第5章　同値関係

前章では, 集合間の関係を議論するための概念として写像を導入した. 写像をさらに一般化したものが関係 (対応ともいう) である. 特に, 集合からそれ自身への関係を二項関係というが, その中で最も基本的な同値関係について述べる.

5.1　関　係

X, Y を集合とする. 順序対 $(x, y) \in X \times Y$ に対して, 満たすか満たさないかが判別できる規則 ρ を集合 X から Y への**関係**または**対応**という. 順序対 $(x, y) \in X \times Y$ が関係 ρ を満たせば, $x \rho y$ と書き, 満たさないときは $x \not\rho y$ と書く. 集合 X から Y への関係 ρ が与えられたとき, $x \rho y$ のときに x から y に向けて矢印を書いて図示すると便利である.

例 5.1　$X = \{A, B, C, D\}$ を 4 人の集合, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を 5 つのウェッブサイトの集合とする. $x \in X$ が $y \in Y$ を訪問したことがあるとき, $x \rho y$ とすると, これは X から Y への関係になる. 図 5.1 は 1 つの関係を例示したものである.

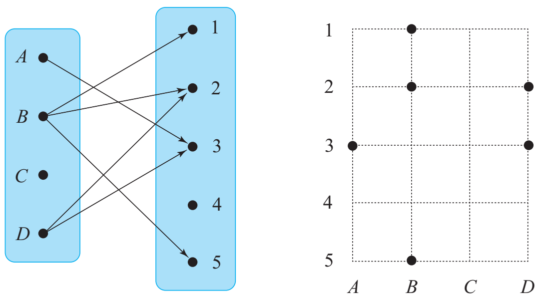

図 5.1: X から Y への関係とそのグラフ

■ **関係のグラフ** 集合 X から Y への関係 ρ に対して, 直積 $X \times Y$ の部分集合

$$G(\rho) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x\rho y\}$$

を関係 ρ の**グラフ**という. 逆に, 直積 $X \times Y$ の任意の部分集合 Z に対して, $(x, y) \in Z$ のとき $x\rho y$ と定義すれば, ρ は集合 X から Y への関係になり, $G(\rho) = Z$ が成り立つ. この意味で, 集合 X から Y への関係を 1 つ定めることと直積 $X \times Y$ の部分集合を 1 つ定めることとは同等である.

■ **写像** 写像は関係 (または対応) の特別なものである. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, $f(x) = y$ となっているとき $x\rho y$ として X から Y への関係が定義される. 一般の関係との違いは次の 2 点である.

(i) X の元は余すことなく Y の元に対応付けられる.
(ii) 各 $x \in X$ に対応する Y の元はただ 1 個である.

したがって, 図 5.1 で与えた関係は写像ではない.

上に述べたように, 写像は関係の特別なものであるから, 関係に対して定義したグラフは写像に対しても定義される. こうして定義されるグラフは, 第**??**節で既に定義した写像のグラフと同じものになる.

さらに, 直積集合 $X \times Y$ の任意の部分集合 G が X から Y への関係のグラフになり得るのに対して, G が写像のグラフになるためには, すべての $x \in X$ に対して, $(x, y) \in G$ となる $y \in Y$ がただ 1 つ存在することが必要十分条件である (定理 4.1).

■ **二項関係** 特に, 集合 X からそれ自身への関係, つまり, 順序対 $(x, y) \in X \times X$ に対して, 満たすか満たさないかが判別できる規則 ρ を集合 X 上の**二項関係**という. 集合 X 上の二項関係のグラフは $X \times X$ の部分集合であり, 逆に $X \times X$ の任意の部分集合に対して, それをグラフとする二項関係が定まる.

例 5.2 集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の二項関係 $x\rho y$ を $X \times X$ の部分集合

$$\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$$

に対応するものとして定義する. この二項関係は, X から X への対応, あるいはそのグラフとして図示することができるが, さらに, X を頂点集合とする有向グラフによる表示も役に立つ (図 5.2).

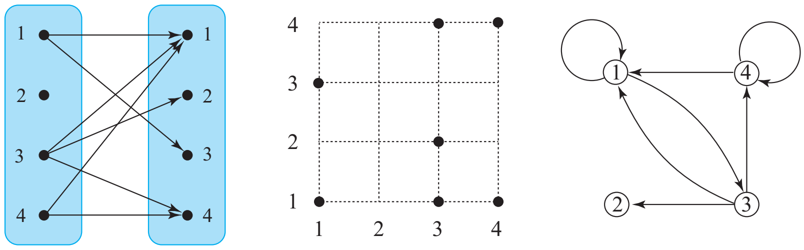

図 5.2: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の二項関係

例 5.3 (隣接関係) 集合 X 上の二項関係 $\sim$ で, 次の 2 つの性質を満たすものを X 上の隣接関係という.

(i) すべての $x \in X$ に対して $x \not\sim x$,

(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

言い換えると, $X \times X$ の部分集合 E で

(i) すべての $x \in X$ に対して $(x, x) \notin E$,

(ii) $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E$,

を満たすものが隣接関係である. このとき, 集合 X と隣接関係 E を組にして, (X, E) を**グラフ**[1)]という. X の各元を平面の点として配置して, $(x, y) \in E$ のときに, x と y を辺あるいは孤で結んでできる図形が, グラフ (X, E) のイメージである.

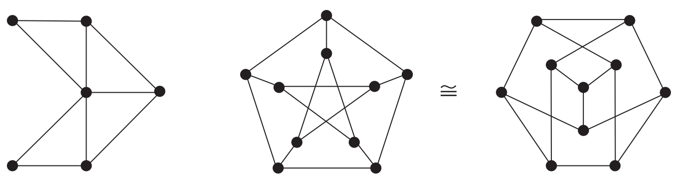

図 5.3: グラフ

[1)] ここに述べたグラフは, 文脈によっては**ネットワーク**とも呼ばれる. 先に扱った関数のグラフ, 写像のグラフ, 関係のグラフとは異なる概念である. 図 5.2 にある有向グラフも同様である.

例 5.4 (順序関係) 集合 X 上の二項関係 $\preccurlyeq$ で, 次の 3 つの性質を満たすものを X 上の順序関係という.

(i) すべての $x \in X$ に対して $x \preccurlyeq x$,

(ii) $x \preccurlyeq y,\ y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y$,

(iii) $x \preccurlyeq y,\ y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$.

たとえば, 実数の大小 $x \leq y$ は $\mathbb{R}$ 上の順序関係である. 順序関係については, 第 10 章で詳しく扱う.

問 5.1 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 上の 2 項関係 $x\rho y$ を次のように定めるとき, その二項関係に対応する $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合を確認して, 関係のグラフと有向グラフを示せ.

(1) $x\rho y \Leftrightarrow y \leq x \leq y + 1$

(2) $x\rho y \Leftrightarrow (x - y + 1)(x + y - 4) = 0$

5.2　同値関係

定 義 5.5 集合 X 上の二項関係 $\sim$ は, 次の 3 性質を満たすとき X 上の**同値関係**と呼ばれる.

(i) [反射律] $x \sim x$

(ii) [対称律] $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(iii) [推移律] $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

数学のさまざまな文脈で使われる等号 $=$ は上の 3 条件を満たす. それを**等号の公理**ということもある. したがって, 集合 X を適切に定めれば, 等号 $=$ は X 上の同値関係になる.

例 5.6 ある大学の学生の全体を X とする. 学生 $x, y \in X$ に対して, 出身県が同じときに $x \sim y$ と定義すれば, $\sim$ は X 上の同値関係になる.

例 5.7 X を平面上のすべての三角形の集合とする. 2 つの三角形 x, y が合同であるとき, $x \equiv y$ とすれば, $\equiv$ は X 上の同値関係になる. また, 2 つの三角形 x, y が相似であるとき, $x \backsim y$ とすれば, $\backsim$ は X 上の同値関係になる.

例 5.8 (整数の合同) 自然数 m を 1 つ固定する. 2 つの整数 x, y に対して, $x-y$ が m の倍数であるとき, x と y は m を**法として合同**であるといい,

$$x \equiv y \pmod{m}$$

と記す．これは, 整数の集合 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係になる．このことを確認しておこう．以下では , m は一つ固定されているので $(\mathrm{mod}\ m)$ を省略する．

• 反射律. すべての整数 x に対して, $x-x=0$ であり, 0 はもちろん m の倍数である．よって, $x\equiv x$.

• 対称律. 整数 x,y が $x\equiv y$ を満たすものとする．定義から, $x-y$ は m の倍数であるから, 別の整数 k によって, $x-y=km$ となる．そうすると, $y-x=-km$ であり, これも m の倍数である．よって, $y\equiv x$ となる．

• 推移律. 整数 x,y,z が $x\equiv y$, $y\equiv z$ を満たすものとする．定義から, $x-y=km$, $y-z=lm$ のように整数 k,l を用いて表される．そうすると, $x-z=(x-y)+(y-z)=(k+l)m$ となるから, これも m の倍数である．よって, $x\equiv z$ となる．

例 5.9 X を 2 個以上の元を含む集合として, X の空でない部分集合を集めてできる集合を Ω とする．つまり, $\Omega=2^X\backslash\{\emptyset\}$. Ω 上の二項関係 $A\sim B$ を $A\cap B\neq\emptyset$ のこととして定める．このとき, 関係 $\sim$ は反射律と対称律を満たすが, 推移律を満たさないので同値関係ではない．

■ **同値類と商集合** 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられたとする．$x\in X$ に対して x と同値な元を集めてできる X の部分集合

$$C(x)=\{y\in X\mid y\sim x\}$$

を, x を含む**同値類**という．

補 題 5.10 同値類 $C(x)$ は X の部分集合であって次の性質をもつ．

(1) $x\in C(x)$.

(2) $x\sim y\Rightarrow C(x)=C(y)$.

(3) $x,y\in X$ に対して, $C(x)=C(y)$ または $C(x)\cap C(y)=\emptyset$ のいずれか一方だけが成り立つ．

証 明 (1) 反射律 $x\sim x$ から明らかである．

(2) まず, $C(x)\subset C(y)$ を示そう．$z\in C(x)$ とすると, 同値類の定義から $z\sim x$ である．これと仮定 $x\sim y$ を合わせて, 推移律を用いると $z\sim y$ となる．したがって, $z\in C(y)$. である．こうして, $C(x)\subset C(y)$ が示された．x,y の役割を入れ替えて, 同様の議論を繰り返せば, $C(y)\subset C(x)$ も示されるので, $C(x)=C(y)$ である．

(3) 同値類は空集合ではないので, $C(x) = C(y)$ と $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ が同時に成り立つことはない. したがって, 主張のためには,

$$C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad C(x) = C(y)$$

を示せばよい. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ なので, $z \in C(x) \cap C(y)$ を満たす元 z をとる. 同値類の定義から $z \sim x$ かつ $z \sim y$ である. 推移律によって, $x \sim y$ となる. (2) によって, $C(x) = C(y)$ が得られる. ■

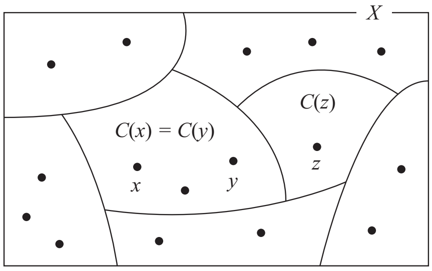

図 5.4: X の同値類別

補題 5.10 によれば, 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられると, 同値類によって X が互いに素な空でない部分集合に分割されることになる. これを X の同値関係 $\sim$ による**同値類別**という.

同値類を 1 つ元とみなして, 同値類を集めてできる集合を, X の同値関係 $\sim$ による**商集合**といい,

$$X/\!\sim\, = \{C(x) \,|\, x \in X\}$$

で表す. 商集合は $X/\!\sim$ は X の部分集合を元とする集合という意味で集合族である. 商集合 $X/\!\sim$ の元, つまり, 同値類 C はそれに含まれている X の元 x を 1 つ指定することで $C = C(x)$ のように表される. このとき, x をその同値類 C の**代表**という. 任意の $x \in C$ は C の代表になる.

X の各元 x に対して $C(x)$ を対応させることで写像

$$\pi : X \longrightarrow X/\!\sim$$

が定義される．これを X から $X/\sim$ の上への**標準射影**, または**自然な射影**という．明らかに, 標準射影 $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ は全射である．

例 5.11 (例 5.6 の続き) ある大学の学生の全体を X とする．学生 $x, y \in X$ の出身県が同じときに $x \sim y$ として, X 上の同値関係 $\sim$ を定義した．このとき, 同値類 C とは, 出身県を同じくする学生の集合であり, 任意の $x \in C$ は C の代表元になる．商集合 $X/\sim$ とは, 定義によって, 同値類を集めた集合のことであるが, 今の文脈では, 各同値類に県名というラベルをつけることができるので, $X/\sim$ は出身者のいる県の県名の集合とみなされる．この意味で, 標準射影とは各学生 $x \in X$ に対して出身県名を対応させる写像に他ならない．

■ 写像から誘導される同値類 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が与えられたとする．X 上の二項関係 $x \sim y$ を $f(x) = f(y)$ を満たすこととして定義する．この二項関係は同値関係になることが次のようにして確かめられる．

- 反射律．$f(x) = f(x)$ であるから $x \sim x$ である．
- 対称律．$f(x) = f(y)$ ならば $f(y) = f(x)$ である．したがって, $x \sim y$ ならば $y \sim x$ である．
- 推移律．$x \sim y$ かつ $y \sim z$ とすると, 定義によって, $f(x) = f(y)$ かつ $f(y) = f(z)$ を意味する．したがって, $f(x) = f(z)$ であり, $x \sim z$ が成り立つ．

次に, 同値類について調べよう．定義によって, x を含む同値類は

$$C(x) = \{y \in X \mid y \sim x\} = \{y \in X \mid f(y) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\})$$

である．したがって,

$$X/\sim = \left\{f^{-1}(\{f(x)\}) \,\middle|\, x \in X\right\} = \left\{f^{-1}(\{y\}) \,\middle|\, y \in f(X)\right\}$$

となる．

例 5.12 X として平面上のすべての 3 角形の集合として, 写像 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を 3 角形 $x \in X$ に対して, その面積を対応させるものとする．このとき, f の定める同値類は, 同じ面積をもつ 3 角形の集合となる．言い換えれば, 3 角形の全体を面積によって分類したことになる．

例 5.13 (整数の剰余類) 自然数 m を 1 つ固定し, 整数の全体 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $x \equiv y \pmod{m}$ を考えよう (例 5.8)．定義によって, 同値類は

$$C(0) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod{m}\},$$

$$
\begin{aligned}
C(1) &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \equiv 1 \pmod m\}, \\
&\cdots\cdots \\
C(m-1) &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \equiv m-1 \pmod m\}
\end{aligned}
$$

となる．これらの同値類を**法 m に関する剰余類**という．商集合 $\mathbb{Z}/\equiv$ を $\mathbb{Z}_m$ と書けば,

$$\mathbb{Z}_m = \{C(0), C(1), \ldots, C(m-1)\}$$

となる．写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\}$ を整数 $x \in \mathbb{Z}$ に対して, x を m で割ったときの余り k を対応させるものとする．すぐにわかるように,

$$C(k) = f^{-1}(\{k\}), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

が成り立つ．つまり, 剰余類 $C(k)$ は, m で割ったときの余りが k となる整数の集合である．さらに, 標準射影 $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ は

$$\pi(x) = C(f(x)), \qquad x \in \mathbb{Z},$$

で与えられる．なお, $\mathbb{Z}_m$ は $\mathbb{Z}$ から誘導される加法と乗法をもつ重要な代数系となる．

定 理 5.14 $f : X \longrightarrow Y$ を全射とする．このとき, X 上の同値関係 $\sim$ と, 全単射 $\tilde{f} : X/\!\sim \longrightarrow Y$ で $f = \tilde{f} \circ \pi$ を満たすものが存在する．ただし, $\pi : X \longrightarrow X/\!\sim$ は標準射影である．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/\!\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

証 明 まず, X 上の同値関係 $x \sim y$ を $f(x) = f(y)$ として定める．写像 $\tilde{f} : X/\!\sim \longrightarrow Y$ を, $C \in X/\!\sim$ に対して, $x \in C$ となる x を用いて $\tilde{f}(C) = f(x)$ と定義する．与えられた C に対して $x \in C$ の取り方に任意性があるから, その取り方によらず $\tilde{f}(C)$ が一意に決まることを示す必要がある．つまり, 別の $y \in C$ をとって, $\tilde{f}(C) = f(y)$ と定義して, 先に定義した $\tilde{f}(C)$ と異なる値になっては,

写像 $\tilde{f}$ が定義できないからである．しかし, 同値類の定義から $f(x) = f(y)$ であるから, その心配はなく, $\tilde{f}(C)$ は同値類 C によって値が定まっている．こうして, 写像 $\tilde{f} : X/{\sim} \longrightarrow Y$ が得られた．

$\tilde{f}$ は全射であることを示そう．実際, f が全射であることから, 任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ で $y = f(x)$ となる．そうすると, x を含む同値類 C に対して, $\tilde{f}(C) = f(x) = y$ となり, $\tilde{f}$ が全射であることがわかる．

次に, $\tilde{f}$ は単射である．$\tilde{f}(C_1) = \tilde{f}(C_2)$ とする．代表元をとって, $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ とすると, $f(x_1) = f(x_2)$ となる．したがって, $x_1 \sim x_2$ であり, $C_1 = C_2$ がわかる．

最後に, $f = \tilde{f} \circ \pi$ を示す．$x \in X$ とすると, $\pi(x)$ は x を含む同値類になる．$\tilde{f}(\pi(x))$ は同値類 $\pi(x)$ から任意の元をとり, その f による像で定義された．特に, $\pi(x)$ から x をとって, f による像 $f(x)$ が $\tilde{f}(\pi(x))$ を与える．したがって, $f(x) = \tilde{f}(\pi(x)) = \tilde{f} \circ \pi(x)$. ■

定理 5.15 $f : X \longrightarrow Y$ を任意の写像とする．このとき, 集合 $\tilde{X}, \tilde{Y}$ と全射 $\pi : X \to \tilde{X}$, 全単射 $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$, 単射 $i : \tilde{Y} \to Y$ が存在して,

$$f = i \circ \tilde{f} \circ \pi \tag{5.1}$$

が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \tilde{Y} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

証 明 $\tilde{Y} = f(X)$ とおいて, 写像 $F : X \to \tilde{Y}$ を $F(x) = f(x)$ で定義する．F は全射であるから, 定理 5.14 を適用することができる．$\tilde{X} = X/{\sim}$ とおくと, $\pi : X \longrightarrow \tilde{X}$ が全射になり, 全単射 $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ で

$$F = \tilde{f} \circ \pi$$

を満たすものが存在する．$\tilde{Y}$ は Y の部分集合であるから, 包含写像 $i : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ が定義されて, それは単射である．さらに, $f = i \circ F : X \longrightarrow Y$ に注意して, (5.1) が得られる． ■

例 5.16 $X = Y = \mathbb{R}$ として, $f(x) = x^2$ で定義される写像 $f : X \longrightarrow Y$ を考える．まず, f による同値関係を $x \sim y$ と書けば,

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm x$$

である．したがって, 商集合 $\tilde{X} = X/\sim$ に属する同値類の代表元を $[0, +\infty)$ から一意的に選ぶことができる．言い換えれば, $\tilde{X} = [0, +\infty)$ とみなしてよい．そうすると, 標準射影 $\pi : X \longrightarrow \tilde{X}$ は $\pi(x) = |x|$ に他ならない．一方, $\tilde{Y} = f(X) = [0, +\infty)$ は明らかであり, $i : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} = Y$ を包含写像とする．最後に, $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ は, 定理 5.15 の証明にあるように, f を同値類の関数とみなしたものだから, $\tilde{f}(x) = x^2$ となる．確かに $\tilde{f}$ は全単射であって, $f = i \circ \tilde{f} \circ \pi$ が成り立つ.

例 5.16 で示唆されるように, 定理 5.15 に述べた写像 f の分解は, f の本質的な性質を $\tilde{f}$ として抜き出していると言える．このような写像の取扱いは代数系の議論において頻繁に現れる.

問 5.2 $R = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく．2 つの実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x - y \in R$ であるとき $x \sim y$ と定義する．この関係は反射律, 対称律, 推移律を満たすか.

問 5.3 $\mathbb{N}$ の 2 つの部分集合 A, B に対して, 対称差集合 $A \ominus B$ が有限集合であるとき, $A \sim B$ と定義する．このとき, $\sim$ はベキ集合 $2^{\mathbb{N}}$ 上の同値関係であることを証明せよ.