

平成 30(2018) 年度 解析入門 期末試験問題

実施: 2018. 7.31 (火) 08:50–10:20

- 教科書・参考書などの書籍、ノートなどのメモ、スマホ・スマートウォッチなど通信機能のついているデバイスの持ち込み禁止.
- その答に至る経過を文章で記すこと. 式のみ, 答のみ, 論理不明瞭な解答は 0 点.
- 問題解説はウェブサイトを参照 www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/
- $\mathbb{N}$ は自然数の集合であり, 0 は自然数に含めない.

1. 次の主張は正しいか? 正しいければ証明, 間違っていればそれを示す例 (反例という) を 1 つ示せ. [10 点 $\times$ 2 = 20 点]

- (1) $a + b$ が無理数なら, a と b のどちらか一方は無理数である.
- (2) 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ がともに全射であれば, 合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ も全射である.

2. 次の集合 A の濃度 $|A|$ を答えよ (答だけはダメ. 説明文が必要). [5 点 $\times$ 6 = 30 点]

- (1) $A = \{6, 2, 3, 4, 3, 4, 1\} \cap \{4, 1, 4, 5\}$
- (2) $A = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. ただし, $\emptyset$ は空集合である.
- (3) $B = \{1, 2, 3, 4\}$ のべき集合 $A = 2^B$
- (4) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$
- (5) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3 \leq x \leq 3\}$
- (6) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

3. 写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が順序を保つとは

$$m \leq n \quad \implies \quad f(m) \leq f(n)$$

が成り立つことである. 次のことを証明せよ. [5 点 $\times$ 2 = 10 点]

- (1) f が単射ならば, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) \geq n$ が成り立つ.
- (2) f が全射ならば, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) \leq n$ が成り立つ.

4. X を無限集合とする. $a \in X$ として, $Y = X \setminus \{a\}$ とおく. ただし, $X \setminus \{a\}$ は差集合であり, $X - \{a\}$ と同じものである. [5 点 $\times$ 2 = 10 点]

- (1) Y は無限集合であることを示せ.
- (2) X から Y への全単射が存在することを示せ.

5. 自然数 $\mathbb{N}$, 整数 $\mathbb{Z}$, 有理数 $\mathbb{Q}$, 実数 $\mathbb{R}$ のどの 2 つも順序同型でないことを示せ. [15 点]

6. 講義では集合論について学んだ. 特に興味深いと感じた集合論の「定理」を 1 つ述べて (仮定・結論を明確にすること), どこが興味深かったかを言葉を尽くして説明せよ. (数式を除いて 400 字未満は 0 点. ここに書かれている一行がおおよそ 40 文字である.) [15 点]

平成 30(2018) 年度 解析入門 期末試験 略解

1. (1) (正) 対偶は「 a と b ともに有理数ならば $a + b$ は有理数である」となる. 有理数とは分数 a/b ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) で表される数であるから, その和も分数である (計算略). よって対偶は正しく, もとの命題も正しい.

(2) (正) 任意の $z \in Z$ に対して, $g: Y \rightarrow Z$ が全射であるから, ある $y \in Y$ が存在して, $g(y) = z$ となる. 次に, $f: X \rightarrow Y$ が全射であるから, その y に対してある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ となる. そうすると, $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ となる. これは, $g \circ f: X \rightarrow Z$ も全射であることを示す.

2.

(1) 集合では元の重複を認めないことに注意. $|A| = 2$

(2) $\emptyset$ は元を含まない空集合なので, すべての集合 E に対して $\emptyset \cup E = E$ である. したがって,

$$A = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

となる. $|A| = 2$

(3) べき集合とは部分集合の全体からなる集合のこと. $|A| = 16$

(4) $|A| = 7$

(5) A は可算集合を含む. たとえば, $\{1, 1/2, 1/3, \dots\} \subset A$. したがって, $\aleph_0 \leq |A|$. また, $A \subset \mathbb{Q}$ であり, $\mathbb{Q}$ は可算集合 (これは既知としてよい). よって, $|A| \leq \aleph_0$. こうして, $\aleph_0 \leq |A| \leq \aleph_0$ となるから, $|A| = \aleph_0$ (可算濃度)

(6) $(0, 1)$ と $\mathbb{R}$ はともに連続体の濃度である (これは既知) ことを利用すれば, $(0, 1) \subset A \subset \mathbb{R}$ から $\aleph \leq |A| \leq \aleph$ が得られ, $|A| = \aleph$ (連続体の濃度).

あるいは, 全単射 $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ を見せてもよい (講義でやった).

3. (1) 帰納法による. $n = 1$ のとき, $f(1) \in \mathbb{N}$ であるから, 当然 $f(1) \geq 1$ で成り立つ. $n \geq 1$ として, n まで成立を仮定する. つまり, $n \leq f(n)$ である. $n \leq n + 1$ であるから順序を保つことから $f(n) \leq f(n + 1)$, さらに f は単射であるから $f(n) < f(n + 1)$ である. そうすると, 帰納法の仮定から $n \leq f(n) < f(n + 1)$, つまり $n < f(n + 1)$ となる. $n, f(n + 1)$ ともに自然数なので $n + 1 \leq f(n + 1)$ となる. これは, $n + 1$ のときも主張が成り立つことを示す.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ である. f は全射なので, ある $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ が存在して, $f(x_1) = 1, \dots, f(x_n) = n$ となる. f は順序を保つので, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ となる. これらは異なる n 個の自然数であるから, $n \leq x_n$ が成り立つ. 再び, f が順序を保つことから, $f(n) \leq f(x_n)$, つまり $f(n) \leq n$ となる.

4. (1) まず, $X = Y \cup \{a\}$ で, これらは互いに素な集合の和集合. したがって, Y が有限集合であれば,

$$|X| = |Y \cup \{a\}| = |Y| + 1$$

となり, X も有限集合となる. これは, X が無限集合であるという初めの仮定に反する.

(2) Y は無限集合であるから, 異なる元の列

$$a_1, a_2, \dots$$

を取り出すことができる. そうすると,

$$X \setminus \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = Y \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$$

が成り立つ. この集合を Z とおくと,

$$X = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \cup Z,$$

$$Y = \{a_1, a_2, \dots\} \cup Z,$$

は互いに素な集合の和集合である. X から Y への写像 f を

$$f(x) = \begin{cases} a_{n+1}, & x = a_n, \\ x, & x \in Z, \end{cases}$$

とおけば, f は X から Y への全単射になる (証明すべきだが, この解説では省略).

5. $\mathbb{R}$ は連続体濃度, ほかの 3 つは可算濃度であるから, $\mathbb{R}$ からほかの 3 つへの全単射は存在しない. したがって, 順序同型も存在しない.

$\mathbb{N}$ には最小元が存在し, 他の 3 つには最小元が存在しない. したがって, $\mathbb{N}$ は他の 3 つとは順序同型にならない.

あとは, $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ が順序同型でないことを示せばよい. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ を順序同型であるとするれば, $f(0) < f(1)$ となる. $a = (f(0) + f(1))/2$ とおくと $a \in \mathbb{Q}$ であり, $f(0) < a < f(1)$ が成り立つ. f^{-1} も順序同型であるから,

$$f^{-1}(f(0)) < f^{-1}(a) < f^{-1}(f(1)) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < f^{-1}(a) < 1$$

となる. しかし, 0 と 1 の間には $\mathbb{Z}$ の元 $f^{-1}(a)$ は存在しないので, 矛盾である. したがって, $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ への順序同型は存在しない.