

第11章 選択公理

集合論が発展する過程で、数学の深みの中から現れた選択公理は大きな論争を巻き起こした。その後、選択公理は集合論の ZF 公理系から独立であることが示されたが、今では多くの分野であまり意識されていない。本章では、選択公理について基本的な理解を深めながら、その現れ方と有用性を垣間見たい。

11.1 集合系の直積

集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ に対して、次の性質を満たす写像

$$f: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda} A_\lambda, \quad f(\lambda) \in A_\lambda,$$

の全体を

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \text{あるいは簡単に} \quad \prod_{\lambda} A_\lambda \quad (11.1)$$

のように表し、集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ の直積集合または直積という。直積 (11.1) の元を $(f(\lambda) | \lambda \in \Lambda)$ あるいは $(f(\lambda))_\lambda$ のようにも書く。集合系の定義において、もとより $\Lambda \neq \emptyset$ であることに注意しておこう。

■ 順序対, 有限列との関連 2つの集合 A_1, A_2 に対して、順序対の集合が

$$A_1 \times A_2 = \{(a, b) | a \in A_1, b \in A_2\} \quad (11.2)$$

によって定義され、これを直積と呼んだ (第 4.1 節, 第 6.4 節)。同様に、集合 A_1, A_2, \dots, A_n が与えられたときは、順序対の繰り返しとして有限列

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1 \in A_1, \quad x_2 \in A_2, \quad \dots, \quad x_n \in A_n,$$

が得られ, それらの全体

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_k \in A_k, k = 1, 2, \dots, n\} \quad (11.3)$$

を A_1, A_2, \dots, A_n の直積というのだった (第 6.4 節).

一方, 2 つの集合 A_1, A_2 , あるいは, より一般に集合の列 A_1, \dots, A_n は添字で区別されているので, $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の集合系 $(A_k \mid k \in \{1, 2, \dots, n\})$ と見なされる. したがって, (11.1) の意味での直積

$$\prod_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} A_k \quad (11.4)$$

が定義される. そうすると, 直積という名称が, 順序対や有限列の集合として導入した直積 (11.2), (11.3) と集合系の直積 (11.4) との 2 通りに用いられることになる. 一見, 紛らわしいが, 問題はないことを確認しておこう.

定義によって, 直積 (11.4) の元は写像

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \quad (11.5)$$

であって, すべての k に対して $f(k) \in A_k$ を満たす. そうすると, 対応

$$f \mapsto (f(1), f(2), \dots, f(n))$$

は全単射

$$\prod_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} A_k \longrightarrow A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad (11.6)$$

を与える. この全単射を通して, 2 通りの直積を区別せずに同一視する. 簡単に言えば, (11.4) の元 f は写像として扱うが, f の像を $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ のように配列することで (11.3) の元としても扱うことができ, それらは本質的に同じということである.

ただし, 写像 f の像 $f(1), f(2), \dots, f(n)$ から有限列をつくる時, その並べ方には任意性がある. たとえば, $f(1)$ と $f(2)$ の順序を入れ替えて, 対応

$$f \mapsto (f(2), f(1), f(3), \dots, f(n))$$

をつくれれば, 全単射

$$\prod_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} A_k \longrightarrow A_2 \times A_1 \times A_3 \times \cdots \times A_n$$

が得られる. もちろん,

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n \neq A_2 \times A_1 \times A_3 \times \cdots \times A_n$$

であることに注意しよう. そこで, 添字集合が $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ のように自然な順序をもつ場合は, 慣例として, 集合系の直積とその順序による有限列の集合を同一視して,

$$\prod_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} A_k = \prod_{k=1}^n A_k = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad (11.7)$$

とする.

■ 無限列の場合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 上の集合系 $(A_n | n \in \mathbb{N})$ に対しても, (11.7) にならって,

$$\begin{aligned} \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n &= \prod_{k=1}^{\infty} A_k \\ &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) | x_n \in A_n, n = 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

とする. ただし, 上のように定義するだけなら何ら問題はないのだが, 議論の対象として意味のある集合になるかどうかは選択公理による (第 11.2 節).

■ 同一集合の直積 集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ において, A_λ がすべて同じで $A_\lambda = A$ の場合を考えよう. 直積の定義によって, $\prod_\lambda A$ の元は写像 $f: \Lambda \rightarrow \bigcup_\lambda A_\lambda = A$ であって, $f(\lambda) \in A_\lambda = A$ を満たすものとなる. これは, f が Λ から A への写像であると言っているに過ぎない. したがって,

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A = \text{Map}(\Lambda, A) \quad (11.8)$$

が成り立つ.¹⁾ 特に, $\Lambda = \mathbb{N}$ であれば,

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} A = \text{Map}(\mathbb{N}, A) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) | x_n \in A, n \in \mathbb{N}\}$$

¹⁾(11.8) の左辺を A^Λ と書く流儀もあり, 転じて, $\text{Map}(\Lambda, A)$ も A^Λ と書くこともある. 濃度が $|\text{Map}(\Lambda, A)| = |A|^{|\Lambda|}$ となることも整合がとれている.

であり, A の元からなる無限列の集合である.

■ 集合系の直和 集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ では, $\lambda \neq \mu$ であっても $A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$ とは限らないが, あたかも A_λ が互いに素になっているかのごとく和集合を考えたいこともある. まず, 集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ の和集合を

$$A = \bigcup_{\lambda} A_\lambda$$

とおく. 各 λ に対して, 直積集合 $\Lambda \times A$ の部分集合を

$$\tilde{A}_\lambda = \{(\lambda, x) | x \in A_\lambda\}$$

で定義する. それらの和集合を集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ の直和集合といい,

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda \quad (11.9)$$

で表す. (11.9) の右辺では, $\lambda \neq \mu$ ならば $\tilde{A}_\lambda \cap \tilde{A}_\mu = \emptyset$ となっている.

11.2 選択公理

集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ の直積集合 $\prod_{\lambda} A_\lambda$ の元 f は, 写像 $f: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda} A_\lambda$ であって $f(\lambda) \in A_\lambda$ を満たすものである. したがって, もし $A_\lambda = \emptyset$ となるような λ が存在すると, $f(\lambda) \in A_\lambda$ が成立しえないので,

$$\prod_{\lambda} A_\lambda = \emptyset$$

となる. このことを対偶で述べれば,

$$\prod_{\lambda} A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } A_\lambda \neq \emptyset \quad (11.10)$$

となる. では, (11.10) の逆

$$\text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{\lambda} A_\lambda \neq \emptyset \quad (11.11)$$

は成り立つだろうか. 逆は必ずしも真ならずであるが.

もし Λ が有限ならば, (11.7) に示したように, 直積集合は順序対または有限列に帰着されるので, (11.11) は当然成り立つ. ところが, Λ が無限集合の場合はそうはいかない. この違いを理解するためには, 有限の場合に「当然成り立つ」とした根拠を明らかにする必要がある. 実際, 集合論の発展とともに, このような問題が認識され始め, 大論争になった. 重要なことは, 議論の前提を明確にすることであり, ものの集まりをもって集合とするような素朴な扱いでは解決は難しい. 結果から言うと, Λ が有限の場合は, ZF 公理系 (と論理) だけから (11.11) が証明される. 大雑把には, 順序対の存在は公理に含まれており, 順序対を繰り返すことで有限列の存在が数学的帰納法で証明される. しかし, Λ が無限集合になると, この議論が通用せず, ZF 公理系の下で (11.11) を証明することができない. したがって, 必要なら証明なしで公理として認めざるを得ない. この公理こそが選択公理である.

選択公理には同値な述べ方が何通りかある. 大まかには, 選択集合を用いるか, 選択関数を用いるか, あるいは直積集合を用いることになるが, それぞれに多少のバリエーションがある. ここでは, 使いやすく簡潔なものを採用しよう.²⁾

(AC1) Ω を空でない集合族とする. もし $\emptyset \notin \Omega$ であり, Ω に属する集合が互いに素であれば, 集合 $A \subset \bigcup \Omega$ で,³⁾ すべての $X \in \Omega$ に対して $|A \cap X| = 1$ となるものが存在する. この集合 A を集合族 Ω の**選択集合**という.

(AC2) Ω を空でない集合族とする. もし $\emptyset \notin \Omega$ であれば, 写像 $f: \Omega \rightarrow \bigcup \Omega$ ですべての $X \in \Omega$ に対して $f(X) \in X$ となるものが存在する. この写像 f を集合族 Ω の**選択関数**という.

(AC3) 集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ において, すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ であれば, 直積集合は $\prod_\lambda A_\lambda \neq \emptyset$ を満たす.

すぐに証明するが, (AC1)–(AC3) は同値な命題である. これら (のうちの 1 つ) を**選択公理** という. (AC1) と (AC2) において, 集合族 Ω 自身が空ならば命題は自明に成り立つので, Ω を単に集合族としても同じことである. ここでは, 応用を考えて, 集合族 Ω をあらかじめ空ではないと断った. 集合の公理 (S10) と

²⁾ツェルメロは, 選択公理を用いて整列可能定理 (第 13.3 節) を証明した (1904). そこには選択公理という名称は現れていないが, (AC2) を「原理」と称して証明なしで認めるという立場を表明し, 大論争を引き起こした. それ以前にも選択公理が陰に現れてはいたようだが, 明確に選択公理を主張したのはツェルメロが最初であり, その功績は大きい. その後, ツェルメロは集合の公理系を提唱するが, その中に選択公理という名称をもって (AC1) がほぼその形で現れている (1908).

³⁾集合族 Ω に対して, その和集合が $\bigcup \Omega = \bigcup_{X \in \Omega} X$ で定義される. 第 4.5 節を参照せよ.

して述べた選択公理 (第 3.3 節) は, 述べ方にわずかな違いがあるが (AC1) と同値である. また, (AC3) では集合系を扱っているが, 集合系の定義によって, 初めから $\Lambda \neq \emptyset$ である.

どの形が受け入れやすいかは数学的な経験や直感によるのだろう. (AC1) では, 与えられた集合族の各集合から 1 つずつ元を集めて集合ができることを保証している. ツェルメロが公理として掲げたものであるが, どうだろうか.

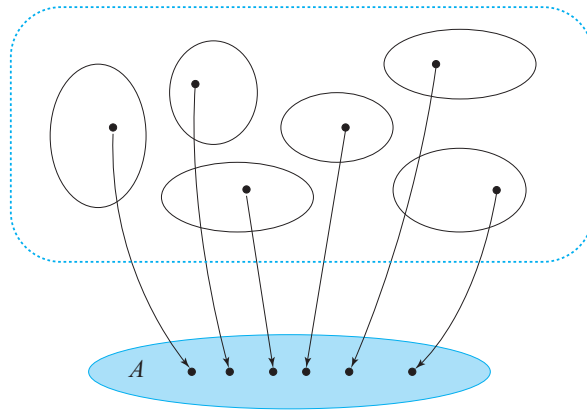


図 11.1: 選択公理 (AC1) の選択集合 A

定理 11.1 (AC1)–(AC3) の 3 つの命題は同値である.

証明 (AC1) \Rightarrow (AC2). Ω を空でない集合族で, $\emptyset \notin \Omega$ を満たすものとする. $X \in \Omega$ に対して, $\Omega \times \bigcup \Omega$ の部分集合を

$$\tilde{X} = \{(X, x) \mid x \in X\}$$

で定義する. 仮定から Ω 自身は空ではなく, また $\emptyset \notin \Omega$ であるから, 集合族

$$\tilde{\Omega} = \{\tilde{X} \mid X \in \Omega\}$$

もそうである. しかも, 構成から $\tilde{\Omega}$ に属する異なる 2 つの集合は互いに素である. そうすると, $\tilde{\Omega}$ が (AC1) の仮定を満たすので, 選択集合

$$\tilde{A} \subset \bigcup_{X \in \Omega} \tilde{X}$$

が存在する. つまり, すべての $\tilde{X} \in \tilde{\Omega}$ に対して, $|\tilde{A} \cap \tilde{X}| = 1$ が成り立つ. 定義から $\tilde{A} \cap \tilde{X}$ の元は (X, a) の形で得られるので, $f: X \mapsto a$ によって写像 $f: \Omega \rightarrow \bigcup \Omega$ が定義され, 明らかに $f(X) = a \in X$ が成り立つ. つまり, f は選択関数になっている.

(AC2) \Rightarrow (AC3). $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ を Λ 上の集合系で, すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ であるものとする. 対応する集合族を $\Omega = \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ とおく. 集合系の定義から, もとより $\Lambda \neq \emptyset$ であるから Ω 自身は空でない集合族であり, 仮定から $\emptyset \notin \Omega$ である. したがって, Ω が (AC2) の仮定を満たすので, 選択関数

$$f: \Omega \rightarrow \bigcup \Omega = \bigcup_{\lambda} A_\lambda$$

が存在する. ここで, 写像 $g: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda} A_\lambda$ を $g(\lambda) = f(A_\lambda)$ で定義すると $g(\lambda) \in A_\lambda$ を満たす. したがって, $g \in \prod_{\lambda} A_\lambda$ であり, $\prod_{\lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ となる.

(AC3) \Rightarrow (AC1). Ω を空でない集合族で, $\emptyset \notin \Omega$ を満たすものとする. 集合族 Ω を Ω 自身を添字集合とする集合系 $(X | X \in \Omega)$ とみなして, 直積集合

$$\prod_{X \in \Omega} X \tag{11.12}$$

を考える. 仮定 $\emptyset \notin \Omega$ から, すべての $X \in \Omega$ は $X \neq \emptyset$ を満たすので, (11.12) は空ではない. したがって, 写像 $f: \Omega \rightarrow \bigcup \Omega$ ですべての $X \in \Omega$ で $f(X) \in X$ を満たすものが存在する. 像集合 $A = f(\Omega)$ が選択集合になることを示そう. まず, $A \subset \bigcup \Omega$ は明らかであるから, $|A \cap X| = 1$ を示せばよい. $x \in A \cap X$ とする. まず $x \in A = f(\Omega)$ から, 適当な $Y \in \Omega$ によって $x = f(Y)$ となる. 一方, 直積の定義から $f(Y) \in Y$ であるから, $x \in Y$. これと初めの仮定から $x \in X \cap Y$ となる. Ω は互いに素な集合の族であるから, $X = Y$ となって, $x = f(X)$ がわかる. こうして, $A \cap X \subset \{f(X)\}$ が示された. 逆の包含関係は明らかなので, $A \cap X = \{f(X)\}$ であり, A は選択集合である. ■

ここで, 先送りしていた定理 4.16 を証明しよう. 実は, いささか驚くべきことに, 証明したい内容は選択公理と同値である.

定理 11.2 次の 2 つの命題は同値である.

- (i) 選択公理.
- (ii) X, Y を集合として, $Y \neq \emptyset$ とする. 全射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 単射 $g: Y \rightarrow X$ で $f \circ g = i_Y$ となるものが存在する.

証明 (i) \Rightarrow (ii). $Y \neq \emptyset$ なので $(f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y)$ は Y 上の集合系になる. f は全射であるから, すべての $y \in Y$ に対して $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ である. したがって, 選択公理によって $\prod_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ であるから, そこから 1 つ元 g をとる. 定義から, g は

$$g : Y \longrightarrow \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) = X$$

なる写像で, すべての $y \in Y$ に対して $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ を満たす. そうすると, 逆像の定義から $f(g(y)) = y$ なので, $f \circ g = i_Y$ が成り立つ. ここで, i_Y は単射であるから g も単射である.

(ii) \Rightarrow (i). (AC1) を証明する. Ω を空でない集合族で, $\emptyset \notin \Omega$ であり, Ω に属する異なる 2 つの集合が互いに素であるものとする. このとき, $\bigcup \Omega \neq \emptyset$ である. さて, $x \in \bigcup \Omega$ に対して, $x \in X$ となるような $X \in \Omega$ がただ 1 つ存在するので, $f : x \mapsto X$ によって写像 $f : \bigcup \Omega \longrightarrow \Omega$ が定義される. 明らかに, 全射である. そうすると, (ii) によって, 単射 $g : \Omega \longrightarrow \bigcup \Omega$ で $f \circ g = i_\Omega$ を満たすものが存在する. ここで $A = g(\Omega)$ が選択集合になることを示そう. 実際, $A \subset \bigcup \Omega$ は明らかなので, 任意の $X \in \Omega$ に対して $|A \cap X| = 1$ を示す. $x \in A \cap X$ とすると, $A = g(\Omega)$ からある $Y \in \Omega$ があって $x = g(Y)$. よって, $f(x) = f(g(Y)) = Y$ なので, $x \in Y$. そうすると, 初めの仮定と合わせて, $x \in X \cap Y$ がわかる. Ω は互いに素な集合からなる集合族なので, $X = Y$ である. よって, $x = g(X)$ である. こうして, $A \cap X \subset \{g(X)\}$ が示された. 逆向きの包含関係は明らかなので, $A \cap X = \{g(X)\}$ となる. つまり, A は選択集合である. ■

問 11.1 X, Y を集合, $f : X \longrightarrow Y$ を写像とすると, $|f(X)| \leq |X|$ を示せ (選択公理に注意せよ).

11.3 可算集合の性質

可算集合は, 厳密には, 集合と写像によって定義されているが, 元に番号付けできる集合が可算集合であるという直感的な理解が受け入れやすく有用であることも確かである. 一方, そのような直感的, 操作的な議論によって導出されるもっともらしい主張に対して, その根拠を厳密に求めると立ち行かなくなることもある. ここでは, 直感的に明らかに見えるが, その実, 選択公理を必要とするいくつかの結果を述べよう.

■ 無限集合の可算部分集合 無限集合 X を考える. X から 1 つ元を取り出して a_1 とする. X は無限集合であるから, $X \setminus \{a_1\}$ は空ではないので, そこからまた 1 つの元を取り出して a_2 とする. 次に, $X \setminus \{a_1, a_2\}$ を考えると, これは空ではないので, さらに 1 つの元 a_3 を取り出すことができる. X は無限集合だから, この操作を際限なく繰り返すことができ, 相異なる元の列 a_1, a_2, a_3, \dots が得られる. これを一まとめにした集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ は $A \subset X$ を満たす可算集合である. こうして, 次の定理が得られた (ように思われる).

定理 11.3 無限集合は可算集合を部分集合として含む.

上の直感的, 操作的な議論を見直そう. まず, X から 1 つの元を取り出すというと, 何らかの操作を想起するが, 論理上は, X が空ではないこと $\exists x(x \in X)$ の言い換えである. つまり, X は空ではないので, ある元を含むから, それを a_1 とおくということである. 元を 1 つずつ取り出す操作を有限回, たとえば n 回繰り返して集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ をつくるのであれば, これも選択公理は不要である. 正確には, ZF 公理系の下で n 個の元からなる部分集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の存在が証明できる. 問題は, 元を取り出す操作を無限回繰り返して, その結果として可算個の元からなる部分集合 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ が得られたとするならば, その根拠を集合と写像によって示さなければならないことにある.

証明 与えられた無限集合を X として, X の無限部分集合の全体を

$$\Omega = \{A \mid A \subset X, A \text{ は無限集合}\}$$

とおく. X 自身が X の無限部分集合であるから, $\Omega \neq \emptyset$ であり, また \emptyset は有限集合であるから, $\emptyset \notin \Omega$ である. したがって, 選択公理 (AC2) によって選択関数

$$f: \Omega \longrightarrow \bigcup \Omega = X, \quad f(A) \in A, \quad A \in \Omega,$$

が存在する. 写像 $\Phi: \Omega \longrightarrow \Omega$ を

$$\Phi(A) = A \setminus \{f(A)\} \tag{11.13}$$

で定義して, Φ を X に繰り返し適用することで, Ω に属する集合列をつくる. 正確には,

$$\begin{cases} \varphi(1) = X, \\ \varphi(n+1) = \overbrace{\Phi \circ \Phi \cdots \circ \Phi}^n(X) = \Phi(\varphi(n)), \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{11.14}$$

によって, 写像 $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ を定義する. この定義の仕方を帰納的定義といい, その妥当性は自然数の公理から導かれる (第 15.2 節で詳しく扱う).

合成写像 $a = f \circ \varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$ が単射になることを示そう. まず, まず選択関数の定義から

$$a(n) = f(\varphi(n)) \in \varphi(n), \quad (11.15)$$

また, 写像の定義 (11.13), (11.14) から,

$$\varphi(n+1) = \Phi(\varphi(n)) = \varphi(n) \setminus \{f(\varphi(n))\} = \varphi(n) \setminus \{a(n)\} \quad (11.16)$$

が得られる. 特に,

$$\varphi(n+1) \subset \varphi(n) \quad (11.17)$$

が成り立つ. さて, $1 \leq m < n$ とする. (11.17) を繰り返して $\varphi(n) \subset \varphi(m+1)$ がわかるので, (11.15) から $a(n) \in \varphi(m+1)$ が得られる. 一方, (11.16) によって $a(m) \notin \varphi(m+1)$ である. したがって, $a(m) \neq a(n)$ である. これは $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ が単射であることを示し, その像集合 $a(\mathbb{N})$ は X の可算部分集合になる. ■

定理 11.4 任意の無限濃度 \mathfrak{a} に対して $\aleph_0 \leq \mathfrak{a}$ が成り立つ. すなわち, \aleph_0 は最小の無限濃度である.

証明 無限濃度 \mathfrak{a} に対して $|A| = \mathfrak{a}$ を満たす集合 A をとって, 定理 11.3 を適用すれば, $|\mathbb{N}| \leq |A|$ が得られる. ■

定理 11.5 任意の無限濃度 \mathfrak{a} に対して次が成り立つ.

$$\mathfrak{a} + \aleph_0 = \mathfrak{a}. \quad (11.18)$$

証明 集合 A を $|A| = \mathfrak{a}$ を満たすように選ぶ. A は無限集合であるから, 定理 11.3 によって, 可算集合 B を部分集合として含む. このとき, $A = (A \setminus B) \cup B$ は互いに素な集合の和集合になっているから,

$$\mathfrak{a} = |A| = |A \setminus B| + |B| = |A \setminus B| + \aleph_0 \quad (11.19)$$

が得られる. ここで $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (定理 10.14) を用いると,

$$\mathfrak{a} + \aleph_0 = (|A \setminus B| + \aleph_0) + \aleph_0 = |A \setminus B| + (\aleph_0 + \aleph_0) = |A \setminus B| + \aleph_0 = \mathfrak{a}$$

となり, (11.18) が得られる. ■

定理 11.5 において, $\alpha = \aleph_0, \aleph$ とおくと,

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph + \aleph_0 = \aleph,$$

がわかる. これらは定理 10.14 で得られているが, そこでの証明には選択公理を用いていないことに注意しておこう.

問 11.2 定理 11.5 を用いて, 無理数の全体が連続体濃度をもつことを示せ. (定理 8.8 では選択公理を用いずに証明した.)

■ 可算和定理

定理 11.6 A_1, A_2, \dots を可算集合の無限列とすれば,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

も可算集合である.

直感的, 操作的な議論は次のとおりである. A_1 は可算集合であるから, その元に番号をつけて

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots,$$

のように一列に並べることができる. A_2, A_3, \dots についても同様にして, 全体を次のように配列する.

$$\begin{array}{cccc} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \dots \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \dots \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad (11.20)$$

これらをたとえば,

$$x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_1^{(3)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, \dots, \quad (11.21)$$

のように一列に並べて (図 7.1 を参照), 左から順に重複を避けながら番号付けする. こうして, A のすべての元に通し番号が付くので, それは可算集合である.

上の議論に問題点を見出すのは難しいかも知れない. (11.21) のように並べて番号付けをする部分は, 操作的な言い方を避けることができる. 実際,

$$f(m, n) = x_m^{(n)} \quad (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (11.22)$$

とおけば、全射 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$ が定義される。ここで、 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合であるから、定理 7.13 によって、 A は高々可算集合である。 A が無限集合であることは明らかなので、それは可算集合である。

実は、可算集合の列 A_1, A_2, \dots というだけでは、配列 (11.20) あるいは写像 (11.22) を得るための根拠がないのである。ひとたび全射 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$ の存在さえ言えてしまえば、後の議論に問題はない。

証明 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、全単射 $\mathbb{N} \rightarrow A_n$ の全体を F_n とする。 A_n は可算集合であるから、 $F_n \neq \emptyset$ である。集合系 $(F_n | n \in \mathbb{N})$ に対して選択公理 (AC3) を適用して、 $g = (g_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n$ を 1 つとる。これを用いて、写像 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$ を $f(m, n) = g_n(m)$ で定義する。すべての n に対して、 g_n は全単射 $g_n: \mathbb{N} \rightarrow A_n$ であるから、 f は全射になる。この後の議論はすでに示した通りである。 ■

定理 11.7 (可算和定理) A_1, A_2, \dots を高々可算集合の無限列とすれば、

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

も高々可算集合である。

証明 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 \mathbb{N} から A_n の上への全射の全体を F_n とする。 A_n が高々可算集合であるから、定理 7.13 によって、 $F_n \neq \emptyset$ である。集合系 $(F_n | n \in \mathbb{N})$ に選択公理 (AC3) を適用して、 $g = (g_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n$ を 1 つとる。写像 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$ を $f(m, n) = g_n(m)$ で定義すると、 f は全射になる。 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合であることから、 A は高々可算集合であり (定理 7.13), ■

上の議論の本質は、可算集合 \mathbb{N} 上の集合系 $(A_n | n \in \mathbb{N})$ を扱っていることにあり、各 A_n が有限集合であるか可算集合であることは二の次である。実際、次の主張は定理 11.7 の特別な場合であり、単純な仮定に置き換わっているが、選択公理なしでは証明できない。

定理 11.8 A_1, A_2, \dots を $|A_n| = 2$ を満たす、互いに素な集合の無限列とすれば、

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

は可算集合である。

定理 11.8 において, A_n が単なる集合ではなく, 何らかの構造をもっていればその構造を利用することで選択公理を避けることができる. たとえば, $A_n \subset \mathbb{R}$ であれば,

$$f(n, 1) = \min A_n \quad f(n, 2) = \max A_n$$

とにおいて, 選択公理を用いることなく, 全射 $f: \mathbb{N} \times \{1, 2\} \rightarrow A$ が定義される. この後の議論はすでに何度か繰り返した通りである.

■ **ラッセルの靴と靴下** 選択公理を正確に理解することはなかなか難しい. (AC1) を数学の記号や用語を柔らかくして言い換えると「いずれも空ではなく, 互いに素な集合からなる集合族が与えられたとき, 各集合から元を 1 つずつ取り出すことができる」という具合になる. わかりやすくなっただろうか, 悩ましいところである. 「元を 1 つずつ取り出す」という表現から日常的な動作を思い浮かべると, 数学とは関係ない状況をいろいろ想像してしまう. また, 「できる」「できない」の違いも考え出すと訳がわからなくなってしまう. 数学の用語をきちんと使えば避けられるような誤解も生じやすい.

まず, 選択公理が必要になるのは, 考えている集合族あるいは集合系が無数個の集合からなるときである. たとえば, (AC1) において集合族が有限個の集合からなるならば, その主張は選択公理とは関係なく成り立つ. このとき, 集合族を構成する個々の集合が有限集合であるか無限集合であるかは関係ない.

選択公理の必要性を人の作業能力の不足で説明するのもおかしな話である. たとえば, 元を選ぶべき対象となる集合が無数個あるから, それを 1 個ずつ処理していたのでは無限に時間がかかってしまって, 作業が終わらない. だから, なにか超越的な方法が必要であり, それが選択公理であるというような. あるいは, 1 個ずつ処理するのでは可算個しか処理できないから, 一般の集合族に対しては選択公理が必要になる, など. 注意すべき点として, 対象となる集合が無数個あったとしても選択公理は必ずしも必要ない. 一方で, 個々の集合の大きさは関係なく, 各集合がたった 2 個の元からなる場合でも, 一般には選択公理が必要になる.

ラッセルは選択公理を次のように説明した.⁴⁾ 靴も靴下も左右合わせて 1 足である (念のため). 今, 無限足の靴があったとしよう. 靴 1 足で 1 つの集合をな

⁴⁾ ラッセル「数理哲学序説」第 12 章にある. ただし, ラッセルは (AC1) を乗法の公理と呼んで, その説明に靴と靴下の例を使った. 乗法の公理という名称は, それが濃度の積を導入するための根拠となるからである (ラッセル・ホワイトヘッド「数学原理 I」第 88 章). また, ラッセルは (AC2) をツェルメロの公理と呼んで区別している. 当時, 選択公理をめぐるさまざまな命題の相互関係がまだ確立していなかった様子がうかがえて興味深い.

し、それらを無限に集めた集合族を考えるのである。このとき、各集合から 1 個ずつ元を選んで選択集合をつることができる。各集合は靴 1 足からなるので、たとえば、右足用の靴を選べばよい。しかし、靴の代わりに靴下になると困ったことになる。靴下 1 足には左右の区別がないので、選択集合をつくることはできない。それは、各集合から 1 個ずつ元を選ぶ原理や規則がないからである。靴下の場合にも選択集合を得ようとするれば、選択公理の助けが必要になる。

よくできているが、この説明で選択公理の要不要を正確に認識できる人は、相当に注意深く聡明なのだと思う。ラッセルの説明では、選択集合をある写像の像集合ととらえている。写像さえあれば、その像を集合として確定できる。したがって、各集合に対して、それに属する元を 1 つ対応させる写像 (選択関数) があるかどうかに着目する。靴の場合は、1 足の靴に対して右足用の靴を対応させるという、全体に一齐に適用できる規則がある。しかし、靴下の場合はそのような規則はないだろう。だから、何か超越的なものの助けを借りて規則を与えてもらうしかないというのがポイントである。

選択公理が言っていることは、どんなに複雑でたくさんの集合からなる集合族が与えられても、それぞれの集合に対してその「元を 1 つ対応させる規則がある」ということである。このことを「元を 1 つずつ取り出すことができる」と言い換えてもよいが、作業能力のことを言っているわけではない。

問 11.3 次の主張に選択公理は不要であることを確かめよ。

- (1) A_1, A_2, \dots を自然数 \mathbb{N} の部分集合で、空ではなく、互いに素であるものとする。このとき、集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して選択関数が存在する。
- (2) 実数 $\lambda \in (0, 1)$ に対して、开区間を $A_\lambda = (\lambda, 3\lambda)$ で定義する。このとき、集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in (0, 1)\}$ に対して選択関数が存在する。
- (3) 実数 \mathbb{R} の空でない开区間を集めてできる集合を \mathcal{A} とすれば、集合族 \mathcal{A} に対して選択関数が存在する。

問 11.4 濃度の列 \mathfrak{a}_n に対して、 $|A_n| = \mathfrak{a}_n$ となる互いに素な集合列 A_n をとって、濃度の無限和を

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right|$$

で定義する (選択公理に注意せよ)。次の等式を示せ。

- (1) $\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$.
- (2) $\aleph + \aleph + \cdots = \aleph_0 \aleph = \aleph$.

■ **可算選択公理** 選択公理 (AC1)–(AC3) は, 集合の無限族 (または集合の無限系) に対して, 選択集合または選択関数の存在を保証する. 対象とする集合族にさまざまな制限をつけることで, 選択公理の変種 (弱い選択公理) が得られる. 代表的なものとして次がある.

可算選択公理 Ω を可算個の集合からなる集合族とする. もし $\emptyset \notin \Omega$ であり, Ω に属する集合が互いに素であれば, 集合 $A \subset \bigcup \Omega$ で, すべての $X \in \Omega$ に対して $|A \cap X| = 1$ となるものが存在する.

本来の選択公理 (AC1) と比較して, 扱う集合族を可算族に制限したものになっている. 対応して, 可算選択公理を (AC2) や (AC3) の形で述べることができる. 可算和定理 (定理 11.6, 定理 11.7) の証明では, 可算選択公理しか使っていない. また, 定理 11.3 の証明は, そのままでは選択公理が避けられないが, 可算選択公理だけを使って証明できる.

定理 11.3 の別証明 与えられた無限集合を X とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$S_n = \{A \mid A \subset X, |A| = n\}$$

とにおいて, 集合系 $(S_n \mid n \in \mathbb{N})$ を考える. 明らかに, $S_n \neq \emptyset$ であるから, 可算選択公理によって, $f \in \prod_n S_n$ を 1 つ選ぶことができる. 定義によって, $f(n) \subset X$ で $|f(n)| = n$ となっている. ここで,

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

とおくと, $F \subset X$ であり, 可算和定理 (可算選択公理を用いて証明される) によって F は高々可算集合である. 一方, $f(n) \subset F$ から, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n = |f(n)| \leq |F|$ が成り立つので, F は有限集合ではありえない. したがって, F は可算集合である. ■

選択公理の別の変種として, 有限集合に対する選択公理というものもよく研究されている. 本来の選択公理 (AC1) において, 扱う集合族を有限集合からなる集合族に限定したものである. もっとも極端な場合として, 有限集合を 2 元だけからなる集合に置き換えた公理もある. この公理があれば, 定理 11.8 が証明され, ラッセルの靴下の問題も解決される. これまでに多くの変種が提案され, 相互の関係が研究されている.⁵⁾

⁵⁾Howard–Rubin の著書 (1998) では, 選択公理に関する成果を過去 90 年間にわたって網羅するとして, 膨大な数の命題リスト (証明はついてない) とほぼ完全な文献が蒐集されている.

11.4 無限集合

有限集合の定義は、自然数と写像を用いて明確に与えられている (定義 6.3). それをもとに、有限集合でない集合を無限集合と定義した. しかしながら、このような否定による定義ではなく、積極的に何らかの性質によって無限集合を定義したいと考えるのは自然である. デデキント⁶⁾は無限集合を次のように定義した. ここでは従来の定義と区別するため、デデキントの名を冠している.

定義 11.9 集合 A は、それ自身と同じ濃度をもつ真部分集合を含むとき、デデキント無限集合という. そうでない集合はデデキント有限集合という.

定理 11.10 デデキント無限集合は無限集合である.

証明 対偶を示す. すなわち、有限集合はデデキント有限集合であることを示そう. A を有限集合し、 B をその真部分集合とする. このとき、 $a \in A$ で $a \notin B$ となるものが存在し、

$$B \cup \{a\} \subset A, \quad B \cap \{a\} = \emptyset$$

が成り立つ. したがって、 $|B| + 1 \leq |A|$ が得られる. そうすると、 $|B| < |A|$ となって、 A はそれ自身と同じ濃度をもつ真部分集合をもたないことがわかる. つまり、 A はデデキント有限集合である. ■

次に、デデキント無限集合の特徴づけを示そう.

定理 11.11 集合 A に対して、次は同値である.

- (i) A はデデキント無限集合である.
- (ii) 写像 $f: A \rightarrow A$ で単射であるが全射ではないものが存在する.
- (iii) 単射 $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ が存在する.
- (iv) A は可算部分集合を含む.

証明 (i) \Rightarrow (ii). A はデデキント無限集合なので、それと同じ濃度をもつ真部分集合 B を含む. 濃度が同じなので、全単射 $f: A \rightarrow B$ が存在する. 包含写像 $i: B \rightarrow A$ との合成写像 $i \circ f: A \rightarrow A$ は単射であるが、全射ではない.

⁶⁾Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916). ドイツの数学者. 有名な著書「数とは何か、何であるべきか」(初版 1887)において、「この無限の定義は私の全探求の核心を形成するものである」と述べている.

(ii) \Rightarrow (iii). f は全射でないので, $a \in A$ で $a \notin f(A)$ となるものが存在する. そこで, $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ を

$$g(1) = a, \quad g(n+1) = f(g(n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

で定義する. これは写像の帰納的定義である. g は単射であることを示そう. そのためには, すべての n に対して

$$g(n) \notin \{g(1), \dots, g(n-1)\}$$

を示せばよい. これを数学的帰納法で証明する.

まず, $n = 1$ のときは自明である. $n \geq 1$ として, n まで主張が正しいとする. すなわち, $g(1), g(2), \dots, g(n)$ はすべて互いに異なるとする. f は単射であるから,

$$f(g(1)), f(g(2)), \dots, f(g(n))$$

はすべて互いに異なる. つまり,

$$g(2), g(3), \dots, g(n+1)$$

はすべて異なる. したがって, $g(n+1) \notin \{g(1), \dots, g(n)\}$ を示すためには, $g(n+1) \neq g(1) = a$ を示せばよい. しかるに, $g(n+1) = f(g(n)) \in f(A)$ であるが, $a \notin f(A)$ であるから, 確かに, $g(n+1) \neq g(1) = a$ である. こうして, $g(n+1) \notin \{g(1), \dots, g(n)\}$ が示された.

(iii) \Rightarrow (iv). $g(\mathbb{N})$ は可算集合であり, かつ A の部分集合である.

(iv) \Rightarrow (i). B を A の可算部分集合とする. このとき,

$$B = B_1 \cup B_2, \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_2 \neq \emptyset, \quad |B| = |B_1|,$$

となるような部分集合 B_1, B_2 をとる. そうすると,

$$|A| = |A \setminus B| + |B| = |A \setminus B| + |B_1| = |(A \setminus B) \cup B_1| = |A \setminus B_2|$$

が成り立つ. つまり, $A \setminus B_2$ は A と濃度が等しい真部分集合である. このことは, A がデデキント無限集合であることを示す. ■

定理 11.10 の逆は選択公理を用いて証明できる.

定理 11.12 無限集合はデデキント無限集合である, すなわち, その濃度と同じ濃度をもつ真部分集合を含む.

証明 与えられた無限集合を A とする. 定理 11.3 によって, A は可算部分集合 B を含む. 元に番号をつけて $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ としよ. ここで,

$$B_0 = \{b_2, b_4, \dots\}, \quad A_0 = (A \setminus B) \cup B_0$$

とおく. 明らかに, A_0 は A の真部分集合である. 写像 $f: A \rightarrow A_0$ を

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \setminus B, \\ b_{2n}, & x = b_n \in B, \end{cases}$$

とおくと, f は全単射である. したがって, $|A_0| = |A|$ である. ■

定理 11.10 の証明に選択公理は不要であるが, 定理 11.12 では選択公理が必要になる. 結局, 選択公理を仮定すれば, デデキント無限集合と無限集合は一致し, デデキントが目論んだ通り, 定義 11.9 は無限集合の積極的な定義となる.

問 11.5 デデキント無限集合 A に対して, 全射であるが単射ではない写像 $f: A \rightarrow A$ が存在することを示せ.

面白いことに, 選択公理を認めない立場では, デデキント無限集合と従来の無限集合には違いがあって, 無限集合であるがデデキント有限集合となるものが存在しうるのである. 詳しくは, ZF 公理系が無矛盾であれば, それに「無限集合かつデデキント有限集合となる集合が存在する」という命題を加えても無矛盾であることが知られている. 定理 11.11 を用いて言い換えれば, 無限集合なのに可算部分集合を含まないものが存在することになる. 無限集合から 1 個ずつ元を選べば可算部分集合ができるという素朴な議論が通用しない, 直感に反するまことに厄介な存在である.⁷⁾

⁷⁾ 古いところでは, ホワイトヘッド・ラッセル「数学原理 II」(1912)にも無限集合とデデキント無限集合(彼らの呼び名は違っているが)を区別した詳しい議論がある.