第7章　可算集合

有限集合に対しては, その元の個数を数えることでその大きさがわかる. 有限集合でない集合が無限集合であるから, 無限集合の元の個数は定めようがなく, あえて言えば無限大 (∞) というほかないだろう. カントルは有限集合の元の個数を見直すことで, 無限集合にも通用する**濃度**という概念を導入して, さまざまな無限集合の大きさを比較した. そして, 無限集合にも様々な階層があることを見出した. まず, 可算集合から始めよう.

7.1　濃度の等しい集合

集合 A から集合 B への全単射が存在するとき, A と B は**濃度が等しい**といい, $|A| = |B|$ と書くことにする.[1] ここでは, 全単射は 1 個でも存在すればよく, 全単射という以上の性質は求めない.

まず, 有限集合については次が成り立つことに注意しよう.

定 理 7.1 有限集合 A, B に対して, 次の 3 条件は同値である.

(i) A と B の濃度が等しい.

(ii) 全単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在する.

(iii) A と B の元の個数が等しい.

証 明 定義によって (i) と (ii) は同値な条件である. 一方, 定理 6.9 によって, (ii) と (iii) は同値である. ∎

つまり, 濃度が等しいという概念は, 有限集合に対して元の個数が等しいという性質を, 元の個数を数え切ることができない無限集合に対して拡張したものになっている.

[1] 文献によっては, $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$ とも書かれる. この記号はカントルが導入した. 実数からなる集合 A の濃度を導入するにあたり, $\bar{A}$ で相似を捨象して, $\bar{\bar{A}}$ で点の並び方も捨象して, ただの集合として等しいという意味が込められているという.

定 理 7.2 集合 A, B, C に対して次が成り立つ.

(1) $|A| = |A|$.

(2) $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$.

(3) $|A| = |B|,\ |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$.

証 明 いずれも $|A| = |B|$ の定義に戻って確認する. (3) を示そう. 仮定から, 全単射 $f : A \longrightarrow B$ と $g : B \longrightarrow C$ が存在する. 合成写像 $g \circ f : A \longrightarrow C$ は全単射になるので, $|A| = |C|$ が成り立つ. ∎

■ **濃度の定義** 定理 7.1 によって, 有限集合 A, B に対しては, 元の個数が等しいと言っても濃度が等しいと言っても同じことである. 濃度が等しいことを記号で $|A| = |B|$ と書くが, 有限集合 A に対して, 記号 $|A|$ は A に属する元の個数を意味した. そこで, 有限集合 A に対しては, A に属している元の個数を**濃度**と呼び, $|A|$ で表すと都合がよい.

しかしながら, 無限集合を含む一般の集合に対しては, 「濃度が等しい」という定義を与えたに過ぎず, 「濃度」そのものを直接的に定義してはいない. 定理 7.2 から, 集合を濃度で同値類別して, その同値類をもって濃度と定義したらどうかと思い至るかも知れない. これは, 一見, うまい考え方なのだが, 同値関係や同値類別は集合に対して定義されていたことを思い出そう. 今の場合, 「濃度が等しい」という関係を導入する対象は集合の集まりとなる. 既に何度か出てきているように, すべての集合を集めたものは集合にならないので, 「濃度が等しい」という考え方では同値関係を導入できないのである.

次の結果も明らかであるが, 便利である.

定 理 7.3 A, B を集合とする. 単射 $f : A \longrightarrow B$ に対して $|A| = |f(A)|$ が成り立つ.

証 明 写像 $f_1 : A \longrightarrow f(A)$ が $f_1(x) = f(x)$ によって定義される (f と f_1 は終集合が異なるので写像として区別される). そうすると, f_1 は全単射になるから, $|A| = |f(A)|$ が成り立つ. ∎

7.2 可算集合

自然数の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ と濃度が等しい集合 A を**可算集合**という. 言い換えれば, 全単射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ が存在するような集合 A が可算集合である.

濃度が等しいという性質は推移的である (定理 7.2 (3)) ので, A が可算集合で $|A| = |B|$ が成り立てば B も可算集合である. 有限集合と可算集合をまとめて**高々可算集合**という.

全単射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ が与えられると, A の元は $f(n)$ の形で取り尽くされるので, A の各元には通し番号が振られることになる. この意味で, 可算集合を**可附番集合**ともいう. 逆に, A のすべての元に通し番号が付いていれば, 全単射 $g : A \longrightarrow \mathbb{N}$ が存在し, A は可算集合になる. したがって, 可算集合が与えられているときは,

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

のように, 元に番号が付いているものとして取り扱ってよい. この扱い方は有限集合の場合と同様である (第 6.1 節).

こうして, 与えられた集合 A が可算集合かどうかは, その元に「通し番号を振る」ことができるかどうかに帰着する. ただし, 番号を振るという一見明らかな操作であっても, その操作が全単射 $\mathbb{N} \longrightarrow A$ を定義しているかについて慎重な議論を要する場合がある.

例 7.4 偶数の自然数の全体 $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ は可算集合である. 実際, 写像 $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ を $f(n) = 2n$ で定義すれば, f は全単射になる.

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{N} & : & 1 & 2 & 3 & \dots \\ f\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ E & : & 2 & 4 & 6 & \dots \end{array}$$

言い換えれば, 偶数を小さい順に並べて通し番号を付けたのである. ところで, 偶数の集合 E は自然数 $\mathbb{N}$ の真部分集合であるが, それらの濃度は等しい. つまり, $E \subsetneq \mathbb{N}$ であるが, $|E| = |\mathbb{N}|$ が成り立つことに注目しておこう. これは有限集合ではありえない性質である (問 6.3).

例 7.5 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は可算集合である. たとえば,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ が奇数のとき}, \\ -\dfrac{n}{2}, & n \text{ が偶数のとき}, \end{cases}$$

によって定義される写像 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ は全単射になる.

補 題 7.6 自然数 $\mathbb{N}$ の無限部分集合は可算集合である.

証 明　K を自然数 $\mathbb{N}$ の無限部分集合とする. K の元を

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < \cdots \tag{7.1}$$

のように小さいものから配列する. 対応 $n \mapsto k_n$ が全単射 $\mathbb{N} \longrightarrow K$ を与えることは明らかであるから, K は可算集合である. ∎

定 理 7.7 (可算集合の部分集合) 可算集合の無限部分集合は可算集合である. したがって, 可算集合の部分集合は高々可算集合である.

証 明　B を可算集合, A を B の無限部分集合とする. 可算集合の定義によって, 全単射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow B$ が存在する. f による A の逆像を $K = f^{-1}(A)$ とする. 写像 $f_1 : K \longrightarrow A$ を $f_1(n) = f(n)$ で定義すれば, 全単射になる. 一方, K は自然数 $\mathbb{N}$ の無限部分集合であるから, 補題 7.6 によって, K は可算集合である. したがって, 全単射 $g : \mathbb{N} \longrightarrow K$ が存在する. このとき, 合成写像 $f_1 \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ は全単射になるから, A は可算集合である. 後半は, 高々可算集合の定義から, すでに明らかであろう. ∎

例 7.8 素数の集合 $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ は可算集合である. 実際, $P \subset \mathbb{N}$ であり, P は無限集合である (例 1.21). したがって, 補題 7.6 によって, P は可算集合である. そうすると, 全単射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$ が存在することになるが, 具体的に f を与えることは困難である.

ところで, 定理 7.7 の証明の本質は補題 7.6 にある. ところが, 補題の証明は, 自然数の無限部分集合 K の元を (7.1) のように配列できると言って終わっている. 自然数がもつ当然の性質として素通りするところではあるが, その根拠は何かと立ち止まって考えてみることも有益である. たとえば, K は無限集合であるのに, k_1 を決めることができるのかと問われたときの回答はあるだろうか. 実際, K の元を (7.1) のように配列できる根拠を示すためには, 自然数の性質を深堀りする必要がある (詳しくは第 13 章で扱う).

■ 可算集合の和集合

補 題 7.9 集合 A, B は互いに素, すなわち $A \cap B = \emptyset$ であるものとする.

(1) A, B がともに可算集合ならば, $A \cup B$ も可算集合である.

(2) A が可算集合, B が有限集合ならば, $A \cup B$ は可算集合である.

(3) A, B がともに有限集合ならば, $A \cup B$ も有限集合である.

証 明 (1) 仮定によって全単射 $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ と $h : \mathbb{N} \longrightarrow B$ が存在する. ここで, 写像 $f : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$ を

$$f(2n-1) = g(n), \qquad f(2n) = h(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

のように定義すると, f は全単射になるので, $A \cup B$ は可算集合である. 言い換えれば, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ として, A と B の元を互い違いに $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ のように並べて, 左から通し番号を振ったことになる.

(2) A は可算集合であるから全単射 $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ が存在する. また, B は有限集合であるから, $|B| = n$ として全単射 $h : [n] \longrightarrow B$ が存在する. ここで,

$$f(k) = \begin{cases} h(k), & k \in [n], \\ g(k-n), & k \in \{n+1, n+2, \dots\} \end{cases}$$

とおけば, $f : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$ は全単射になる. したがって, $A \cup B$ は可算集合である. 要は, まず B の元を並べてから, その後に A の元を並べて, 通し番号を振ったことになる.

(3) 定理 6.12 による. ■

定 理 7.10 (可算集合の有限和集合) 集合 A, B が可算集合であれば, $A \cup B$ も可算集合である. さらに, 集合 $A_1, \dots, A_n$ が可算集合であれば, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ も可算集合である.

証 明 可算集合 A, B が与えられたとする. $B \setminus A$ は可算集合 B の部分集合であるから高々可算集合である (定理 7.7). 一方, A と $B \setminus A$ は互いに素であるから, 補題 7.9 を適用すると, $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ が可算集合であることがわかる. 後半は, $A_1 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n$ に注意して, n に関する数学的帰納法を用いればよい. ■

問 7.1 集合 $A_1, \dots, A_n$ が高々可算集合であれば, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ も高々可算集合であることを示せ. さらに, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ が可算集合となるのはどのような場合か答えよ.

7.3 可算集合と写像

定 理 7.11 (可算集合への単射) A を集合, B を可算集合とする. もし単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在すれば, A は高々可算集合である. 逆に, A が高々可算集合であれば, $f : A \longrightarrow B$ は単射である.

証 明 f は単射なので $|A| = |f(A)|$ が成り立つ (定理 7.3). 一方, B は可算集合で, $f(A)$ はその部分集合であるから, 定理 7.7 によって, $f(A)$ は高々可算集合である. したがって, A もそうである.

逆を示すために, まず全単射 $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ をとっておく. もし, A が有限集合なら, $|A| = n$ として全単射 $h : [n] \longrightarrow A$ が存在する. 合成写像 $f = g \circ h^{-1} : A \longrightarrow B$ は単射である. A が可算集合なら, 全単射 $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ を用いて同様の議論をすればよい. ∎

定 理 7.12 (可算集合からの全射) A を可算集合, B を任意の集合とする. もし全射 $f : A \longrightarrow B$ が存在すれば, B は高々可算集合である. 逆に, B が高々可算集合であれば, 全射 $f : A \longrightarrow B$ が存在する.

証 明 A は可算集合であるから, 全単射 $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ が存在する. 合成写像 $h = f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ は全射になるから, 任意の $x \in B$ に対して, $h^{-1}(\{x\})$ は $\mathbb{N}$ の空でない部分集合になる. したがって, その最小元が定まる. それを

$$\varphi(x) = \min h^{-1}(\{x\}), \qquad x \in B,$$

とおけば, 写像 $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{N}$ が得られる. 定義から $h(\varphi(x)) = x$ が成り立ち, $h \circ \varphi = i_B$ (恒等写像) がわかる. したがって, $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{N}$ は単射である. そうすれば, 定理 7.11 によって, B は高々可算集合である.

逆に, B が有限集合なら, $|B| = n$ として全単射 $h : [n] \longrightarrow B$ が存在する. さらに, 写像 $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow [n]$ を

$$\varphi(x) = \begin{cases} k, & k \in [n], \\ 1, & k \in \{n+1, n+2, \dots\}, \end{cases}$$

によって定義すると, 全射になる. そうすると, 合成写像 $h \circ \varphi \circ g^{-1} : A \longrightarrow B$ は全射になる. B が可算集合なら, 全単射 $h : \mathbb{N} \longrightarrow B$ が存在する. そうすると, 合成写像 $h \circ g^{-1} : A \longrightarrow B$ は全射になる. ∎

■ **元の列** 集合 X の元を (重複を許して) 並べた列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_n\ ,\ \ldots \tag{7.2}$$

を考えよう. そこに現れる (異なる) 元をすべて集めてできる集合 A は可算集合である. 実際, 列とは写像 $a : n \mapsto a_n$ のことであるから (第 4.5 節), A は像集合

$$A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

のことである. したがって, 定理 7.12 によって A は高々可算集合である.

ところで, A が高々可算集合であることの「証明」として, 番号付けを用いる次のような議論がある. まず, a_1 に 1 番を振り, $a_2, a_3, \ldots$ と順に見て, a_1 と異なる元が現れたらそれに 2 番を振る. 引き続き順に見て, 1 番, 2 番とも異なる元が現れたらそれに 3 番を振る. このように, 重複があれば飛ばしながら, 新しい元が現れるたびに新しい番号を振ってゆく. A が有限集合であれば番号付けは途中で止まるが, 無限集合であれば番号付けの操作は終わらない. いずれにせよ, (7.2) を左から順に見てゆくことで, A のすべての元にもれなく番号を振ることができる. したがって, A は高々可算集合である.

上の議論の弱点は, 列 (7.2) が無限に続くにもかかわらず, 左から順に 1 つずつ見て番号付けをする「操作」で, $[n]$ または $\mathbb{N}$ から A の上への全単射を定義したと言えるのかが明らかでないところにある. 一方, 定理 7.12 の証明は集合と写像を用いた全く正当なものである. さいわい, その証明を操作的に言い換えたものが, 上に述べた番号付けになっていると理解できるので, 「証明」は正当化される. 一たび正当化されると, 集合と写像を用いて長々述べずに, わかりやすい直感的な言い方で済ましがちであるが, あくまで正当な議論を踏まえた上での話である. 直感的な議論は助けになり有用であるが, それが正当化され得るかを問うことが重要であり, 根拠のない「証明」に陥ることのないよう気を付ける必要がある. なお, 可算集合に関連する話題は第 11.3 節でも取り扱う.

7.4 可算集合の直積

補 題 7.13 写像 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を

$$f(x, y) = 2^{x-1}(2y-1), \qquad x, y \in \mathbb{N},$$

によって定義すると, f は全単射である.

証 明 まず, f が全射であることを示そう. 与えられた自然数 $z \in \mathbb{N}$ の素因数分解を考えれば, $z = 2^k w$ のように素因子 2 のべき乗と 2 を素因子として含まない w の積になる. ここで, $x = k+1$ とおけば $x \in \mathbb{N}$ であり, また, w は奇数であるから $w = 2y-1$ とおけば $y \in \mathbb{N}$ であって, $z = f(x,y)$ が成り立つ. したがって, f は全射である. 素因数分解の一意性から, 任意の $z \in \mathbb{N}$ を $z = 2^k w$ のように表すとき, k, w は一意的に定まるので, f は単射である. ∎

定 理 7.14 直積 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合である.

証 明 補題 7.13 より明らか. ∎

別証明 直積 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の元に通し番号を振ればよい. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の元 (x,y) を図 7.1 のように配列して, 矢印に沿って番号付けすることができる. 実際, 元 (x,y) の番号は

$$f(x,y) = \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2} + y, \qquad (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tag{7.3}$$

で与えられる. (7.3) を**カントルの対関数**という.

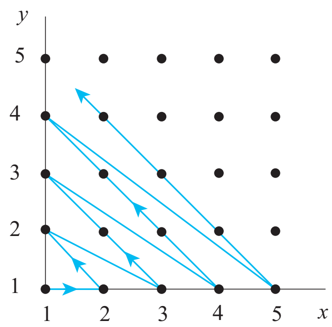

図 7.1: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の元 (x,y) を一列に並べる

問 7.2 カントルの対関数 (7.3) は全単射 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ であることを示し, 逆写像を求めよ.

補 題 7.15 集合 A, B, A_1, B_1 に対して次が成り立つ.

$$|A| = |A_1|, \ |B| = |B_1| \quad \Rightarrow \quad |A \times B| = |A_1 \times B_1|.$$

証 明 仮定から, 全単射 $g : A \longrightarrow A_1$ と $h : B \longrightarrow B_1$ が存在する. 写像 $f : A \times B \longrightarrow A_1 \times B_1$ を $f(x,y) = (g(x), h(y))$ で定義すれば, f が全単射になることが容易に確認できる. ∎

定 理 7.16 (可算集合の直積) 集合 A, B が可算集合ならば, その直積 $A \times B$ も可算集合である. さらに, 集合 $A_1, \ldots, A_n$ が可算集合ならば, その直積 $A_1 \times \cdots \times A_n$ も可算集合である.

証 明 $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$ であるから, 補題 7.15 と定理 7.14 を順に適用して,

$$|A \times B| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

が得られる. したがって, $A \times B$ も可算集合である. 後半は, $A_1 \times \cdots \times A_n = (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$ に注意して数学的帰納法を用いればよい. ∎

定 理 7.17 A が可算集合, B が空でない有限集合であれば, それらの直積 $A \times B$ は可算集合である.

証 明 B は空でない有限集合であるから, $|B| = n$ として $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ とおいてよい. $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $A_k = \{(x, b_k) \mid x \in X\}$ は $X \times Y$ の部分集合になる. このとき, 写像 $x \mapsto (x, b_k)$ は A から A_k の上への全単射であるから, A_k は可算集合である. 一方,

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

であるから, 定理 7.10 によって. $A \times B$ は可算集合である. ∎

問 7.3 集合 $A_1, \ldots, A_n$ が高々可算集合ならば, それらの直積 $A_1 \times \cdots \times A_n$ も高々可算集合であることを示せ. さらに, $A_1 \times \cdots \times A_n$ が可算集合になるのはどのような場合か答えよ.

■ **有理数** 有理数とは, 整数の比で表される数のことである. 分母と分子で符号を調節すれば, 分母は正の整数, つまり自然数にとることができるので, すべての有理数は,

$$\frac{n}{m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{7.4}$$

のように表される. ただし, 表示の一意性はない. たとえば, 約分して既約分数に帰着すれば, その表示は一意的になる.

定 理 7.18 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である.

証 明　まず, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ともに可算集合であるから, 定理 7.16 によって, 直積集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ も可算集合である. 一方,

$$f(m, n) = \frac{n}{m}\,, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

とおくと, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ は全射である. したがって, 定理 7.12 によって, $\mathbb{Q}$ は高々可算集合である. $\mathbb{Q}$ が無限集合であることは明らかなので (たとえば, 自然数 $\mathbb{N}$ を含むから), それは可算集合である. ∎

定理 7.18 によって, すべての有理数に通し番号を振ることができるのだが, もちろん, 大きさの順に番号付けすることはできない. 自然数とは異なり, 有理数に対してその隣の (次に大きい) 有理数が定まらないからである.

問 7.4 直線上に互いに重ならないように置かれた正の長さをもつ線分の集合は高々可算集合であることを示せ.

問 7.5 平面上に互いに重ならないように置かれた正の半径をもつ円板の集合は高々可算集合であることを示せ.

■ 集合の無限列の和集合 第 4.5 節で導入したように, 集合の無限列

$$A_1,\, A_2,\, A_3,\, \dots, A_n,\, \dots$$

は, 正しくは, 写像 $n \mapsto A_n$ によって, あるいは集合系 $(A_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ として理解する. それらの和集合は

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

のように書く.

補 題 7.19 集合の無限列 $A_1, A_2, \dots$ に対して,

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \backslash A_1\,, \dots,\, B_n = A_n \Big\backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\,,\ \dots, \tag{7.5}$$

として, 新たな無限列 $B_1, B_2, \dots$ を定義する. このとき, $B_1, B_2, \dots$ は互いに素であって, 次が成り立つ.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\,. \tag{7.6}$$

証 明 $m \neq n$ で $x \in B_m \cap B_n$ とする. 一般性を失うことなく $m < n$ としてよい. B_n の定義から,

$$x \in A_n\,, \qquad x \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \tag{7.7}$$

である. 一方, $x \in B_m$ であるが, $B_m \subset A_m$ であるから $x \in A_m$ となる. これは, (7.7) の 2 番目の条件に反するから, $B_m \cap B_n = \emptyset$ である.

次に, (7.6) を示すために, まず,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7.8}$$

を示す. $n = 1$ のときは (7.5) から明らか. $n \geq 1$ として n まで等式 (7.8) が成り立っているものと仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k &= \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup \left(A_{n+1} \Big\backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\\ &= \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\end{aligned}$$

となり, 等式 (7.8) は $n+1$ のときも成り立つ. したがって, 数学的帰納法によって, (7.8) が示された.[2] では, (7.6) を示そう. $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とすると, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $x \in A_n$ となる. 一方, (7.8) から

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

となり, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ がわかる. これは, (7.6) において包含関係 $\subset$ が成り立つことを示す. 同様に, 逆向きの包含関係も示されて, 等式 (7.6) が従う. ∎

補 題 7.20 $A_1, A_2, \ldots$ は実数 $\mathbb{R}$ の空でない有限部分集合の列であり, 互いに素であるものとする. このとき,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

は可算集合である.

[2] ここで, 直ちに $n \to \infty$ としたくなるが, その議論が正当化されるためには, 集合算に「極限演算」をあらかじめ導入して, 必要な性質を証明しておく必要がある.

証 明　A の元に通し番号を振ればよいが, そのアイデアは単純である. まず, 各 A_n ごとにそれに属している実数を小さい方から順に並べたものをブロックとして準備する. 次に, ブロックを番号順に連結する.

$$|\overbrace{**\cdots**}^{A_1}|\overbrace{**\cdots**}^{A_2}|\quad\cdots\quad|\overbrace{**\cdots x\cdots**}^{A_n}|\quad\cdots \tag{7.9}$$

こうして, A の元が一列に並ぶので, 左から通し番号を振ればよい. 要は, このような番号付けを写像で記述できるかを明確にすればよい. 与えられた $x \in A$ に対して, x を含む A_n はただ 1 つ存在するので, x にその番号 n を対応させて写像 $g : A \longrightarrow \mathbb{N}$ を定義する. 具体的には,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_n(x), \qquad x \in A,$$

のように書くことができる. ただし, $\chi_n(x)$ は集合 A_n の特性関数である. 次に,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{g(x)-1} |A_n| + |\{y \in A_{g(x)} \,|\, y \leq x\}|, \qquad x \in A,$$

とおく. ただし, $x \in A_1$ のときは, 右辺の第 1 項の和は 0 とする. このとき, $f(x)$ が, 配列 (7.9) における x の番号を与え, $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ は全単射になる. ■

補 題 7.21　$A_1, A_2, \ldots$ は実数 $\mathbb{R}$ の有限部分集合の列とする. このとき,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

は高々可算集合である.

証 明　補題 7.19 のように, 新たに集合列 $B_1, B_2, \ldots$ を作る. $B_n \subset A_n$ であるから B_n は有限集合であり, 互いに素である. ここで, $M = \{n \in \mathbb{N} \,|\, B_n \neq \emptyset\}$ は自然数 $\mathbb{N}$ の部分集合であるから高々可算集合である. 補題 7.19 から,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n \in M} B_n \tag{7.10}$$

が成り立つ. もし, M が有限集合であれば, (7.10) の右辺は有限集合の有限和集合になるから, A は有限集合であることがわかる. もし, M が可算集合であれ

ば, $M = \{n_1, n_2, \dots\}$ として $C_k = B_{n_k}$ とおく. 明らかに,

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

であり, $C_1, C_2, \dots$ は $\mathbb{R}$ の空でない有限部分集合の列になるから, 補題 7.20 によって A は可算集合である. ∎

■ **代数的数** n を自然数とする. 整数 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ で, $a_0 \neq 0$ となるものに対して, x を未知数とする整数係数 n 次代数方程式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{7.11}$$

を考える. 代数学の基本定理によって, (7.11) は重複度も込めて丁度 n 個の根を複素数の範囲にもつ. そのような根のうち実数になるものを**代数的数**という. また, 代数的数でない実数を**超越数**という.

すべての有理数は代数的数である. 実際, 有理数は 2 個の整数 $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, の比 q/p で表されるが, これは整数係数 1 次方程式

$$px - q = 0$$

の根である. $\sqrt{2} - 3$, $\sqrt[3]{2} + 1$ は有理数ではないが, 代数方程式

$$x^2 + 6x + 7 = 0, \qquad (x-1)^3 - 2 = 0$$

の根であるから, 代数的数である. 代数的数は有理数に比べて相当に広いのだが, 次の定理が成り立つ.

定 理 7.22 代数的数の全体は可算集合である.

証 明 まず, 整数係数代数方程式を分類するための指標を用意する. 代数方程式 (7.11) に対して,

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

をその高さと呼ぶことにする. さて, 自然数 m に対して, 高さ h が $h \leq m$ となる代数方程式の集合を E_m とおく. 定義から明らかなように, E_m に含まれる代数方程式は m 次以下であって, すべての係数の絶対値も m 以下になる. したがって, E_m は有限集合である.

次に, E_m に属する代数方程式から得られる代数的数をすべて集めてできる集合を A_m とおく. 1 つの n 次代数方程式からは高々 n 個の代数的数が得られるので, E_m に属する代数方程式から得られる代数的数をすべて集めても有限個しかない. したがって, A_m は実数の有限集合である. さて, すべての代数的数からなる集合を $\mathbb{A}$ とするとき,

$$\mathbb{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \tag{7.12}$$

が成り立つことに注意しよう. 実際, 任意の代数的数 α はある整数係数代数方程式の根になるから, その方程式の高さを m とすれば, $\alpha \in A_m$ である. これは, (7.12) において包含関係 $\subset$ が成り立つことを示す. 逆向きは自明なので, 等式 (7.12) が成り立つ. そうすると, 補題 7.21 によって, $\mathbb{A}$ は高々可算集合であるが, それが無限集合になることは明らかなので. $\mathbb{A}$ は可算集合である. ∎

定理 7.22 のために準備した補題 7.20 の証明では, 各 A_n ごとにそれに属する実数を小さいものから順に配列した上で, 全体を一列に並べると述べた. このアイデアは, 実数の集合でなくとも一般の有限集合列 $A_1, A_2, \ldots$ に対しても自明に通用するように見えるかも知れないが, 実は, そうではない. 補題では実数の性質をうまく使っており, 全く一般の有限集合の列にそのアイデアをそのまま適用できないのである. この微妙な違いについては第 11 章で注意する.