(水曜 3 限, 尾畑)

数理統計学・期末試験問題 (2018.07.25)

- 電卓・スマートウォッチなどの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] 3 つの事象 A, B, C は独立であって, $P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(C) = c$ がわかっている. 一般に, 事象 E の余事象を E^c で表す. (5 点 $\times 2 = 10$ 点)

(1) $P(A \cup (B \cup C)^c)$ を a, b, c で表せ.

(2) 条件付確率 $P(A \cap C | A \cup B^c)$ を a, b, c で表せ.

[2] 長さ L の棒をランダムに折って短いほうの断片の長さを X とする. (5 点 $\times 4 = 20$ 点)

(1) X の確率密度関数 $f(x)$ を求めよ.

(2) (1) を用いて, 長いほうの断片の長さと短い方の断片の長さの差が $L/5$ 以下になる確率を求めよ.

(3) X の平均値を求めよ.

(4) X の分散を求めよ.

[3] 大規模な選抜試験が実施され, 上位 25%が合格となる. 試験の結果, 平均点は 58 点, 標準偏差は 7 点であった. 受験者全体の得点分布は正規分布であると仮定して, 合格するための最低点を求めよ. (10 点)

[4] ある地域では, 病気 A の感染者が $100q\%$ $(0 < q < 1)$ あるという. 検査 B は, 感染者の 80%に陽性反応を示すが, 非感染者の $100p\%$ $(0 < p < 1)$ にも陽性反応が出るという. (5 点 $\times 4 = 20$ 点)

(1) この検査を受けて陽性反応が出た人が感染者である確率 P を p, q で表せ.

(2) q を定数として固定するとき, P は p とともにどのように変化するか, その変化の特徴を述べよ.

(3) p を定数として固定するとき, P は q とともにどのように変化するか, その変化の特徴を述べよ.

(4) $p = 0.1$, $q = 0.02$ のとき, この検査を受けて陰性反応が出た人が非感染者である確率を求めよ. 答は既約分数または小数で表せ.

[5] 50 万世帯のうち 400 世帯を無作為抽出して番組 A の視聴率調査を行い, 信頼係数 95% で視聴率の信頼区間 $18.6 \pm 3.8\%$ を得た. (5 点 $\times 2 = 10$ 点)

(1) 信頼係数 90% の信頼区間を求めよ.

(2) 信頼係数 95% を保ったまま, 信頼区間の幅をより狭く $18.6\% \pm 1.0\%$ のように精度を高めるためには, どうすればよいか? 理由も合わせて述べよ.

[6] ある工場の製造ラインで 1 万個の部品を製造した．部品 1 個の重量は 20.00g になるように調整しているが, この製造ラインの特性によって, 重量は標準偏差 0.24g の正規分布に従って変動する．製品から選んだ 9 個の標本の平均重量は 20.19g であった．(5 点 $\times\, 2 = 10$ 点)

(1) 製造ラインに狂いが生じているかどうかを有意水準 5% および有意水準 1% の仮説検定で判定せよ．

(2) 標準偏差 0.24g があらかじめ知られていないときは, どのように検定すればよいか答えよ．

[7] コインが公平かどうかを有意水準 5% の仮説検定で判断したい．そのためにコインを 400 回投げて表の回数を調べた．(10 点 $\times\, 2 = 20$ 点)

(1) この問題に即して, 第 1 種誤り確率・第 2 種誤り確率とは何か説明せよ．

(2) 第 2 種誤り確率が 20%以下になるのはどのような場合か答えよ．

付録：標準正規分布表　　$P = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-x^2/2} dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学・期末試験解説 (2018.07.25)

[1] (1)

$$\begin{aligned}
P(A\cup(B\cup C)^c) &= P(A)+P((B\cup C)^c)-P(A\cap(B\cup C)^c)\\
&= P(A)+1-P(B\cup C)-P(A\cap(B^c\cap C^c))\\
&= a+1-(b+c-bc)-P(A\cap B^c\cap C^c)\\
&= a+1-(b+c-bc)-a(1-b)(1-c)=a+(1-a)(1-b)(1-c)
\end{aligned}$$

(2) $A\cap C\subset A\cup B^c$ なので,

$$(A\cap C)\cap(A\cup B^c)=A\cap C$$

となることに注意する.

$$\begin{aligned}
P(A\cap C|A\cup B^c) &= \frac{P((A\cap C)\cap(A\cup B^c))}{P(A\cup B^c)}\\
&= \frac{P(A\cap C)}{P(A)+P(B^c)-P(A\cap B^c)}\\
&= \frac{ac}{a+(1-b)-a(1-b)}=\frac{ac}{1-b+ab}
\end{aligned}$$

[2] (1) 題意から X は区間 $[0,L/2]$ に値をとる連続型確率変数になる. したがって, 分布関数 $F(x)=P(X\le x)$ について, $x<0$ ならば $F(x)=0$, $x>L/2$ ならば $F(x)=1$ は明らか. $0\le x\le L/2$ としよう. $X\le x$ となるのは, ランダム点が線分の両端長さ x 以内から選ばれた時なのでその確率は,

$$P(X\le x)=\frac{2x}{L}\,,$$

で与えられる. したがって,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{2x}{L} & 0\le x\le L/2,\\ 1, & x>L/2.\end{cases}$$

微分して, 密度関数が求められる.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{L} & 0\le x\le L/2,\\ 0, & \text{その他}.\end{cases}$$

これは, $[0,L/2]$ 上の一様分布である.

(2) 長いほうの断片の長さと短い方の断片の長さの差が $L/5$ 以下になる事象は

$$0\le(L-X)-X\le\frac{L}{5}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{2L}{5}\le X\le\frac{L}{2}$$

その確率は

$$P\Big(0\le(L-X)-X\le\frac{L}{5}\Big)=\int_{2L/5}^{L/2}f(x)dx=\int_{2L/5}^{L/2}\frac{2}{L}\,dx=\frac{1}{5}\,.$$

(3)

$$\mathbf{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)=\int_0^{L/2}x\,\frac{2}{L}\,dx=\frac{L}{4}\,.$$

(4)

$$\mathbf{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)=\int_0^{L/2}x^2\,\frac{2}{L}\,dx=\frac{L^2}{12}\,.$$

したがって,

$$\mathbf{V}[X]=\mathbf{E}[X^2]-\mathbf{E}[X]^2=\frac{L^2}{12}-\left(\frac{L}{4}\right)^2=\frac{L^2}{48}.$$

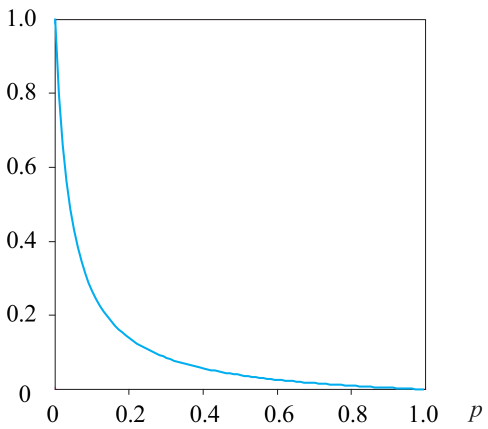
[4] (1) 感染している事象を A, 陽性反応が出る事象を B とすると,

$$P(A)=q,\qquad P(A^c)=1-q,\qquad P(B|A)=0.8,\qquad P(B|A^c)=p.$$

ベイズの公式によって,

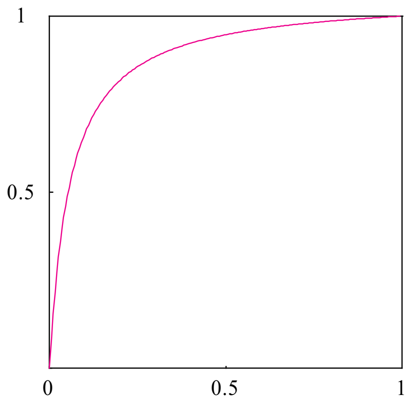
$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}=\frac{q\times 0.8}{q\times 0.8+(1-q)\times p}=\frac{4q}{4q+5(1-q)p}=\frac{4q}{(4-5p)q+5p}$$

(2) p が 0 から 1 に変化するにしたがって, $P(A|B)$ は 1 から $4/(5-q)$ まで単調に減少する. $q=0.05$ としたグラフを例示しておこう.



※ $p=0$ のとき, $P(A|B)=1$ であって, 「反比例のグラフ」ではない.

(3) q が 0 から 1 に変化するにしたがって, $P(A|B)$ は 0 から 1 まで単調に増加する. $p=0.05$ のときのグラフを例示する.



※ $q=0$ のとき $P=0$, $q=1$ のとき $P=1$ であるから, グラフは $(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ曲線である. 端点がきちんと把握されず, 曲線が浮いているようなものは不可.

(4) ベイズの公式によって,

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(A^c)P(B^c|A^c)+P(A)P(B^c|A)} = \frac{(1-q)(1-p)}{(1-q)(1-p)+q\times 0.2} = \frac{98\times 0.9}{98\times 0.9+2\times 0.2} = \frac{441}{443}$$

[5] (1) 信頼係数 95% の信頼区間と信頼係数 90%　の信頼区間は

$$\hat{p}\pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \hat{p}\pm 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \sigma=\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})},$$

で与えられる. 信頼係数 95% の信頼区間が $18.6\pm 3.8\%$ なので,

$$1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.038$$

である. そうすると,

$$1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.64}{1.96}\times 0.038 = 0.032.$$

したがって, 信頼係数 90% の信頼区間は

$$18.6\pm 3.2\%$$

(2) 信頼係数 95% の信頼区間は

$$\hat{p}\pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

で与えられるので, 幅を ± 3.8 から ± 1.0 のように $1/3.8$ にするためには標本数を $3.8^2 = 14.44$ 倍, つまり, $400\times 14.44 = 5776$ 世帯を無作為抽出する必要がある.

※ 単に「標本数を増やす」という解答は 0 点.

[6] (1) 帰無仮説と対立仮説を

$$H_0 : m = 20 \qquad H_1 : m \neq 20$$

とする. 大きさ 9 の標本平均は $\bar{X}\sim N\left(20, \frac{0.24^2}{9}\right) = N(20, 0.08^2)$. 標準化して

$$Z = \frac{\bar{X}-20}{0.08}\sim N(0,1).$$

実現値 $\bar{x} = 20.19$ を代入して,

$$z = \frac{20.19-20}{0.08} = 2.375$$

H_1 から両側検定となる. 有意水準 $\alpha = 0.05$ (5%) に対する棄却域は $|z|\geq 1.96$. 実現値 $z = 2.375$ は棄却域に落ちる. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, 製造ラインに狂いが生じていると判定される.

有意水準 $\alpha = 0.01$ とすると, 両側検定の 1%棄却域は $|z|\geq 2.58$. 実現値 $z = 2.375$ は棄却域に落ちない. したがって, 有意水準 1% では H_0 は棄却されない. （高度に有意ではない）

(2) t 検定を行う. 内容は教科書参照.

※ 不偏分散 U^2, 検定統計量 T, 自由度 $n-1$ の t 分布の用語あるいは式が含まれていないものは不可.

[7] (1) 仮説検定に際して帰無仮説と対立仮説を設定する. この問題においては, 表の出る確率を p として

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \qquad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$$

とする．コインを 400 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(400, 1/2) \approx N(200, 10^2)$ である．有意水準 $\alpha = 0.05$ ということは, X の実現値がその平均値 200 から外れて, 確率 0.05 の範囲を棄却域, 逆に平均値を中心に 0.95 の範囲を採択域とすることを意味する．標準正規分布表から $P(|Z| \geq 1.96) = 0.05$ が知られているので, 本問題において採択域は

$$|x - 200| < 1.96 \times 10 = 19.6$$

となる．公平なコインであっても, 偶然に実現値が棄却域に落ちることがある．このとき, H_0 は棄却されるので, 判定を誤ることになる．この誤りを第 1 種誤りといい, その確率を第 1 種誤り確率という．第 1 種誤り確率は有意水準に一致する．

$p \neq 0.5$ であるコインであっても実現値がこの採択域に落ちれば, H_0 を採択し, その結果, $p = 0.5$ であると判定する．これは判定として誤っているのだが, この誤りを第 2 種誤りといい, その確率を第 2 種誤り確率という．第 2 種誤り確率は p によって定まるので, 事前にこの値を知ることは不可能である．

(2) $p \neq 0.5$ のコインを 400 回振ったとき, 表の回数を Y とすれば,

$$Y \sim B(400, p) \approx N(400p, 400p(1-p))$$

となる．$p \approx 0.6$ であれば $400p(1-p) = 96 = 9.8^2$ なので, 10^2 として近似しておく．

図は, $p > 0.5$ として Y の分布を X の分布に重ねて描いたものであり, Y の分布において, 採択域に値をとる確率が第 2 種誤り確率 β である．この $\beta = 0.20$ となるような p を求めればよい．標準正規分布表から $P(0 \leq Z \leq 0.84) = 0.20$ である．したがって, $\beta = 0.20$ となる p は

$$400p = 200 + 19.6 + 8.4 = 228$$

を満たす．つまり $p = 0.57$. したがって, 実際の p が $p \geq 0.57$ であれば $\beta \leq 0.20$ となる．対称性から, $p < 0.5$ の場合も考えて, 表の出る確率 p が $p \leq 0.43$ または $p \geq 0.57$ のように 0.5 から離れているとき, 仮説検定の結果, 採択する誤り (第 2 種誤り) を犯す確率が 0.20 以下になる．