$$\aleph \leq |\{1, 2, \ldots, n\} \cup (0, 1) = n + \aleph \leq \aleph$$

が成り立つ．したがって, $n + \aleph = \aleph$ である．

(3) 2 つの可算集合の和集合は可算集合である (補題 7.9) から $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ は明らか．このことを繰り返して,

$$\overbrace{\aleph_0 + \cdots + \aleph_0}^{n} = \aleph_0$$

がわかる．左辺が $n\aleph_0$ に等しいことは問 10.3 に述べた．

(4) 包含関係

$$(0, 1) \subset (0, 1) \cup (1, 2) \subset \mathbb{R}$$

と $|(0, 1)| = |(1, 2)| = |\mathbb{R}| = \aleph$ から,

$$\aleph \leq |(0, 1) \cup (1, 2)| = \aleph + \aleph \leq \aleph$$

となり, $\aleph + \aleph = \aleph$ がわかる．残りは, (3) と同様である．

(5) 明らかな不等式 $0 \leq \aleph_0 \leq \aleph$ の各辺に $\aleph$ を加えると,

$$\aleph \leq \aleph_0 + \aleph \leq \aleph + \aleph$$

となる. (4) によって, $\aleph + \aleph = \aleph$ なので, $\aleph_0 + \aleph = \aleph$ がわかる. ∎

定 理 10.15 可算集合の濃度 $\aleph_0$, 連続体の濃度 $\aleph$ について, 次が成り立つ.

(1) $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$. したがって, 自然数 n に対して,

$$\overbrace{\aleph_0 \cdots \aleph_0}^{n} = \aleph_0^n = \aleph_0 .$$

(2) $\aleph\aleph = \aleph$. したがって, 自然数 n に対して,

$$\overbrace{\aleph \cdots \aleph}^{n} = \aleph^n = \aleph.$$

(3) $\aleph_0 \aleph = \aleph$.

証 明 (1) 可算集合の直積は可算集合である (定理 7.16) から, $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ が成り立つ. 後半は, この等式を繰り返し適用して, 定理 10.13 を用いればよい.

(2) 定理 9.13 によって $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ であるから, $\aleph\aleph = \aleph$ が成り立つ. 後半は, この等式を繰り返し適用して, 定理 10.13 を用いればよい.

(3) $1 \leq \aleph_0 \leq \aleph$ の各辺に $\aleph$ をかけて, (2) の結果を用いると,

$$\aleph \leq \aleph_0 \aleph \leq \aleph\aleph = \aleph$$

が得られるから, $\aleph_0 \aleph = \aleph$ がわかる. ∎

定 理 10.16 可算集合の濃度 $\aleph_0$, 連続体の濃度 $\aleph$ について, 次が成り立つ.

(1) $2^{\aleph_0} = \aleph$.

(2) $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

証 明 (1) 定理 8.11 で $|2^{\mathbb{N}}| = \aleph$ を示した.

(2) 明らかな不等式 $2 \leq \aleph_0 \leq \aleph$ に定理 10.12 を適用すると,

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq \aleph^{\aleph_0} \tag{10.12}$$

が得られる. (10.12) の左辺は, (1) によって $\aleph$ である. 一方, 右辺は, (1) と定理 10.15 を順に適用して,

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

となる．したがって, $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$ となる． ∎

問 10.6 平面上の円をすべて集めてできる集合の濃度を求めよ．

問 10.7 実数 $\mathbb{R}$ を定義域として, 実数 $\mathbb{R}$ に値をとる連続関数の全体を $C(\mathbb{R})$ とする．連続関数 $f(x)$ は有理数 x に対する値で一意的に定まることを用いて, $|C(\mathbb{R})| = \aleph < |\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = 2^{\aleph}$ を示せ．

■ 一般連続体仮説　連続体仮説は, $\aleph_0$ より真に大きく, $\aleph$ より真に小さい濃度は存在しないことを主張する．ここで, $\aleph = 2^{\aleph_0}$ であることに基づいて, 連続体仮説を一般化すると, 「任意の無限濃度 $\mathfrak{a}$ に対して, $\mathfrak{a}$ より真に大きく, $2^{\mathfrak{a}}$ より真に小さい濃度は存在しない」となる．これを一般連続体仮説という．一般連続体仮説は, 連続体仮説と同様に, ZFC 公理系から独立であることがコーエンによって証明された．

一方, ZF 公理系に一般連続体仮説を加えれば選択公理が導かれることも知られている．このことは, 1926 年にリンデンバウムとタルスキが証明なしで発表した．シェルピンスキは, その証明が手に入らないので自ら証明して, 1947 年にそれを発表した．[2] ZF 公理系, 選択公理, 連続体仮説, 一般連続体仮説をめぐる様々な公理の関連性については深い研究が今も続いている．

[2] Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969). ポーランドの数学者．集合論や位相数学において多大な貢献をした．フラクタルの研究でも知られ, シェルピンスキの三角形などに名を残している．1920 年にワルシャワで創刊された数学雑誌 Fundamenta Mathematicae の創刊者の一人であり, 集合論に関する多数の論文を発表した．この論文も同雑誌に収められている．