Lecture 1

確率の基本的性質

【教科書】

第 2 章 初等確率論
　2.1. 確率の素朴な導入
　2.2. 事象と確率

- **確率**とは，事柄に対する確からしさの程度を示す指標であって，0 (= 0%) から 1 (= 100%) までの数値で表現される．
- 取り扱う対象はその生起が決定論的に確定しえない事象

$P(A)$ 　事象 A の起こる確率（Probability）

- 確率計算の原理

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

問題の事象の大きさ

起こりうるすべての事象を網羅したものの大きさ

Ω：全事象または標本空間

- 根元事象を集めた集合

A：（一般の）事象

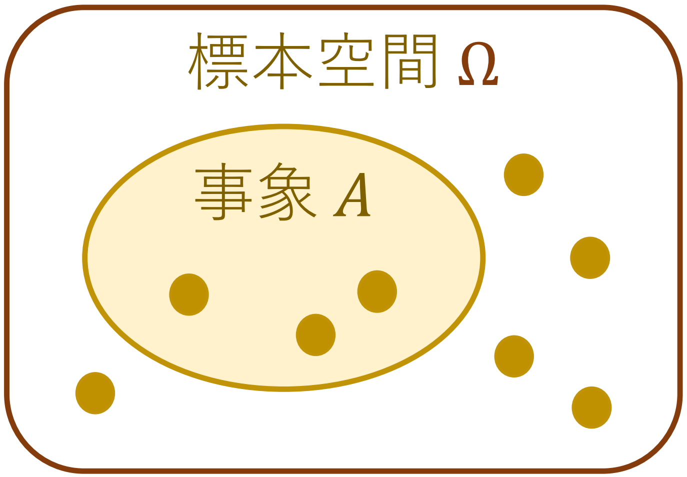
- 有限または無限個の根元事象からなり, 確率を与える対象となる
- 標本空間の部分集合

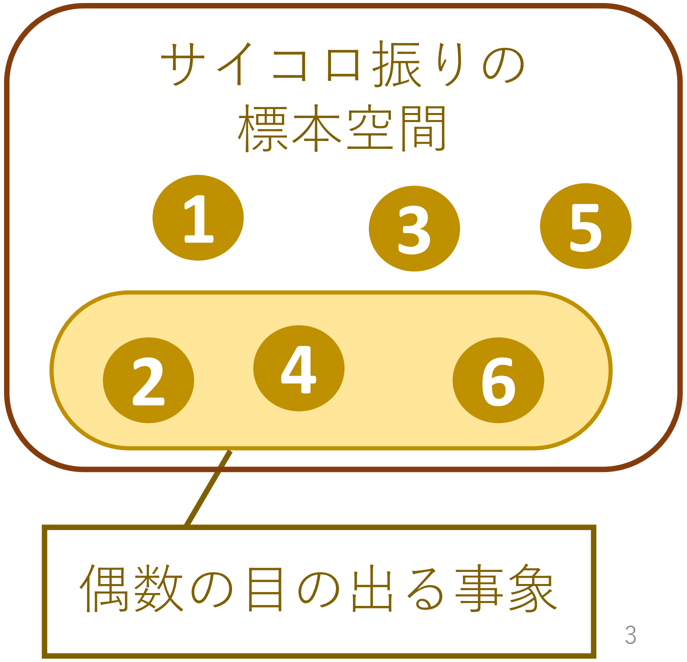
$P(A)$：事象 A の起こる確率

$\mathcal{F}$：事象族

- 扱う事象を限定する（数学的理由）

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間





例 サイコロ振りの確率モデル

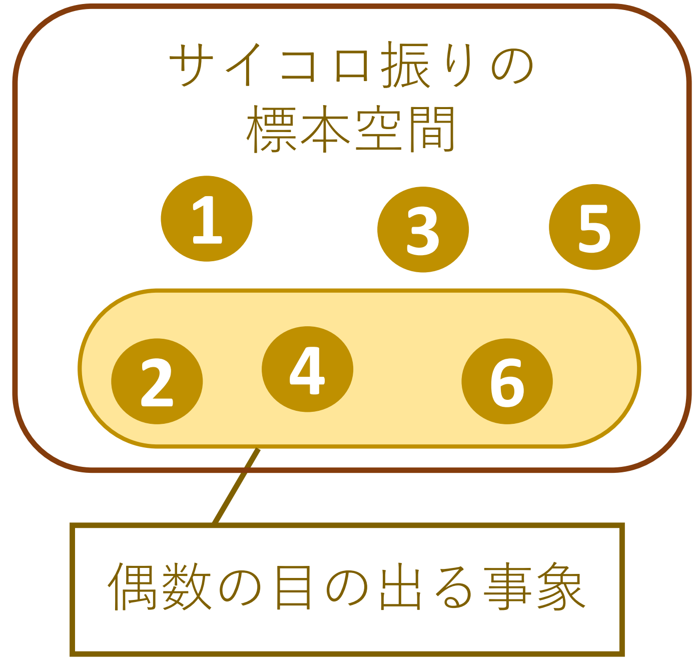
- 根元事象＝それぞれの出目
- 標本空間

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- 「偶数の目が出ること」は事象

$$A = \{2,4,6\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

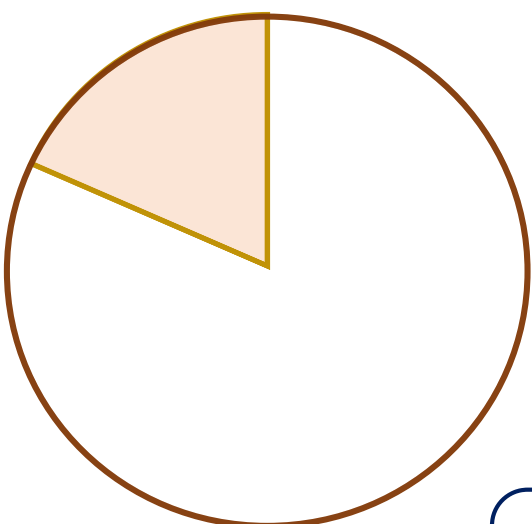


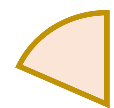
<u>組合せ確率の大前提</u>：
各根元事象が等確率で起こる

例 ダーツの確率モデル

- 根元事象＝円板上の各点
- 標本空間

$$\Omega = \text{半径 } R \text{ の円板}$$



- 事象 A として  に命中すること
- 確率 $P(A)$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

面積比

前提：どの点にも偏りなく命中する
（へたくそな射手）

標本空間が有限または可算集合の場合

✓ 根元事象に番号を付けることができる

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$$

✓ 各根元事象の確率を考えることができる

$$p_k = P(\{\omega_k\}) = P(\omega_k)$$

2重かっこはうっとうしい

✓ 確率

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k$$

✓ 組合せ確率

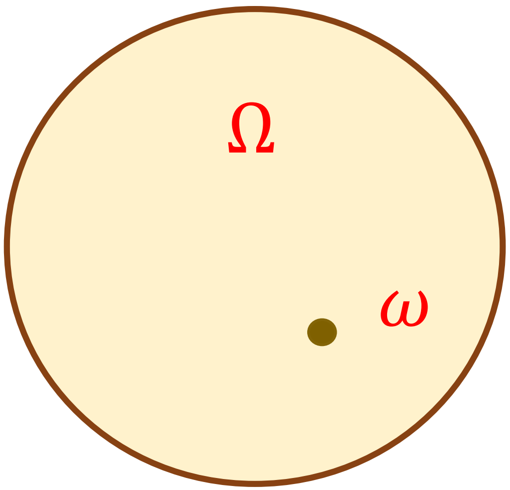
- Ω が有限集合
- $p_k = P(\omega_k)$ が一定

Ω と A の要素の個数の比

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

標本空間が連続無限集合の場合

✓ <u>各根元事象に確率を与えることでは先に進めない</u>



どの点も等確率で選ばれる状況をモデル化

$P(\{\omega\}) = p$ （一定）　　$0 \leq p \leq 1$

Ω から n 個の点を選ぶ

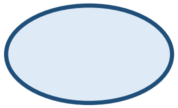
$$E_n = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

E_nは選ばれた n 個の点のいずれかが選ばれる事象

$$P(E_n) = np$$

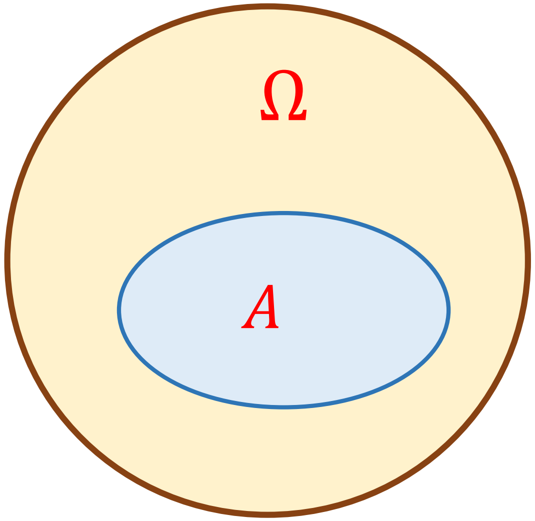
$$0 \leq P(E_n) \leq 1 \qquad 0 \leq p \leq \frac{1}{n} \qquad p = 0$$

円板からどの点も偏りなく1点選ぶ

事象 A： から点が選ばれること

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ω と A の面積比

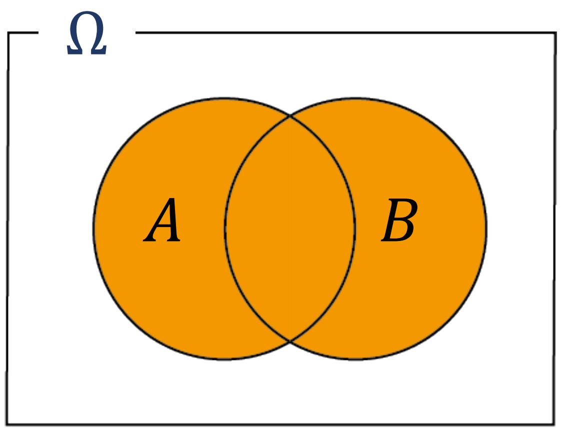


どの点にも偏りなく選ばれることがモデル化されている

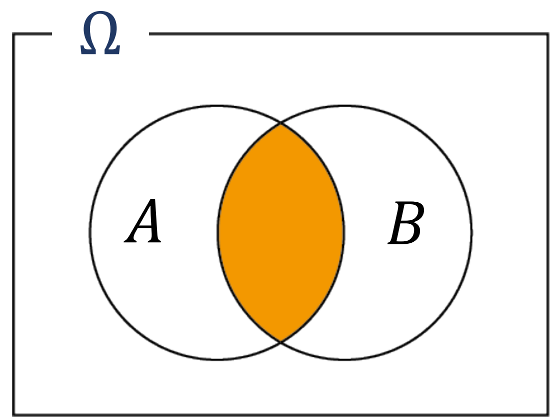
- ✓ 面積が同じならば、形や位置によらない
- ✓ 面積が2倍になれば, 確率も2倍になる

長さの比や体積比も使える

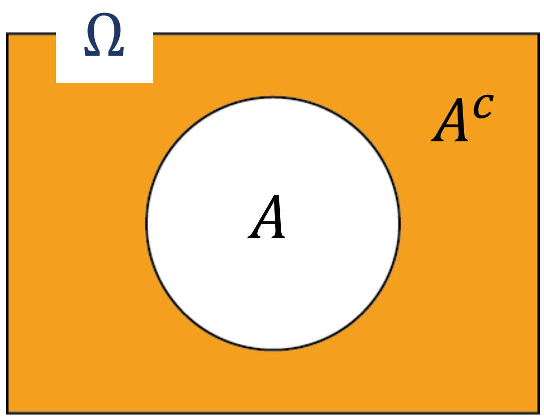
和事象　$A \cup B$



積事象　$A \cap B$



余事象　A^c



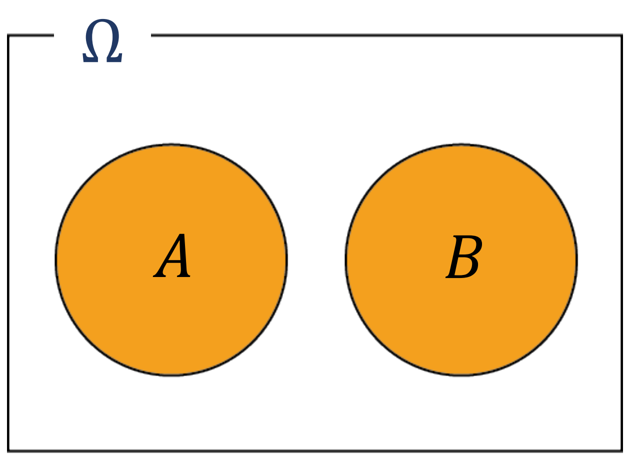
$\emptyset$: 空事象（起こりえない）

$$P(\emptyset) = 0$$

Ω : 全事象（必ず起こる事象）

$$P(\Omega) = 1$$

排反事象　$A \cap B = \emptyset$



公理 (Ω, F, P) が確率空間とは

(0) 事象族 F は $\boxed{\text{可算加法族}}$ をなす.

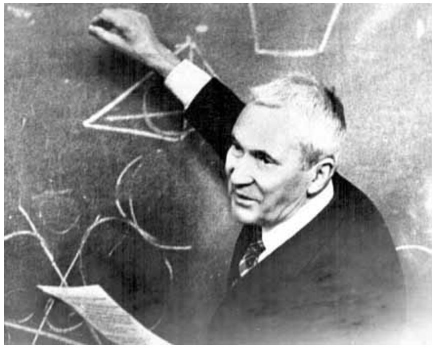
(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$

(3) [σ加法性] $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ が互いに排反であれば,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

裏に高度な数学あり



A. N. Kolmogorov (1903-1987)

定理 2. 11 [有限加法性]

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ が互いに排反であれば,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

σ加法性において,

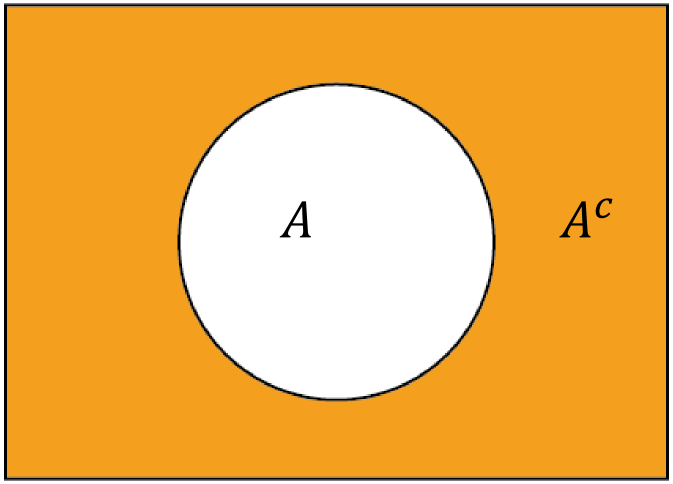
$$A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$$

とおく.

定理 2. 12 [余事象の法則]

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$\Omega = A \cup A^c$　　互いに排反



$$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

$$\Rightarrow \quad P(A^c) = 1 - P(A)$$

定理 2. 14 [加法定理または包除原理]

事象 A, B があるとき， A または B の事象の起こる確率 について

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

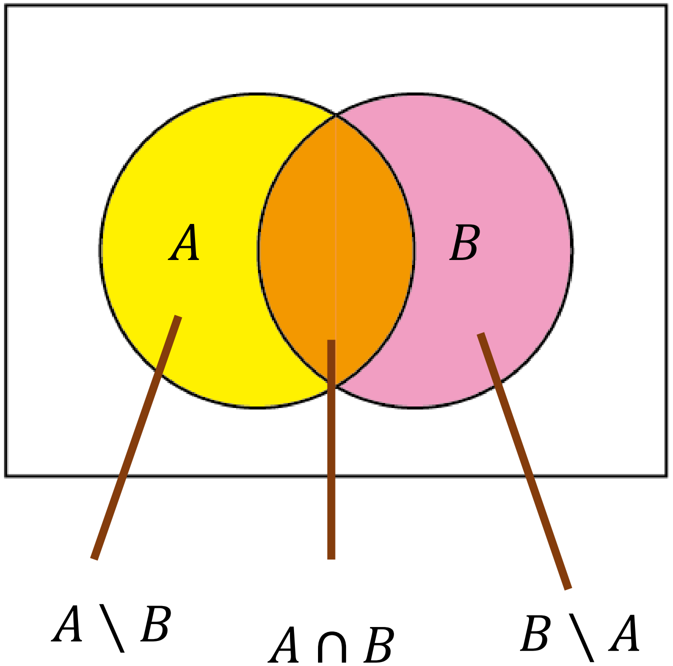
$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$

$$P(A) + P(B)$$

$$= P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

$$+ P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$

$$= P(A \cup B) + P(A \cap B)$$



問題 2.1 A, B, C がこの順番でコインを投げて, 最初に表を出したものが勝ちとなる. A, B, C それぞれが勝つ確率を求めよ. ただし, 誰も表を出せなかったときは勝者はなしとする.

問題 2.2 0から9までの数字から5個を重複を許して選んで乱数(00000～99999)を1つ作る.
(1) 乱数に数字 9 がちょうど2個含まれる確率を求めよ.
(2) 乱数に数字 0,1,⋯,9 のうち少なくとも1つがちょうど2個含まれる確率を求めよ.
(3) 乱数に含まれる5つの数字が左から右へ増加している確率を求めよ.

＊問題 2.3 [フェルマ-パスカルの分配問題] A,Bの2人がゲームをする. これまでの実績から A の勝つ確率は p, B の勝つ確率は $q=1-p$ である. ゲームはどちらかが先に4勝した段階で終わり, 賞金 10000 ユーロを受け取る. A が 2勝, B が 1勝した段階でゲームを中止することとなった. 仮想的にゲームを継続したとして, A, B のそれぞれが勝つ確率を計算し, 賞金を配分せよ.

＊問題 2.4 棒をランダムに折って2本の断片を作るとき，長いほうの長さが短いほうの3倍以下になる確率を求めよ.

問題 2.5 3辺の長さが 3,4,5 の直角三角形の内部に1点 P をランダムに選ぶとき，P と斜辺(長さ 5 の辺)との距離が 1 以下になる確率を求めよ.

問題 2.6 事象 A, B, C に対する等式

$$A \cup B = A \cup (A^c \cap B),$$

$$A \cup B \cup C = A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

を証明し, 右辺が排反事象の和になっていることを示せ.

＊問題 2.7 事象 E, F が $P(E) = 1, P(F) = 0$ を満たすものとする. このとき，すべての事象 A に対して次式が成り立つことを示せ.

$$P(A \cap E) = P(A \cup F) = P(A).$$

＊問題 2.8 [加法定理または包除原理] 事象 A, B, C に対して,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

成り立つことを示せ.

問題 2.9 事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$$

が成り立つことを示せ.

Lecture 2

条件付き確率とベイズの公式

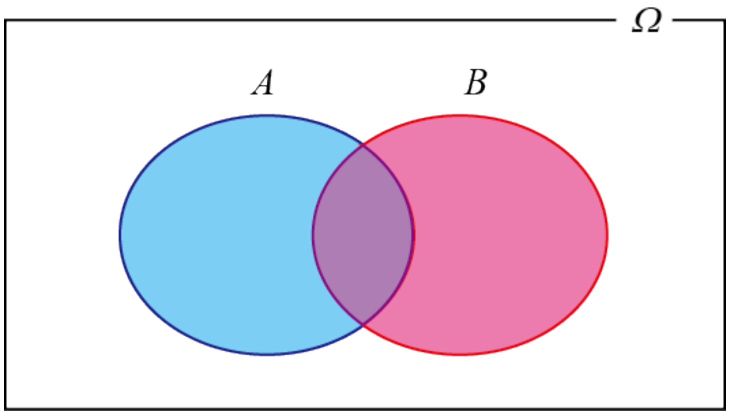
【教科書】

第 2 章 初等確率論

2.3. 条件付き確率とベイズの公式

Conditional Probability

A, B : 事象



A の下での B の
条件付確率

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ただし, $P(A) > 0$

Ω: 東北大学の学生
A: 工学部の学生
B: 宮城県出身の学生

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

工学部の学生のうち、
宮城県出身の学生の割合

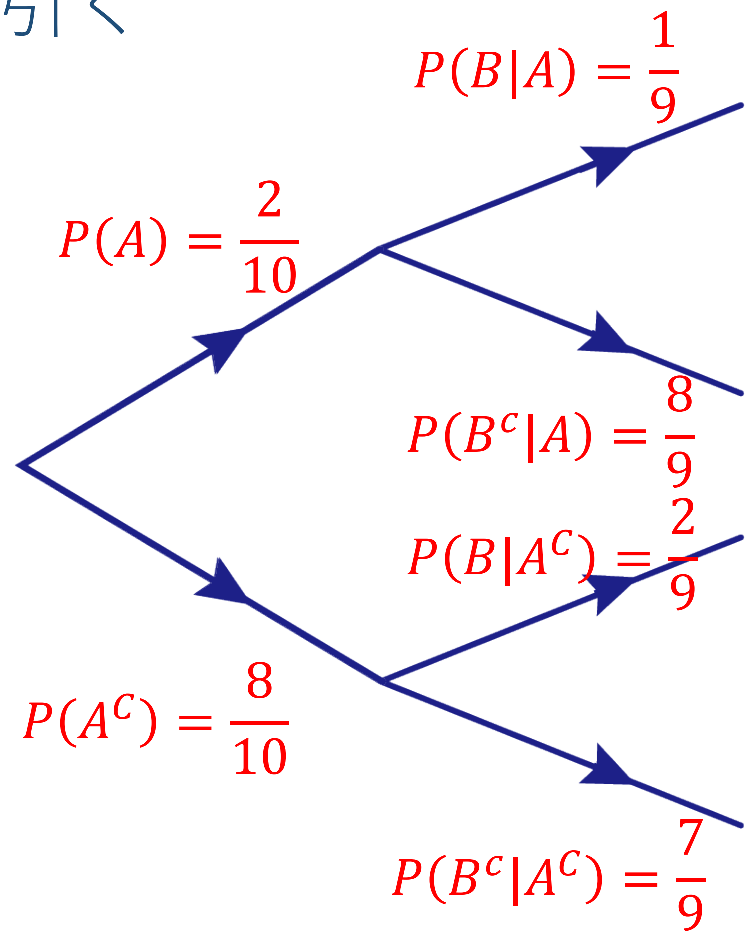
解釈：事象 A が起こったことを知った上で，事象 B の起こる確率

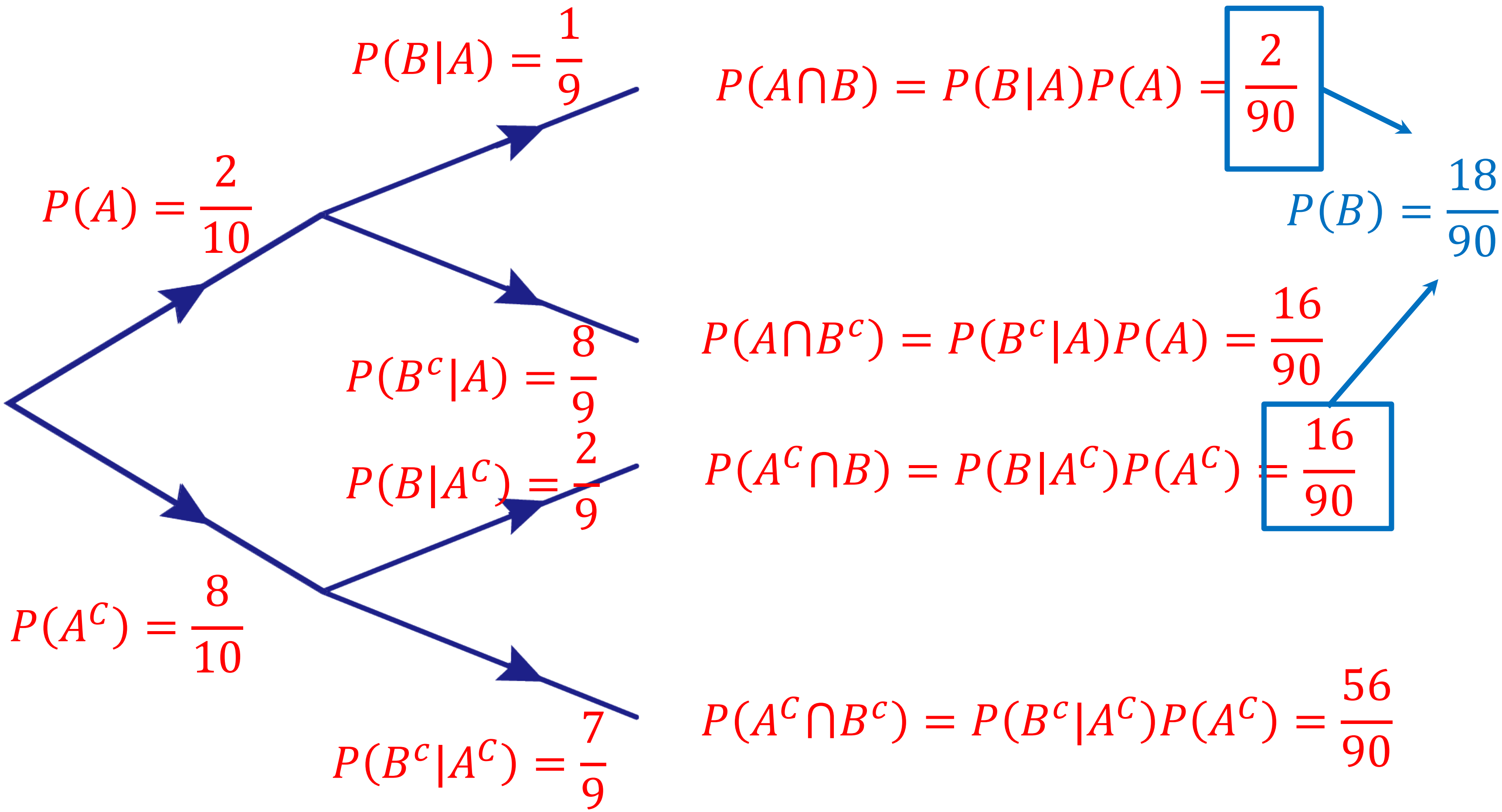
例 2.20（くじ引き）

10本中2本の当たりくじ
2人が順番に1本ずつくじを引く

場合分け

A：1人目が当たり
A^c：1人目が外れ（余事象）
B：2人目が当たり
B^c：2人目が外れ（余事象）





$P(A) = \frac{2}{10}$
$P(A^C) = \frac{8}{10}$
$P(B|A) = \frac{1}{9}$
$P(B^c|A) = \frac{8}{9}$
$P(B|A^C) = \frac{2}{9}$
$P(B^c|A^C) = \frac{7}{9}$
$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \boxed{\frac{2}{90}}$
$P(A \cap B^c) = P(B^c|A)P(A) = \frac{16}{90}$
$P(A^C \cap B) = P(B|A^C)P(A^C) = \boxed{\frac{16}{90}}$
$P(A^C \cap B^c) = P(B^c|A^C)P(A^C) = \frac{56}{90}$
$P(B) = \frac{18}{90}$

Independence of Events

定 義 2.25

2つの事象 A と B が独立であるとは,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

定 理 2.27

2つの事象 A, B に対して

A, B が独立

$$\Leftrightarrow \ P(B) = P(B|A)$$

A と B が独立

$$\Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

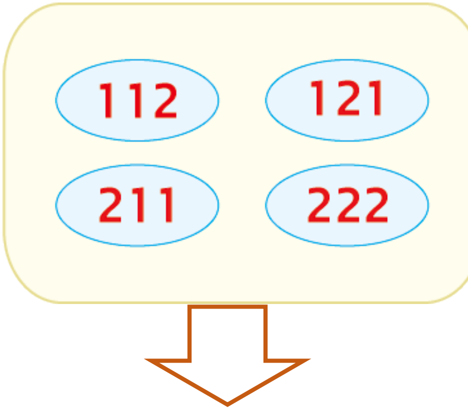
$$\Leftrightarrow \ P(B|A) = P(B)$$

多数の事象の独立性

事象 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ が独立であるとは,
任意有限個の $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_n}$ に対して

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n})$$

例 2.33



1個を取り出す

A_1: 1位の数字が 1

A_2: 10位の数字が 1

A_3: 100位の数字が 1

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$$

同様に, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$

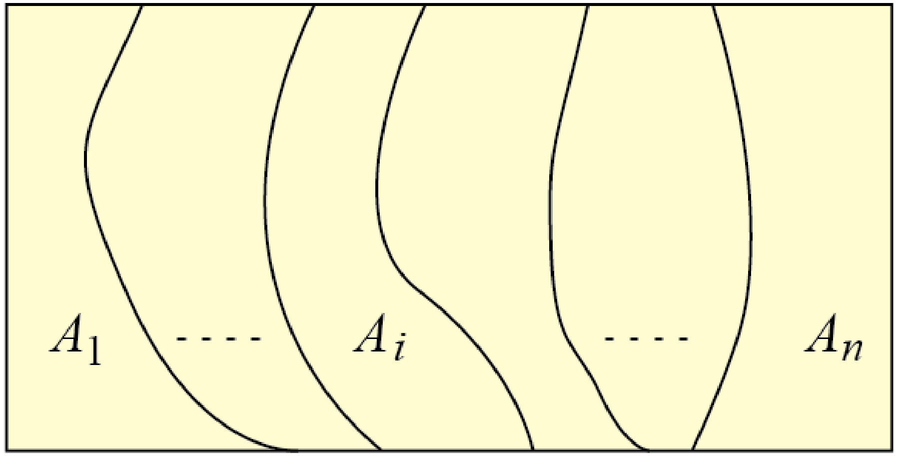
$P(A_3 \cap A_1) = P(A_3)P(A_1)$

しかし,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$$

• ベイズの定理

全事象 Ω の層別 (stratification)



$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$
$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$$

例

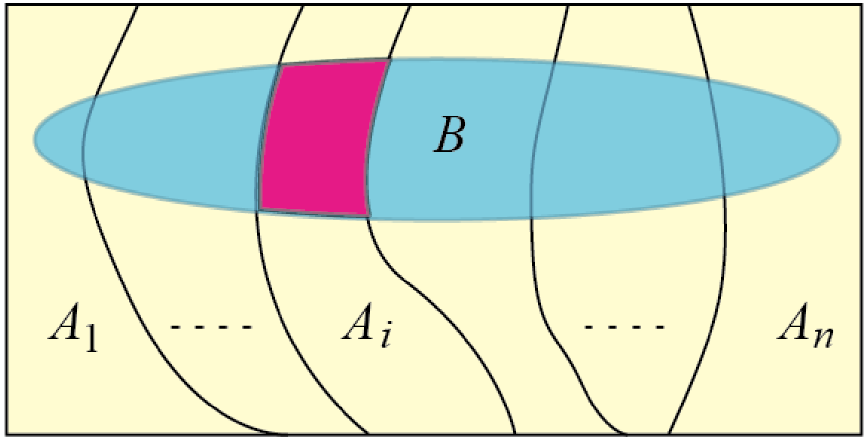
全人口を「10 代以下, 20 代, ..., 60 代, 70 代以上」と年代別に考える.

定理 2.21 （全確率の公式）

全事象が A_i $(i = 1, \cdots, n)$ に層別されているとき, 事象 B の確率 $P(B)$ は, A_i の事前確率 $P(A_i)$ と条件付き確率 $P(B|A_i)$ を使って表される.

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B$ （**互いに排反**）



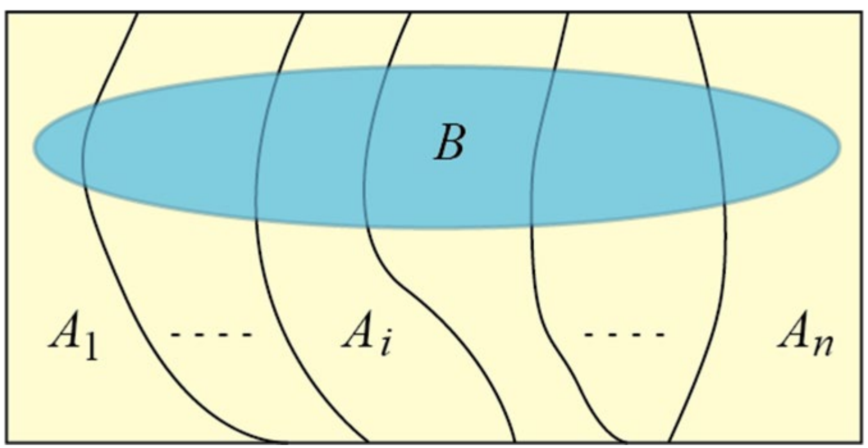
$$\therefore \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

一方, $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$

定理 2.22 （ベイズの公式）

全事象が A_i $(i = 1, \cdots, n)$ に層別されているとき, 事象 B が起こったときの各層の条件付き確率 $P(A_i|B)$ を事後確率といい, 事前確率 $P(A_i)$ と条件付き確率 $P(B|A_i)$ を使って表される.

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}}$$



$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$分子 = P(A_i \cap B) = P(A_i)\,P(B|A_i)$$

$$分母 = P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

これは全確率の公式

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$$

結果から原因を知る公式

原因 ⟹ 結果

A_1：バスが遅れた

$P(B|A_1)$

A_2：朝寝坊した

⋮

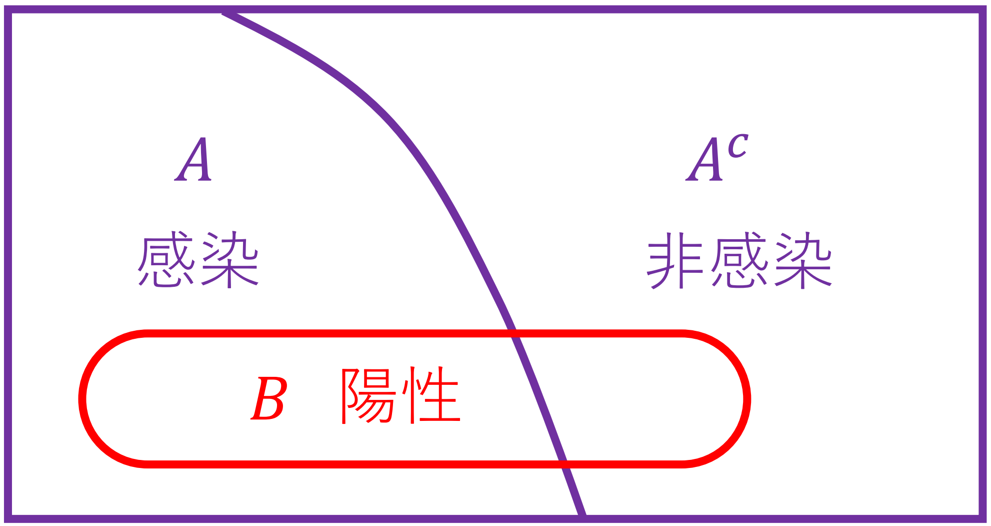
A_n：時計が止まっていた

B : 講義に遅刻した

例題 2.24 （擬陽性の問題）

- 病気 A の感染者は 500 人に 2 人の割合であるという.
- 検査 B は, 感染者の 95% に陽性反応を示すが,
  非感染者の 2% にも陽性反応が出てしまう.

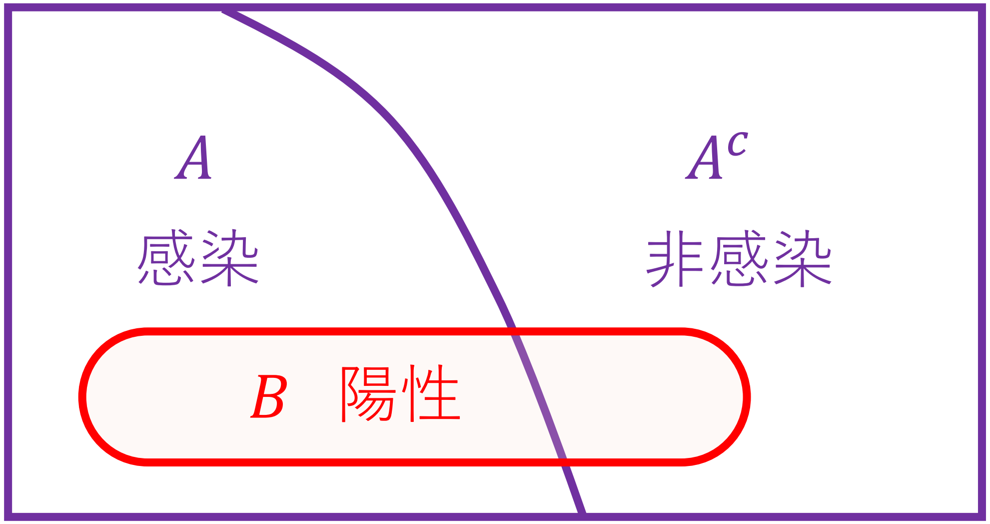
(1) 陽性反応が出れば感染しているか？
(2) 陰性反応なら非感染か？



$$P(A) = \frac{2}{500}$$

$$P(B|A) = 0.95$$

$$P(B|A^c) = 0.02$$



$$P(A)=\frac{2}{500}$$

$$P(B|A)=0.95$$

$$P(B|A^c)=0.02$$

(1) 陽性反応が出れば感染しているか？

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}$$

$$=\frac{\frac{2}{500}\times 0.95}{\frac{2}{500}\times 0.95+\frac{498}{500}\times 0.02}$$

$$=\frac{1.9}{1.9+9.96}=0.160$$

(2) 陰性反応なら非感染か？

$$P(A^c|B^c)$$

$$=\frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(A^c)P(B^c|A^c)+P(A)P(B^c|A)}$$

$$=\frac{\frac{498}{500}\times 0.98}{\frac{498}{500}\times 0.98+\frac{2}{500}\times 0.05}$$

$$=\frac{488.04}{488.04+0.1}=0.999795$$

問題 2.10 2つの事象 E, F に対して,

$$P(E) = \frac{1}{3}, \qquad P(F) = \frac{1}{2}, \qquad P(E \cap F) = \frac{1}{4}$$

がわかっている.次の確率を求めよ.

$$P(E^c), \qquad P\big((E \cup F^c)^c\big), \qquad P(E|F), \qquad P(E|F^c), \qquad P(E \cap F|E \cup F).$$

＊問題 2.11 サイコロを 2 個振って出る目のうち大きい方を X, 小さい方を Y とする. ただし, 同じ目が出た場合は $X = Y$ とする. 次の条件付き確率を求めよ.

$$P(X \geq 5|Y = 2), \qquad P(X + Y \geq 8|X = 4), \qquad P(XY \leq 10|Y \leq 4)$$

問題 2.12 壺の中に a 個の白玉と b 個の黒玉が入っている. この壺から1個を取り出し, 同色の玉を c 個付け加えて戻す. 壺の中には $a + b + c$ 個の玉が入っている. そこから再び1個を取り出すとき, その玉が白玉である確率を求めよ.

＊問題 2.13 ある国では, 病気 D の感染者は500人に2人の割合であるという. 検査 T は, 感染者の90%に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう.
(1) この検査を受けて陽性反応が出た人が感染者である確率を求めよ.
(2) この検査を受けて陰性反応が出た人が非感染者である確率を求めよ.

問題 2.14 ある工場では同じ部品を3つのメーカー A_1, A_2, A_3から仕入れる. 仕入れの割合は, A_1 から 30%, A_2 から 20%, A_3 から 50% である．これまでの経験から，A_1, A_2 の部品は 2% が不良で, A_3 からの部品は 1% が不良である．今, ランダムに取り出した1個の部品が不良であったとき, この部品はどのメーカーのものか, 確率を求めて答えよ.

＊問題 2.15　1番から10番の番号が付いている10枚のチケットがある. このうち1番と2番には景品がついている．ある人が4枚のチケットを買った. 次の条件付き確率を求めよ．[条件付き確率が直感にあわないかも]
(1) その人は1番をもっていると告げた. このとき, 残りの6枚に景品付のチケットが残っている確率を求めよ.
(2) その人は景品を少なくとも1個手に入れたと告げた. このとき, 残りの6枚に景品付のチケットが残っている確率を求めよ.

問題 2.16　サイコロを4回投げるとき，初めの2回の目の和が 8 になることと, 後の2回の目の和が 10 になることは独立であることを示せ.

問題 2.17　A, B, C が独立で, $P(A) = a,\ P(B) = b,\ P(C) = c$ とする．次の事象の確率を a, b, c を用いて表せ.

$$A \cap B^c, \qquad A \cup B, \qquad A \cup B \cup C, \qquad A \cup (B \cap C)$$

問題 2.18　事象 $A_1, A_2, \ldots$ が独立であれば，$A_1^*, A_2^*, \ldots$ も独立になることを示せ．ただし, A_i^* は A_i または A_i^c のいずれかを表す.

問題 2.19　3つの事象 A, B, C が独立であったとする．次のことを示せ.

$$P(A|B \cap C) = P(A|B \cup C) = P(A|B^c \cap C) = P(A).$$

＊問題 2.20　ある2人は正午から午後1時10分前までに公園に到着し, そこに10分間だけ滞在するのが日課である．ただし, 公園に到着する時刻はお互いに独立にランダムであるとする．この2人が公園で遭遇する確率を求めよ.

Lecture 3

データの整理

【教科書】

第 1 章 記述統計

新生児の体重データ （測定単位 g, 標本数 n = 100)

3110	2500	2770	3010	3000	3000	2740	3040	3060	3410
3100	2620	3910	3650	2840	2480	2790	3720	3520	2850
3140	2780	2270	2700	2830	3020	3160	4060	2620	3390
3050	3190	3710	3460	3200	3260	3040	3610	3360	3280
2480	3440	2970	3050	2590	3320	3580	3820	3450	4150
3300	3020	3360	3140	3300	3600	3330	3300	3300	3170
3340	3250	2880	3560	3060	3320	2740	2380	3590	2460
2960	3170	3000	3250	3140	3220	3160	3730	3460	3360
3160	3540	2890	3060	2900	3040	3220	3590	2680	3150
2770	3220	2970	3300	3560	3520	2760	2740	2820	4180

粗データ/ ローデータ (raw data)

1.2 1変量データの記述

粗データ/ ローデータ (raw data)

3110	2500	2770	3010	3000	3000	2740	3040	3060	3410
3100	2620	3910	3650	2840	2480	2790	3720	3520	2850
3140	2780	2270	2700	2830	3020	3160	4060	2620	3390
3050	3190	3710	3460	3200	3260	3040	3610	3360	3280
2480	3440	2970	3050	2590	3320	3580	3820	3450	4150
3300	3020	3360	3140	3300	3600	3330	3300	3300	3170
3340	3250	2880	3560	3060	3320	2740	2380	3590	2460
2960	3170	3000	3250	3140	3220	3160	3730	3460	3360
3160	3540	2890	3060	2900	3040	3220	3590	2680	3150
2770	3220	2970	3300	3560	3520	2760	2740	2820	4180

- わかりやすく整理
- 可視化
- 特徴を抽出

度数分布表 (frequency table)

いくつかの 階級（クラス）に
分類して表に整理する

① データの範囲

最大値 (max)　max = 4180
最小値 (min)　min = 2270
範囲 (range)　R = max - min = 1910

② 階級幅と階級数
目的に応じて決める
階級幅= 200　階級数 = 11 としよう

③ 各データはただ１つの階級に属する

④ 階級値

⑤ 度数の数え上げ

粗データ/ ローデータ (raw data)

3110	2500	2770	3010	3000	3000	2740	3040	3060	3410
3100	2620	3910	3650	2840	2480	2790	3720	3520	2850
3140	2780	2270	2700	2830	3020	3160	4060	2620	3390
3050	3190	3710	3460	3200	3260	3040	3610	3360	3280
2480	3440	2970	3050	2590	3320	3580	3820	3450	4150
3300	3020	3360	3140	3300	3600	3330	3300	3300	3170
3340	3250	2880	3560	3060	3320	2740	2380	3590	2460
2960	3170	3000	3250	3140	3220	3160	3730	3460	3360
3160	3540	2890	3060	2900	3040	3220	3590	2680	3150
2770	3220	2970	3300	3560	3520	2760	2740	2820	4180

- わかりやすく整理
- 可視化
- 特徴を抽出

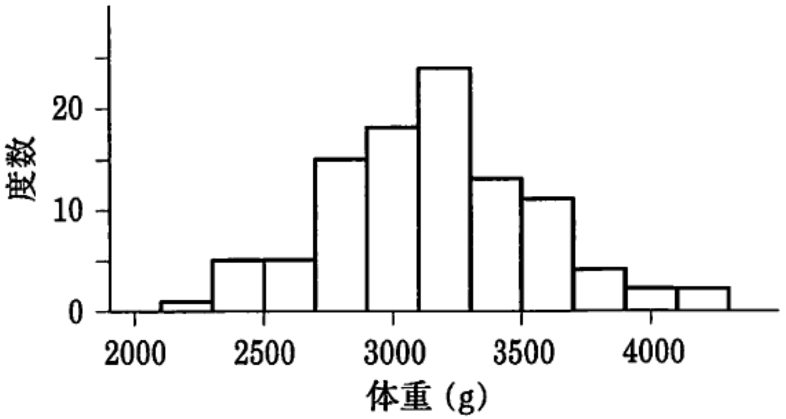
度数分布表 (frequency table)

階級番号	階級	階級値	度数
1	2100~2300	2200	1
2	2300~2500	2400	5
3	2500~2700	2600	5
4	2700~2900	2800	15
5	2900~3100	3000	18
6	3100~3300	3200	24
7	3300~3500	3400	13
8	3500~3700	3600	11
9	3700~3900	3800	4
10	3900~4100	4000	2
11	4100~4300	4200	2
計			100

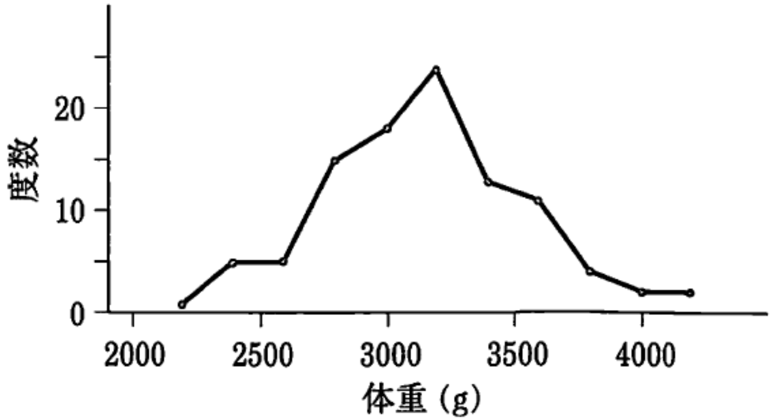
度数分布表 (frequency table)

階級番号	階級	階級値	度数
1	2100~2300	2200	1
2	2300~2500	2400	5
3	2500~2700	2600	5
4	2700~2900	2800	15
5	2900~3100	3000	18
6	3100~3300	3200	24
7	3300~3500	3400	13
8	3500~3700	3600	11
9	3700~3900	3800	4
10	3900~4100	4000	2
11	4100~4300	4200	2
計			100

ヒストグラム



度数多角形



• データの特性値

粗データ：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

度数データ：

階級値	c_1	c_2	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	計
度数	f_1	f_2	$\cdots$	f_j	$\cdots$	f_k	n
相対度数	p_1	p_2	$\cdots$	p_j	$\cdots$	p_k	1

相対度数：$p_j = \dfrac{f_j}{n}$

明らかなときは
i の範囲を省略

平均値 (mean/average)

粗データの場合：$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{1}{n}\sum x_i$

度数データの場合：$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} c_j f_j = \dfrac{1}{n}\sum c_j f_j$

中央値 (median)

粗データの場合：データを小さいほうから並べて順位が中央の値

度数データの場合：多少の計算を要す

最頻値 (mode)

度数データの場合のみ：最大度数をとる階級値

分散 (variance) $s^2 = s_x^2$

粗データの場合： $$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$$

度数データの場合： $$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(c_j - \bar{x}\right)^2 f_j$$

注意 **不偏分散**

後出

標準偏差 (standard variation) $s = \sqrt{s^2}$

簡単な性質

（1）偏差の和はゼロである： $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$

（2）分散公式

データの2乗の平均値 $= \overline{x^2}$

粗データの場合： $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2$

度数データの場合： $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} {c_j}^2 f_j - \bar{x}^2$

$$\boxed{s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum x_i^2 - 2\bar{x}\underbrace{\frac{1}{n}\sum x_i}_{\text{平均値 } \bar{x}} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum \bar{x}^2}_{\bar{x}^2} = \frac{1}{n}\sum {x_i}^2 - \bar{x}^2$$

英語と数学の成績の比較や日米の所得の比較を行うときのように測定の内容や測定単位が異 なるときには, 単にデータ（の数値）をそのまま比較することはできない． 同じ土俵上で検討できるようにデータを変換する必要がある.

$$\boxed{\text{粗データ：} x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n}$$

平均値： $\bar{x}$

標準偏差： $s = s_x$

標準化（z 変換）

$$\boxed{z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}}$$

重要な注意　標準化した変数については

平均値 $= \bar{z} = 0$　　標準偏差 $= s_z = 1$

例

新生児の身長，　体重のデータ（$n = 60$）

2変量
(2次元)
データ

番号	身長	体重
1	46.0	2700
2	49.5	3220
3	50.0	3360
4	50.0	3500
5	49.0	3120
6	50.0	3160
7	53.0	4150
8	48.0	3310
9	49.0	2880
10	50.5	3090
11	49.5	3020
12	49.0	3360
13	50.0	3110
14	50.0	3560
15	47.5	2990
16	50.5	3440
17	48.0	2920
18	49.0	3060
19	49.0	3360
20	50.0	3400

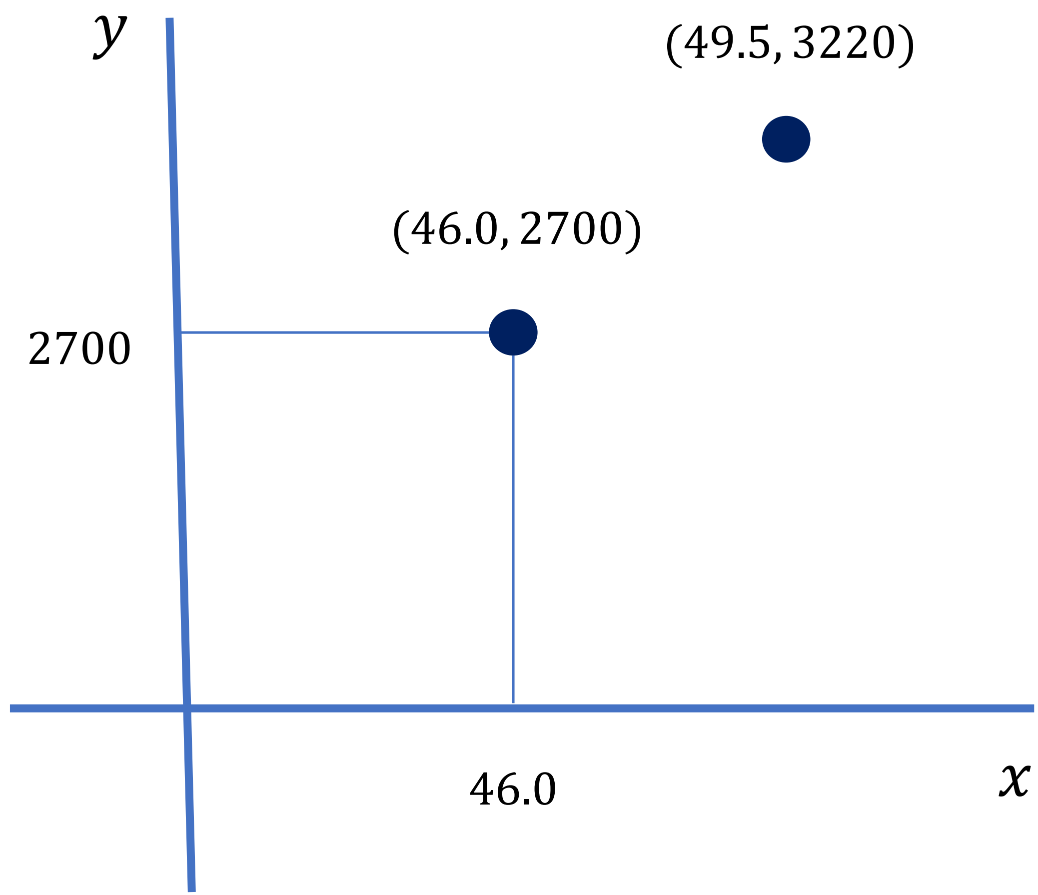
番号	身長	体重
21	48.0	3200
22	50.5	2940
23	48.5	2850
24	50.5	3220
25	48.5	2750
26	49.0	3020
27	48.5	2570
28	48.5	3030
29	45.0	2410
30	51.0	3280
31	50.5	3140
32	49.0	3040
33	52.0	3910
34	50.0	2770
35	46.5	2340
36	50.0	3140
37	50.5	3560
38	50.0	3390
39	50.0	3420
40	51.0	3450

番号	身長	体重
41	49.5	3590
42	48.5	2830
43	48.0	3120
44	51.0	3190
45	50.0	3600
46	47.0	2980
47	50.0	3090
48	51.0	3630
49	53.0	4060
50	50.0	3720
51	50.0	3400
52	50.5	3430
53	51.0	3250
54	48.0	2760
55	50.0	3320
56	49.0	2930
57	50.0	3320
58	48.0	2620
59	47.5	2860
60	48.0	2530

散布図 (Scatter Plot)

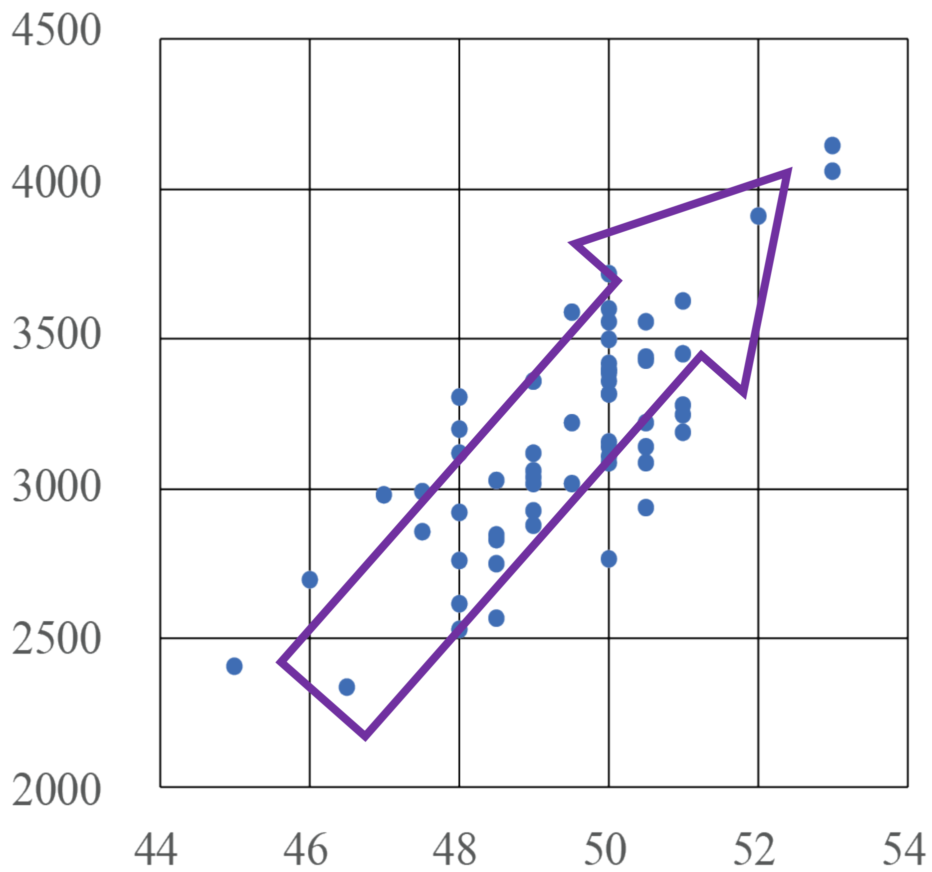
x 座標　　y 座標

番号	身長	体重
1	46.0	2700
2	49.5	3220
3	50.0	3360
4	50.0	3500
5	49.0	3120
6	50.0	3160
7	53.0	4150
8	48.0	3310
⋮	⋮	⋮



番号	身長 x	体重 y
1	46.0	2700
2	49.5	3220
3	50.0	3360
⋮	⋮	⋮
i	x_i	y_i
⋮	⋮	⋮
60	48.0	2530

散布図



正の相関

2変量の統計量

番号	身長 x	体重 y
1	46.0	2700
2	49.5	3220
3	50.0	3360
⋮	⋮	⋮
i	x_i	y_i
⋮	⋮	⋮
60	48.0	2530

n：データの個数

x の平均値と分散

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

y の平均値と分散

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

x と y の共分散と相関係数

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

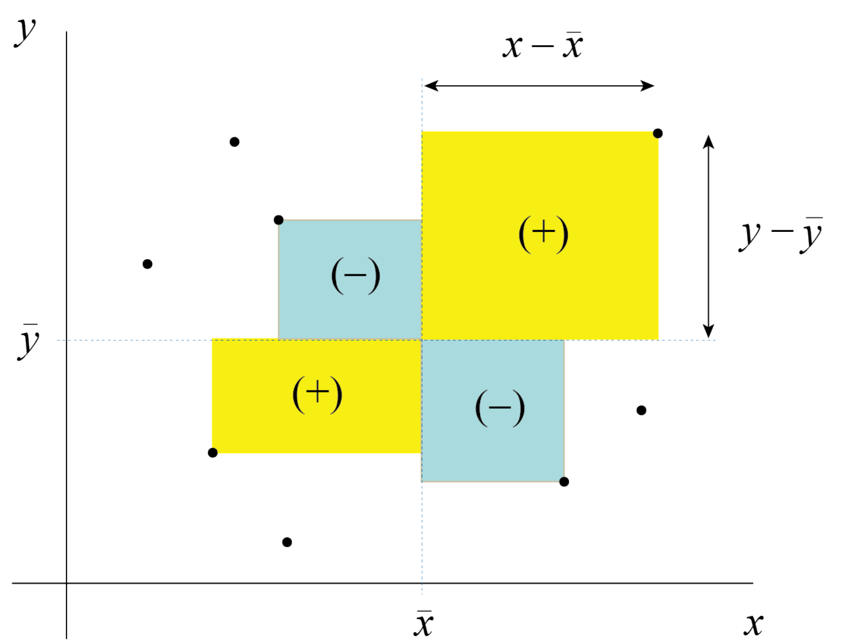
共分散・相関係数の意味

共分散

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$s_{xy} > 0$：概ね右上がりの傾向

$s_{xy} < 0$：概ね右下がりの傾向



相関係数

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{n}\sum \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}$$

標準化された共分散といえる

相関係数の性質

定理 $-1 \leq r_{xy} \leq 1$

証明 $\sum\{t(x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y})\}^2 \geq 0$ がすべての実数 t で成り立つ.

$$t^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 + 2t \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum (y_i - \bar{y})^2 \geq 0$$

$$t^2\sigma_x^2 + 2t\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = \sigma_{xy}^2 - \sigma_x^2\sigma_y^2 \leq 0$$

$$\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_x^2\sigma_y^2$$

$r_{xy} > 0$：正の相関

$r_{xy} < 0$：負の相関

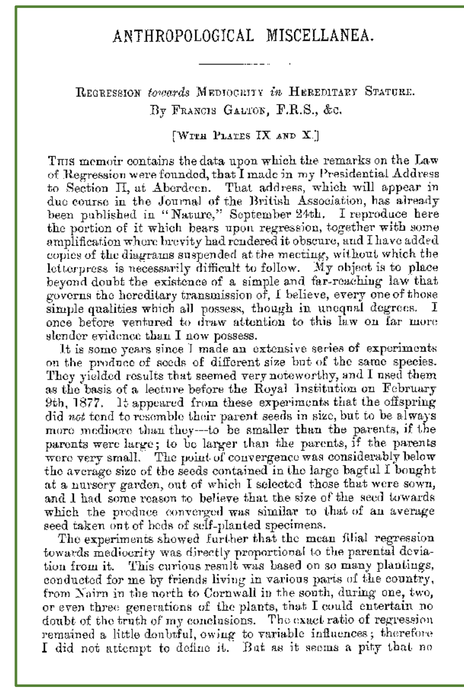
$|r_{xy}| \approx 1$：強い相関

$|r_{xy}| \approx 0$：弱い相関

An example of data : 親の身長と子の身長 (x, y)

Heights of Adult Children (y) \ Mid-Heights of Parents (x)	below	64.5	65.5	66.5	67.5	68.5	69.5	70.5	71.5	72.5	above	sum
above							5	3	2	4		14
73.2						3	4	3	2	2	3	17
72.2			1		4	4	11	4	9	7	1	41
71.2			2		11	18	20	7	4	2		64
70.2			5	4	19	21	25	14	10	1		99
69.2	1	2	7	13	38	48	33	18	5	2		167
68.2	1		7	14	28	34	20	12	3	1		120
67.2	2	5	11	17	38	31	27	3	4			138
66.2	2	5	11	17	36	25	17	1	3			117
65.2	1	1	7	2	15	16	4	1	1			48
64.2	4	4	5	5	14	11	16					59
63.2	2	4	9	3	5	7	1	1				32
62.2		1		3	3							7
below	1	1	1			1		1				5
sum	14	23	66	78	211	219	183	68	43	19	4	928

F. Galton:
Regression towards mediocrity in hereditary stature, Anthropological Miscellanea (1886)



ANTHROPOLOGICAL MISCELLANEA.

REGRESSION *towards* MEDIOCRITY *in* HEREDITARY STATURE.
By FRANCIS GALTON, F.R.S., &c.

[WITH PLATES IX AND X.]

THIS memoir contains the data upon which the remarks on the Law of Regression were founded, that I made in my Presidential Address to Section H, at Aberdeen. That address, which will appear in due course in the Journal of the British Association, has already been published in "Nature," September 24th. I reproduce here the portion of it which bears upon regression, together with some amplification where brevity had rendered it obscure, and I have added copies of the diagrams suspended at the meeting, without which the letterpress is necessarily difficult to follow. My object is to place beyond doubt the existence of a simple and far-reaching law that governs the hereditary transmission of, I believe, every one of those simple qualities which all possess, though in unequal degrees. I once before ventured to draw attention to this law on far more slender evidence than I now possess.

It is some years since I made an extensive series of experiments on the produce of seeds of different size but of the same species. They yielded results that seemed very noteworthy, and I used them as the basis of a lecture before the Royal Institution on February 9th, 1877. It appeared from these experiments that the offspring did *not* tend to resemble their parent seeds in size, but to be always more mediocre than they—to be smaller than the parents, if the parents were large; to be larger than the parents, if the parents were very small. The point of convergence was considerably below the average size of the seeds contained in the large bagful I bought at a nursery garden, out of which I selected those that were sown, and I had some reason to believe that the size of the seed towards which the produce converged was similar to that of an average seed taken out of beds of self-planted specimens.

The experiments showed further that the mean filial regression towards mediocrity was directly proportional to the parental deviation from it. This curious result was based on so many plantings, conducted for me by friends living in various parts of the country, from Nairn in the north to Cornwall in the south, during one, two, or even three generations of the plants, that I could entertain no doubt of the truth of my conclusions. The exact ratio of regression remained a little doubtful, owing to variable influences; therefore I did not attempt to define it. But as it seems a pity that no

		Mid-height parents (x)									
Adult Children (y)		64.5	65.5	66.5	67.5	68.5	69.5	70.5	71.5	72.5	sum
	73.2					3	4	3	2	2	14
	72.2		1		4	4	11	4	9	7	40
	71.2		2		11	18	20	7	4	2	64
	70.2		5	4	19	21	25	14	10	1	99
	69.2	2	7	13	38	48	33	18	5	2	166
	68.2		7	14	28	34	20	12	3	1	119
	67.2	5	11	17	38	31	27	3	4		136
	66.2	5	11	17	36	25	17	1	3		115
	65.2	1	7	2	15	16	4	1	1		47
	64.2	4	5	5	14	11	16				55
	63.2	4	9	3	5	7	1	1			30
	62.2	1		3	3						7
	sum	22	65	78	211	218	178	64	41	15	892

$\bar{x} = 68.3$

$\sigma_x^2 = 2.77$

$\sigma_x = 1.67$

$\bar{y} = 68.1$

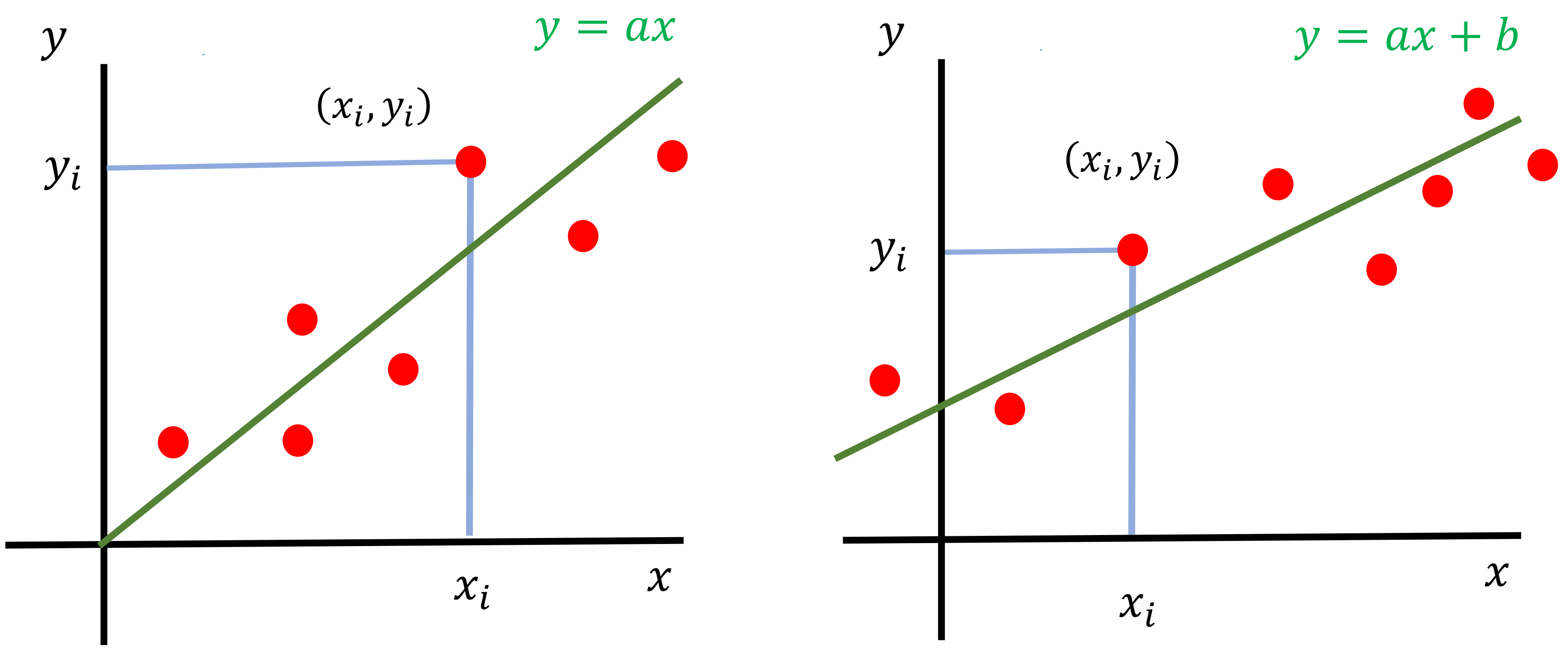
$\sigma_y^2 = 5.62$

$\sigma_y = 2.37$

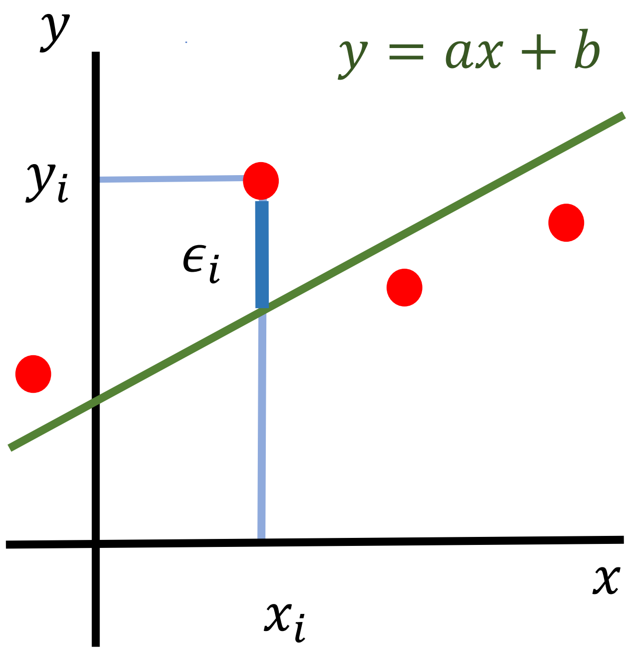
$\sigma_{xy} = 1.60$

$r_{xy} = 0.41$

回帰分析



最小2乗法



偏差 ϵ_i

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i$$

偏差平方和

$$Q = \sum \epsilon_i^2 = \sum (y_i - ax_i - b)^2$$

偏差平方和を最小にする
ように a, b を決める

$Q = Q(a, b)$ は2次式なので、

最小化は初等的にできる

線形回帰モデル（回帰直線）

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 2an(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) - 2n\left(\sigma_{xy} + \bar{x}\bar{y}\right) + 2bn\bar{x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 2bn - 2n\bar{y} + 2an\bar{x} = 0$$

連立方程式を解いて

$$a_0 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{r_{xy}\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$b_0 = \bar{y} - a_0\bar{x}$$

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$ （相関係数）

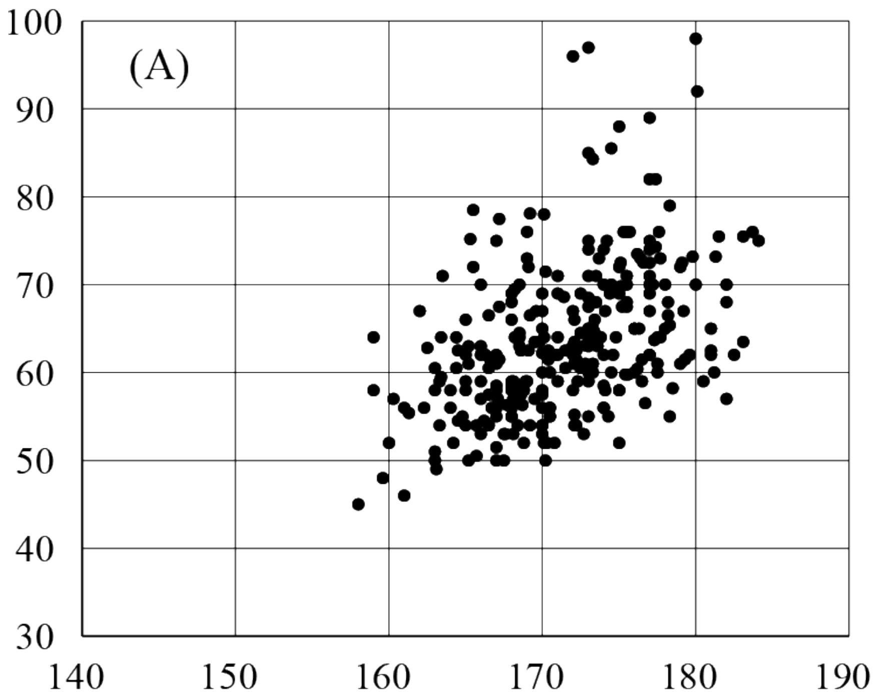
定理　x を説明変数, y を目的変数とする線形回帰モデル（回帰直線）は

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} = r_{xy}\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}$$

注意　y を説明変数, x を目的変数とする線形回帰モデル（回帰直線）は

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} = \frac{1}{r_{xy}}\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}$$

図 1.7



$\bar{x} = 171.45$ $\bar{y} = 63.59$

$\sigma_x^2 = 27.756$ $\sigma_y^2 = 73.351$

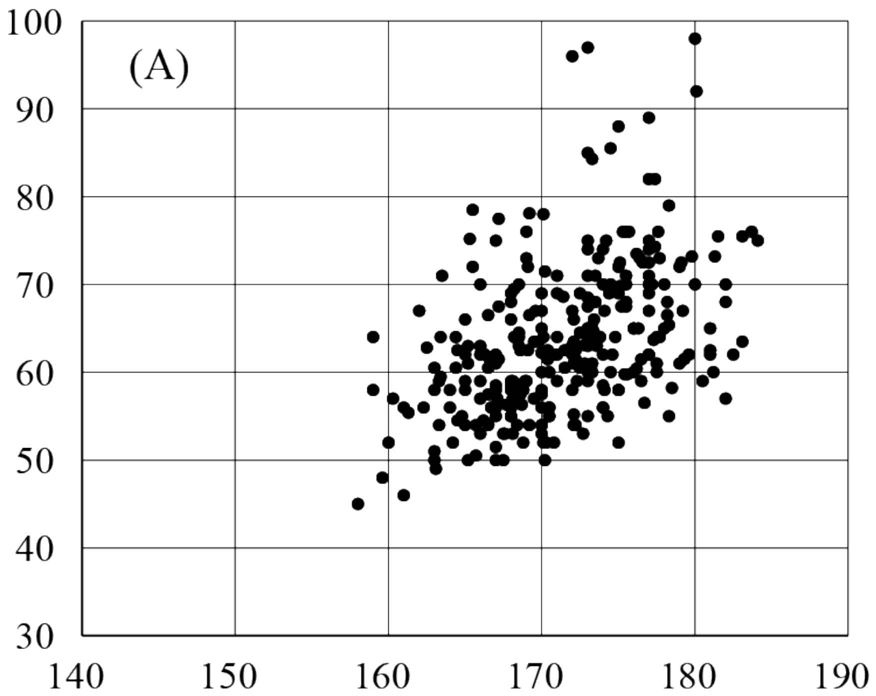
$\sigma_{xy} = 20.15$ $r_{xy} = 0.45$

回帰直線（x：説明変数）

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r_{xy} \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$$

$$y = 0.73\,x - 61.57$$

図 1.7



回帰直線（x：説明変数）

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} = r_{xy}\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}$$

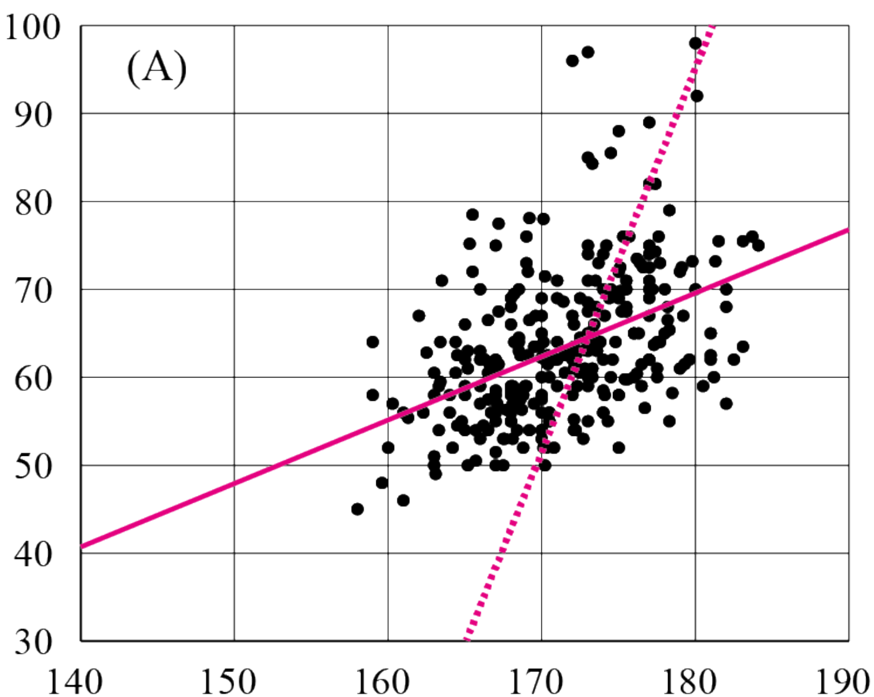
$$y = 0.73\,x\ - 61.57$$

回帰直線（y：説明変数）

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x} = r_{xy}\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}$$

$$x = 0.27\,y + 154.28$$

図 1.7



回帰直線（ x : 説明変数）

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} = r_{xy}\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}$$

$$y = 0.73\,x\; - 61.57$$

回帰直線（ y : 説明変数）

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x} = r_{xy}\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}$$

$$x = 0.27\,y + 154.28$$

Adult Children (y)	Mid-height parents (x)									
	64.5	65.5	66.5	67.5	68.5	69.5	70.5	71.5	72.5	sum
73.2					3	4	3	2	2	14
72.2		1		4	4	11	4	9	7	40
71.2		2		11	18	20	7	4	2	64
70.2		5	4	19	21	25	14	10	1	99
69.2	2	7	13	38	48	33	18	5	2	166
68.2		7	14	28	34	20	12	3	1	119
67.2	5	11	17	38	31	27	3	4		136
66.2	5	11	17	36	25	17	1	3		115
65.2	1	7	2	15	16	4	1	1		47
64.2	4	5	5	14	11	16				55
63.2	4	9	3	5	7	1	1			30
62.2	1		3	3						7
sum	22	65	78	211	218	178	64	41	15	892

$$\bar{x} = 68.3$$
$$\sigma_x^2 = 2.77$$
$$\sigma_x = 1.67$$

$$\bar{y} = 68.1$$
$$\sigma_y^2 = 5.62$$
$$\sigma_y = 2.37$$

$$\sigma_{xy} = 1.60$$
$$r_{xy} = 0.41$$

$$y = 0.58\,x + 28.36$$

1 inch = 2.54 cm ➡ $y = 0.58\,x + 72$

例： $x = 175 \rightarrow y = 173.5$ $x = 160 \rightarrow y = 164.8$

Lecture 4

確率変数と確率分布

【教科書】

第 3 章 確率変数と確率分布

3.1 確率変数の素朴な導入

3.2 確率変数の分布

3.3. 確率変数の平均と分散

第 5 章 基本的な確率分布

5.1 離散分布

確率変数(random variable)とは？

現象
調査対象

↓ 観測

観測値 x

確率が必要

- 統計の対象として観測される量は確率変数(random variable)としてモデル化される.
- 習慣によって, 確率変数には大文字 $X, Y, Z, T, \ldots$ を用いる.

- Discrete random variables (離散型確率変数)
  - (1) コインを3回投げるとき表の出る回数.
  - (2) 授業開始時の出席者数.

数える

- Continuous random variables (連続型確率変数)
  - (1) 円の内部から1点をランダムに選んだとき, その点と中心との距離.
  - (2) 新生児の体重.

測る/量る

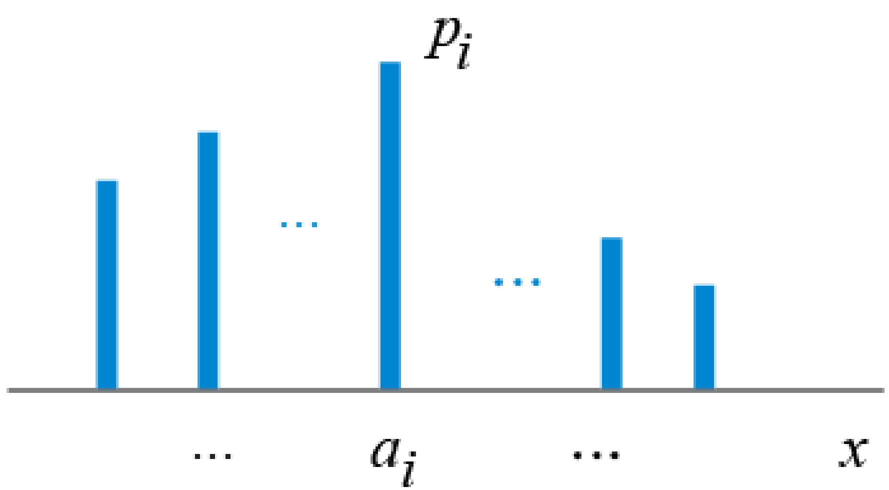
（注意）確率変数 X は特定の数を表すのではない.
その取りうる個別の値を X の実現値という.

離散型確率変数の分布(distribution)

取りうる値　$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$

その確率　$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$

x	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	合計
$P(X=x)$	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	1



数式による表記

$$P(X=a_i)=p_i$$

基本的な性質

(1)　$p_i \geq 0$

(2)　$\sum p_i = 1$

例 サイコロ振り

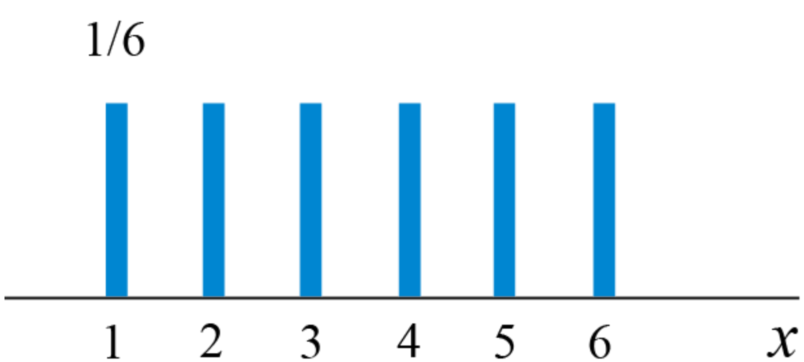
サイコロを 1 回振って, 出た目を X とする

X は $\{1,2,3,4,5,6\}$ の範囲を動く確率変数である

確率分布

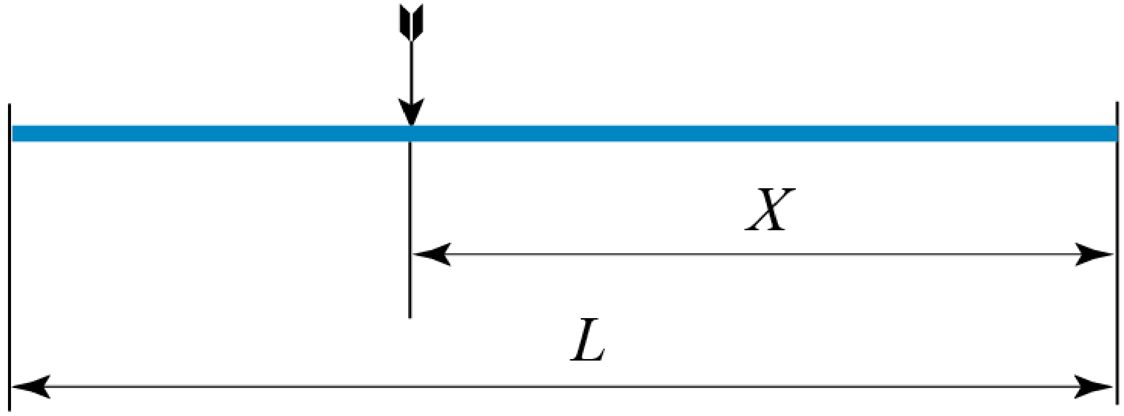
x	1	2	3	4	5	6	合計
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$P(X=k)=\frac{1}{6},\quad k=1,2,\cdots,6$$



例 3.3　線分のランダム分割

- 全長 L の線分をランダムに2分割する
- できる長いほう切片の長さを X とする



X は連続型確率変数

$$P(X = a) = 0$$

分布関数 (distribution function)

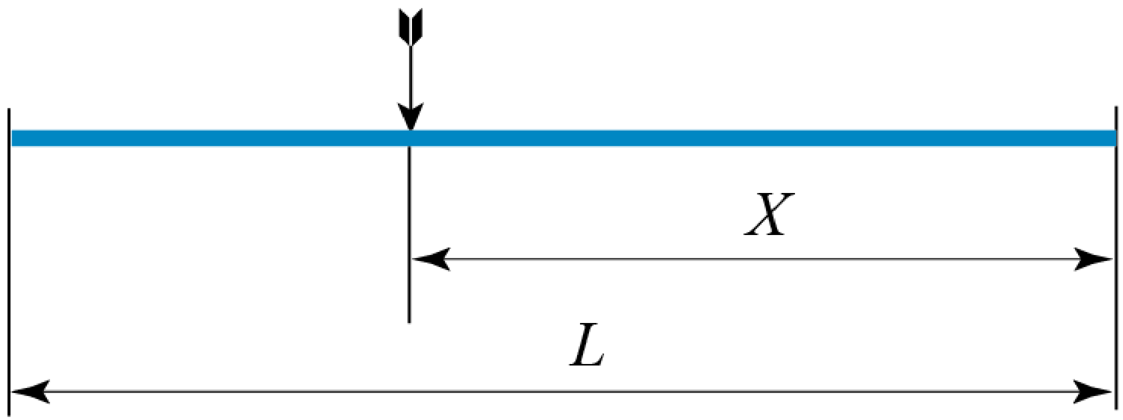
$P(X=a)$ ではなく，X の取る値に幅を持たせて考える

（累積）分布関数を用いる

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

確率変数 X が実数 x 以下の値をとる確率

例 3.3（分布関数）線分のランダム分割



まず, 確率変数 X は

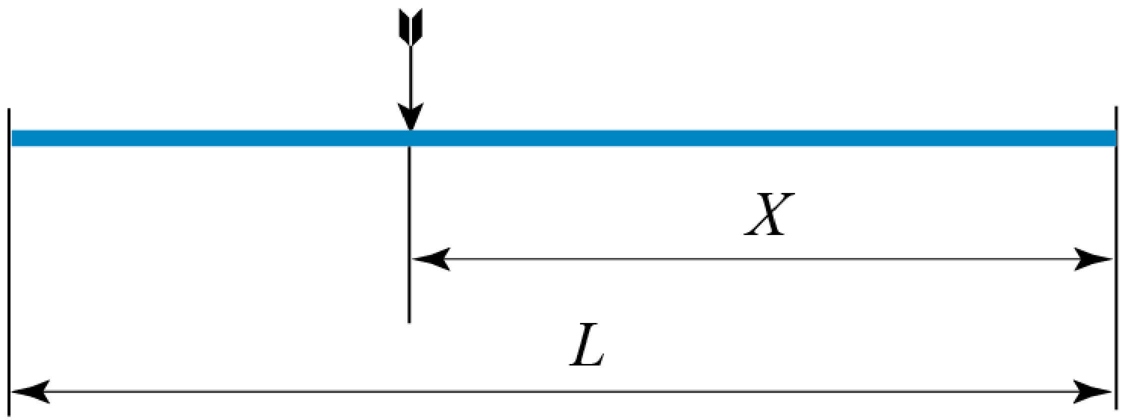
$$\frac{L}{2} \leq X \leq L$$

の範囲の値をとる

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leq \dfrac{L}{2} \\ 1, & x \geq L \end{cases}$$

例 3.3（分布関数）線分のランダム分割



まず, 確率変数 X は

$$\frac{L}{2} \leq X \leq L$$

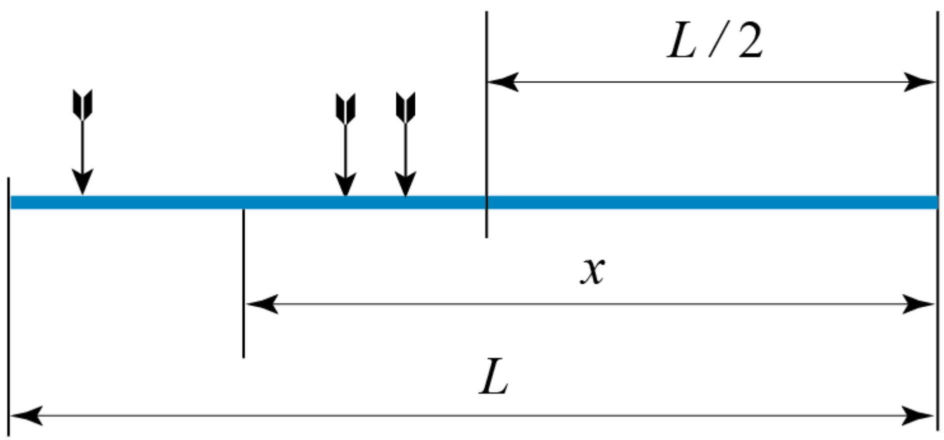
の範囲の値をとる

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$\frac{L}{2} \leq x \leq L$ のときを調べる

例 3.3（分布関数）線分のランダム分割

$\frac{L}{2} \leq x \leq L$　として事象 $\{X \leq x\}$ を調べる

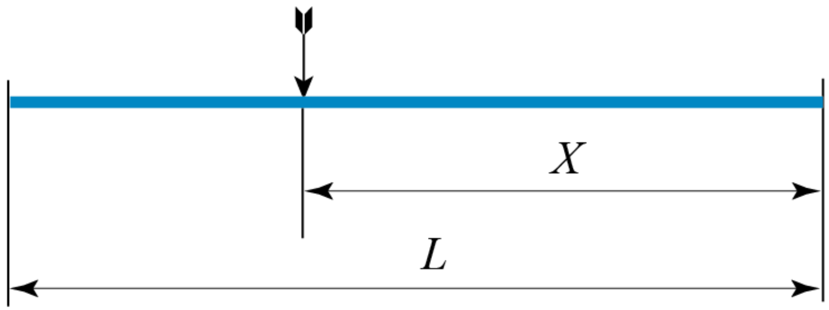


$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{|\{X \leq x\}|}{L} = \frac{(x - L/2) \times 2}{L} = \frac{2x}{L} - 1$$

長さの比

例 3.3（分布関数）線分のランダム分割

- 全長 L の線分をランダムに2分割する
- できる長いほう切片の長さを X とする

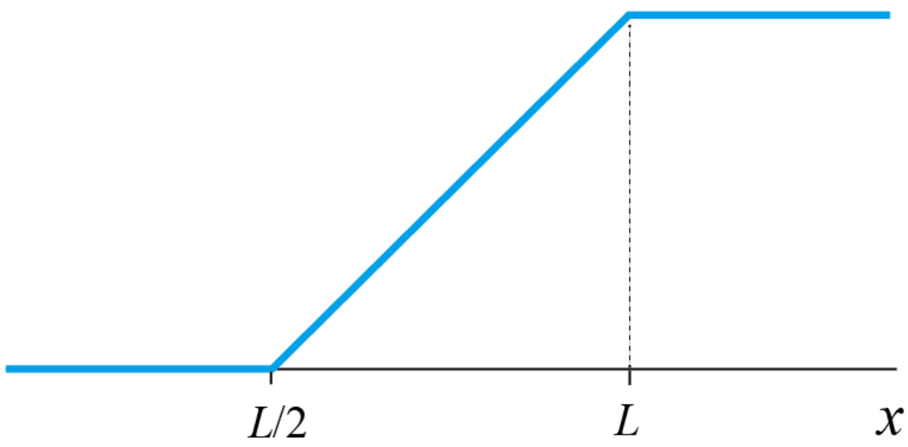


X は連続型確率変数

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2x}{L} - 1, & \dfrac{L}{2} \leq X \leq L \\ 1, & x \geq L \end{cases}$$

例 3.3（分布関数）線分のランダム分割

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2x}{L} - 1, & \dfrac{L}{2} \leq X \leq L \\ 1, & x \geq L \end{cases}$$



(1) 単調増加

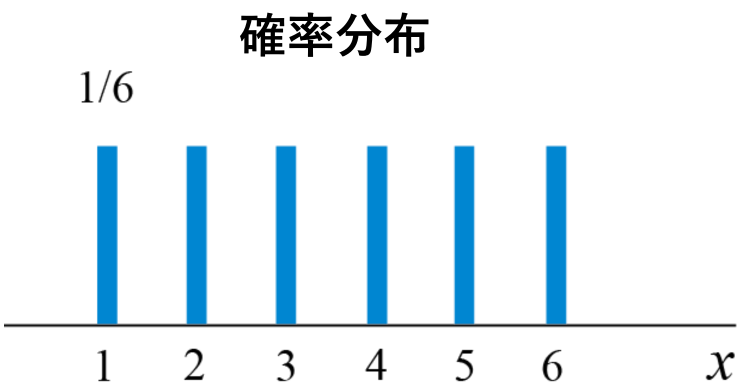
$x \leq x'$ ならば $F(x) \leq F(x')$

(2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

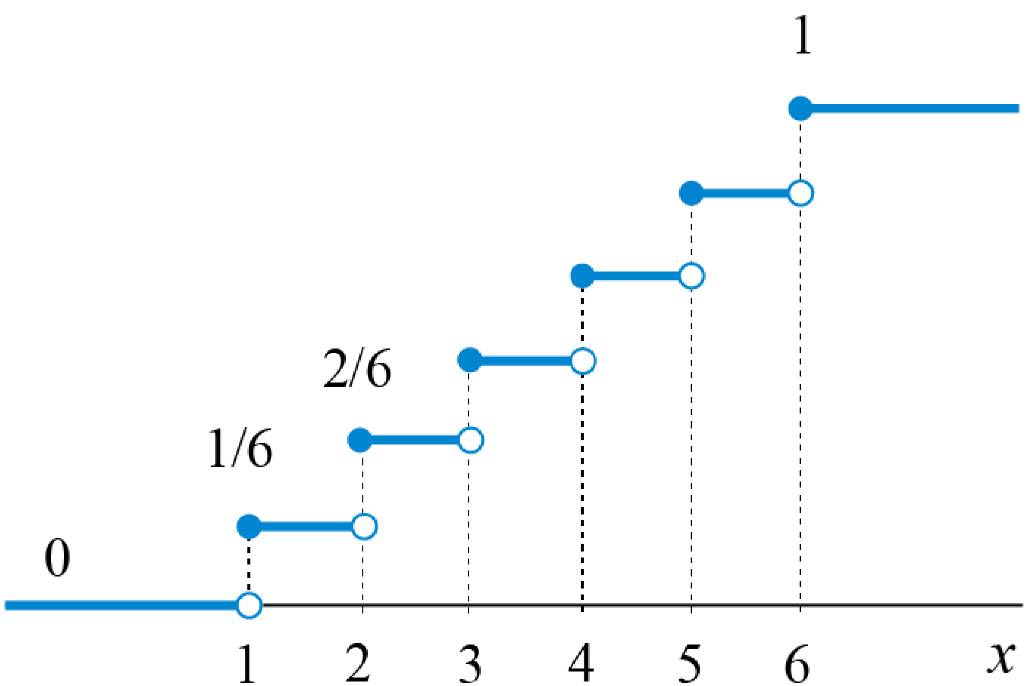
$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(3) $F(x)$ は連続関数

例 3.2（分布関数）サイコロ振り



$$F_X(x) = P(X \leq x)$$



x は連続的な変数

例 3.2（分布関数）サイコロ振り

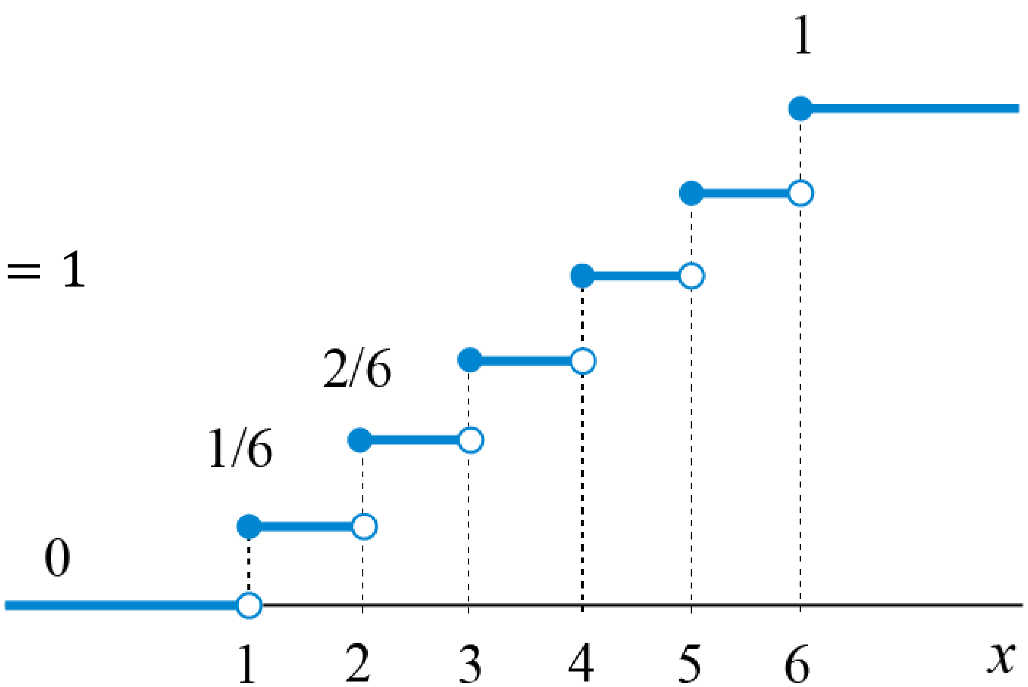
(1) 単調増加

$x \leq x'$ ならば $F(x) \leq F(x')$

(2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(3) $F(x)$ は連続関数ではないが右連続関数：

$$F(x+0) = F(x)$$

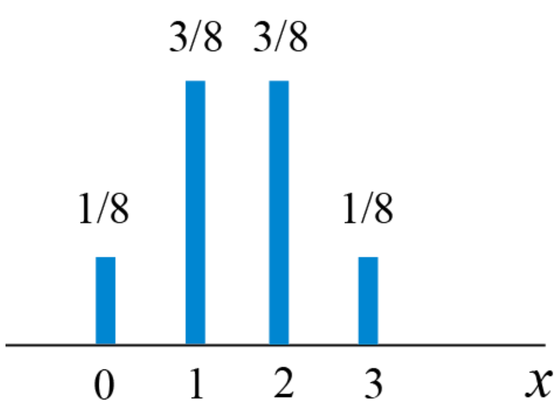


演習 [コイン投げ]

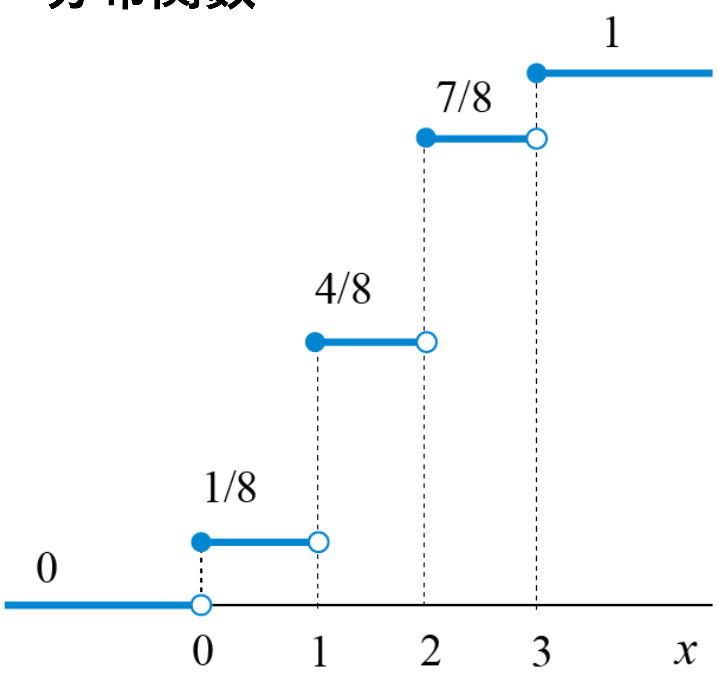
コインを3回投げて, 表の出る回数を X とする.
X の確率分布と分布関数を求めよ

確率分布

x	0	1	2	3	合計
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

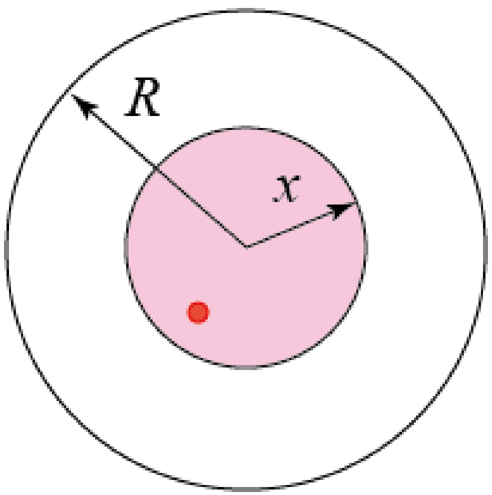


分布関数



演習 [ダーツ]

半径 R の円の内部から1点をランダムに選び, その点と中心との距離を X とする. X の分布関数を求めよ.



分布関数 $F_X(x) = P(X \leq x)$

$\{X \leq x\}$
$\Leftrightarrow$ ランダム点と中心との距離が x 以下
$\Leftrightarrow$ ランダム点が O を中心とする半径 x の円板内

その確率は

$$P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}$$

面積比

ただし, $0 \leq x \leq R$ のとき

$x < 0$ のときは $P(X \leq x) = 0$

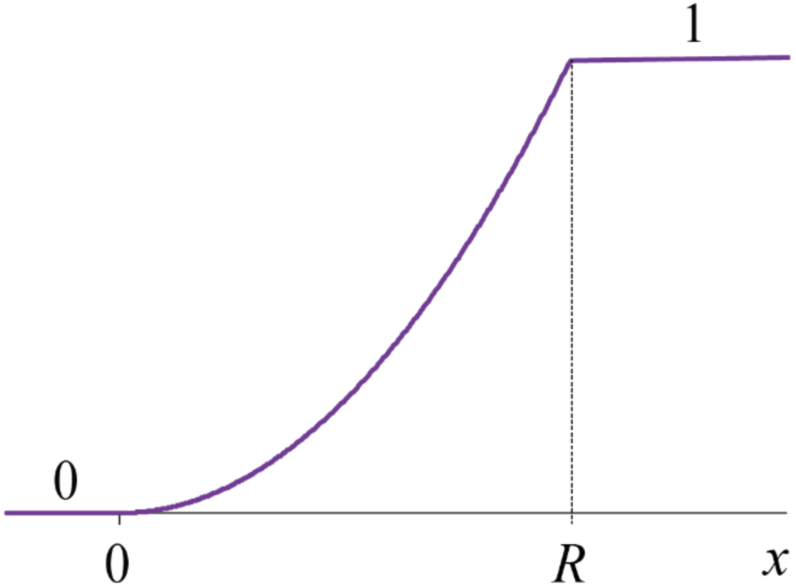
$x > R$ のときは $P(X \leq x) = 1$

演習 [ダーツ]

半径 R の円の内部から1点をランダムに選び, その点と中心との距離を X とする. X の分布関数を求めよ.

分布関数

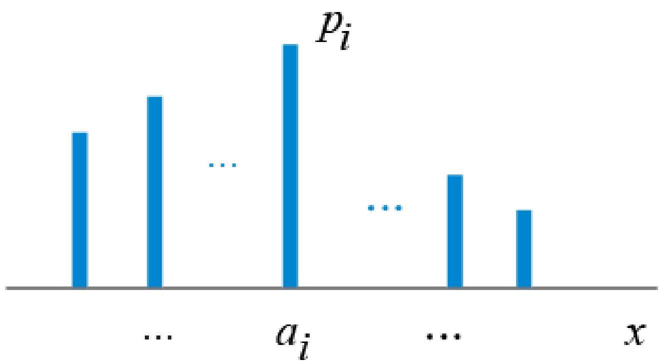
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{R^2}, & 0 \leq x \leq R \\ 1, & x > R \end{cases}$$



離散型確率変数の平均値と分散

離散型確率変数 X の確率分布

x	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	合計
$P(X=x)$	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	1



➢平均値 $\mathbf{E}[X] = m_X = \sum a_i p_i = \sum a_i P(X = a_i)$

➢分散 $\mathbf{V}[X] = \sigma_X^2 = \sum (a_i - m_X)^2 p_i = \sum a_i^2 p_i - m_X^2$

$$= \mathbf{E}[(X - m_X)^2] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$$

連続型確率変数の平均値と分散

（確率）密度関数を用いる

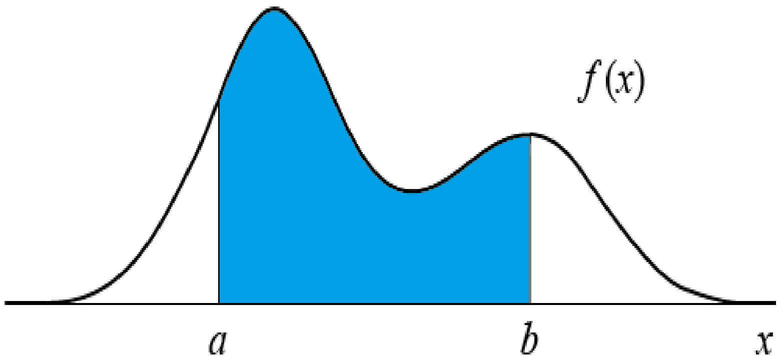
X ：連続型確率変数

$F_X(x) = P(X \leq x)$ ：分布関数

密度関数

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = F'_X(x)$$

(1) $f(x) \geq 0$　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

確率を面積で与える

連続型確率変数の平均値と分散

$f(x)$ ：離散型確率変数 X の密度関数

➢平均値

$$\mathbf{E}[X] = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

➢分散

$$\mathbf{V}[X] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - m_X^2$$

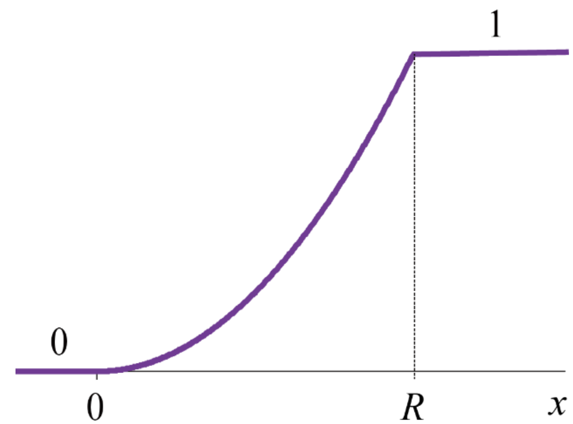
$$= \mathbf{E}[(X - m_X)^2] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$$

例 [ダーツ（続）]

半径 R の円の内部から1点をランダムに選び, その点と中心との距離を X とする.

分布関数

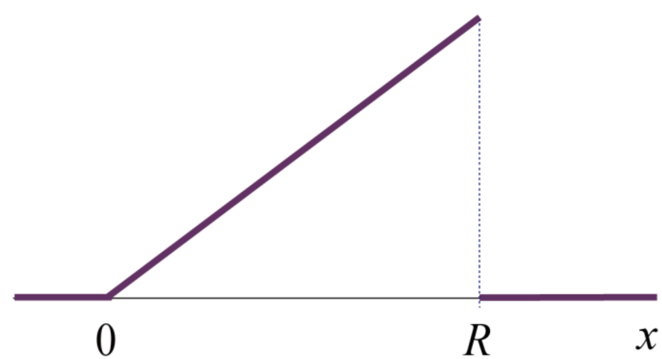
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{R^2}, & 0 \leq x \leq R \\ 1, & x > R \end{cases}$$



微分

密度関数

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{2x}{R^2}, & 0 \leq x \leq R \\ 0, & x > R \end{cases}$$



例 [ダーツ（続）]

半径 R の円の内部から1点をランダムに選び, その点と中心との距離を X とする.

密度関数

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{2x}{R^2}, & 0 \leq x \leq R \\ 0, & x > R \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^R x \frac{2x}{R^2}\,dx = \frac{2R}{3}$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^R x^2 \frac{2x}{R^2}\,dx = \frac{R^2}{2}$$

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$$

$$= \frac{R^2}{2} - \left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{R^2}{18}$$

名前の付いた重要な離散分布

- ✓ ベルヌイ分布　二項母集団の分布
- ✓ 二項分布　ベルヌイ試行列における成功回数の分布
- ✓ 幾何分布　ベルヌイ試行列における成功までの待ち時間
- ✓ ポアソン分布　二項分布の極限（少数の法則）

教科書等で見ておく

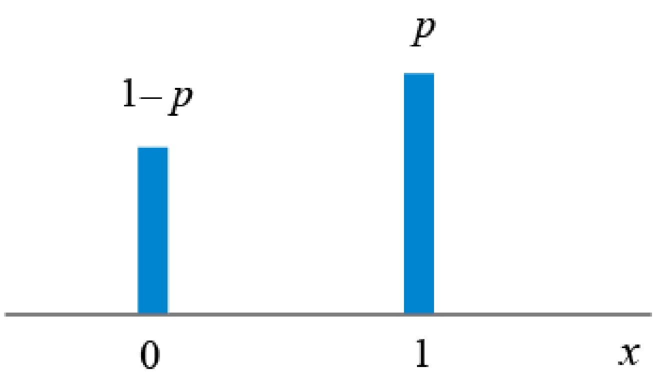
ベルヌイ分布 $B(1,p)$

成功確率 p の試行（表が出る確率が p のコインを投げる）

確率変数の導入

$$X = \begin{cases} 1, & \text{成功} \\ 0, & \text{失敗} \end{cases}$$

確率分布



$$P(X=1)=p, \qquad P(X=0)=1-p$$

$$m = \mathbf{E}[X] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$\mathbf{E}[X^2] = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$$

$$\sigma^2 = \mathbf{E}[X^2] - \boldsymbol{E}[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

平均値　$m = p$

分散　$\sigma^2 = p(1-p)$

二項分布 $B(n,p)$

成功確率 p の試行を独立に繰り返す（ベルヌイ試行列）

独立な確率変数列の導入　$X_1, X_2, \ldots X_n$

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{成功} \\ 0, & \text{失敗} \end{cases} \qquad S = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{成功回数}$$

確率分布

$$P(S=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

平均値　$m = np$

分散　$\sigma^2 = np(1-p)$

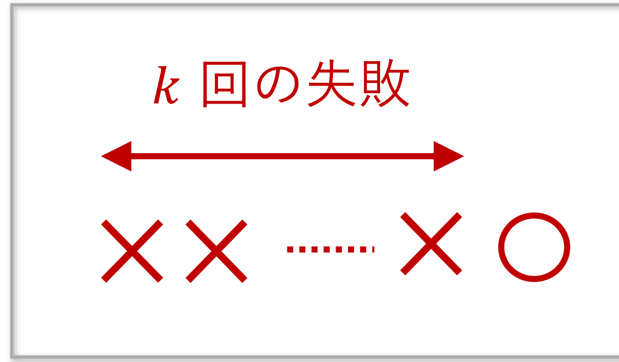
$$m = \mathbf{E}[S] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathbf{E}[S^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np(1-p+np)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{E}[S^2] - \boldsymbol{E}[S]^2 = np(1-p)$$

幾何分布

成功確率 p の試行を独立に繰り返す.
初めて成功するまでの失敗の回数を X とする.



$$P(X=k)=p(1-p)^k \quad k=0,1,2,\ldots$$

この分布を**パラメータ p の幾何分布**という.

$$m=\mathbf{E}[X]=\sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k=\frac{1-p}{p}=\frac{1}{p}-1$$

$$\mathbf{E}[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty} k^2p(1-p)^k=\frac{(2-p)(1-p)}{p^2}$$

$$\sigma^2=\mathbf{E}[X^2]-\boldsymbol{E}[X]^2=\frac{1-p}{p^2}$$

平均値　$m=\dfrac{1-p}{p}$

分散　$\sigma^2=\dfrac{1-p}{p^2}$

ポアソン分布

$\lambda > 0$ を定数とする．
確率変数 X がパラメータ λ のポアソン分布に従うとは，

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ と書く．

- 確かに確率分布になっている

指数関数のテーラー展開

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

問題 3.1 コインを2枚投げるとき, 表の枚数を X とする. X の分布関数を求めよ.

問題 3.2 区間 $[0, L]$ からどの点も同等な確からしさで1点を選んで, 2つの小区間に分割する. このとき, 長い方の小区間の長さを X, 短い方の長さを Y とする. X と Y の分布関数と密度関数を求めよ.

問題 3.3＊ X を密度関数 $f_X(x)$ をもつ連続型確率変数とする.
(1) $Y = aX + b$ の分布関数と密度関数を求めよ. ただし, a, b は定数とし, $a > 0$ とする.
(2) $Z = X^2$ の分布関数と密度関数を求めよ.

問題 3.4 サイコロを2個投げたとき, 出た目の大きい方を X とする (同じ目が出たときは, その目を X とする). X の分布, 平均値, 分散を求めよ.

問題 3.5 半径 R の円の内部からどの点も同等の確からしさで1点を選んだとき，その点と中心との距離 X の平均値と分散を求めよ．

問題 3.6＊ 半径 R の円の内部からどの点も同等の確からしさで1点を選び，その点を中心とする内接円の面積を S とする． S の分布関数, 密度関数, 平均値, 分散を求めよ.

問題 3.7＊ 確率変数 X に対して, $E[(X-a)^2]$ を最小にする実数 a を求めよ.

問題 3.8 X が $V[X]=0$ を満たすとき, $P(X=E[X])=1$ であることをチェビシェフの不等式を用いて示せ.

問題 3.9 省略

Lecture 5

平均値と分散

【教科書】

第 5 章　基本的な確率分布

5.1　離散分布（ポアソン分布）

5.2　連続分布（途中まで）

ポアソン分布

$\lambda > 0$ を定数とする.
確率変数 X がパラメータ λ のポアソン分布に従うとは,

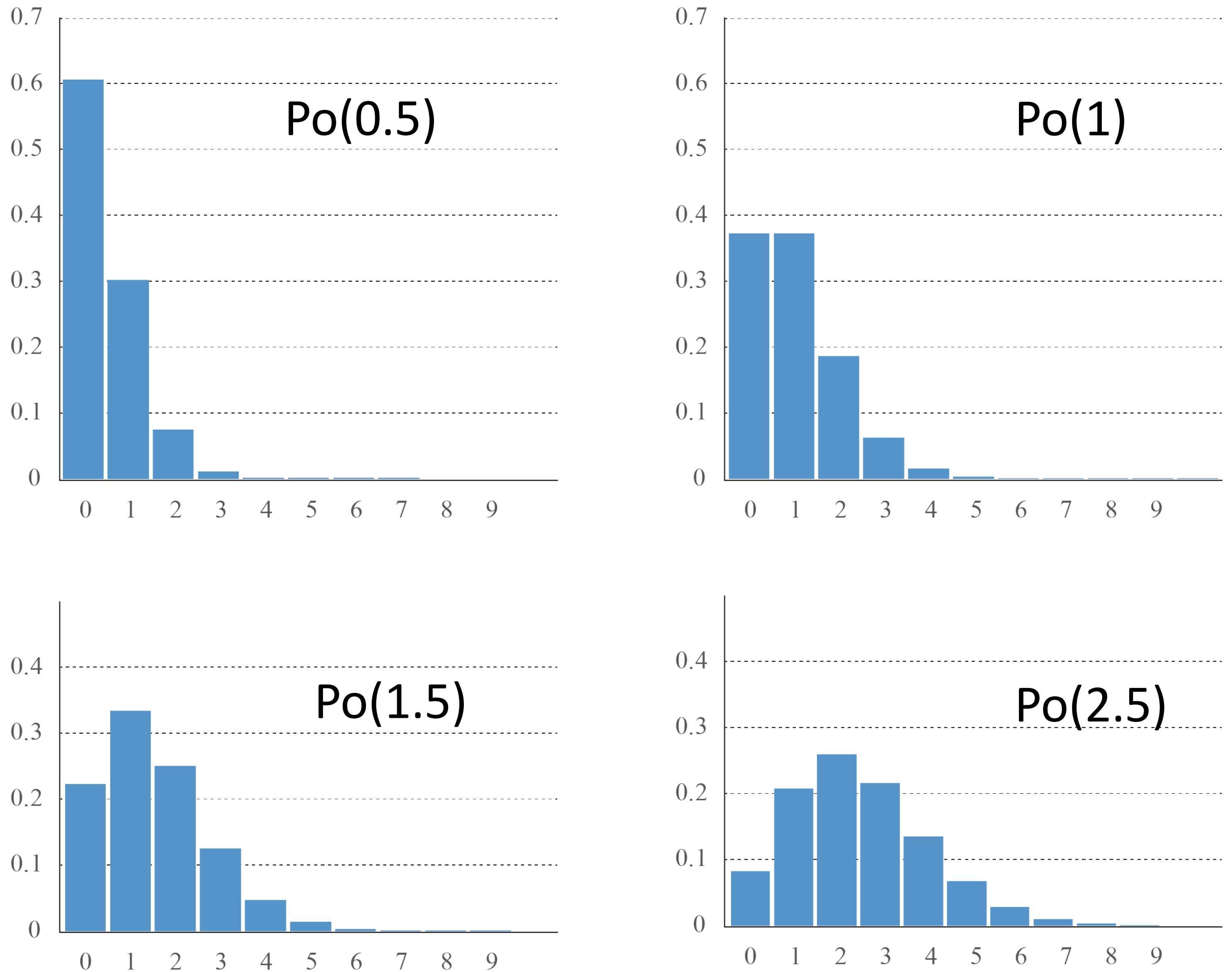
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ と書く.

➢ 確かに確率分布になっている

指数関数のテーラー展開

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$


Po(0.5)
Po(1)
Po(1.5)
Po(2.5)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

確率母関数 (Generating function)

$n = 0,1,2,\dots$ に値をとる確率変数 X に対して $p_n = P(X = n)$ とおく

確率母関数　$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n x^{n-2}$$

$$f'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$

平均値　$m = E[X] = f'(1)$

$$f''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - m^2 = f''(1) + m - m^2$$

分散

$$\sigma^2 = f''(1) + f'(1) - f'(1)^2$$

ポアソン分布の確率母関数

確率分布　$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

確率母関数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\,x^k$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda x}$$

$$f'(x)=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda x}$$

$$f''(x)=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda x}$$

$$f'(1)=\lambda$$

$$f''(1)=\lambda^2$$

平均値　$m=f'(1)=\lambda$

分散

$$\sigma^2=f''(1)+f'(1)-f'(1)^2$$

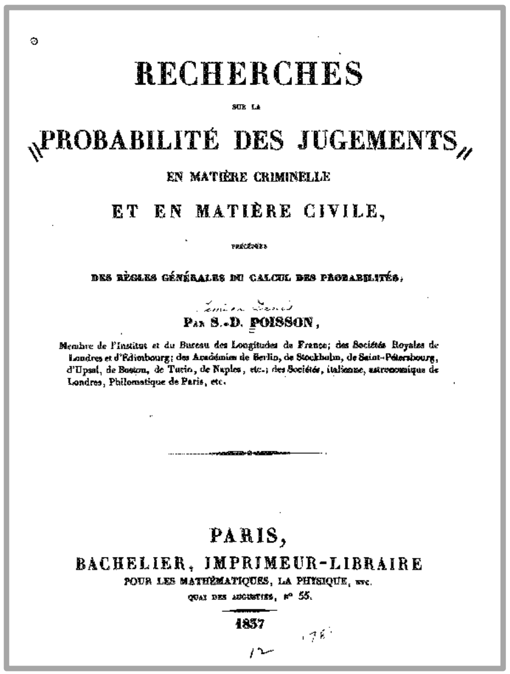
$$=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

<u>ポアソン分布の特徴</u>

平均と分散が等しい

Siméon Denis Poisson (1781-1840)

- エコール・ポリテクニクでラプラスらに学ぶ.
- 数学・物理学に多大な貢献
- ポアソン〇〇と名のついた概念多数



RECHERCHES

SUR LA

PROBABILITÉ DES JUGEMENTS

EN MATIÈRE CRIMINELLE

ET EN MATIÈRE CIVILE,

PRÉCÉDÉES

DES RÈGLES GÉNÉRALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR S.-D. POISSON,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés Royales de Londres et d'Edimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, d'Upsal, de Boston, de Turin, de Naples, etc.; des Sociétés italienne, astronomique de Londres, Philomatique de Paris, etc.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, etc.

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1837

誤った有罪判決の回数について研究(1837)

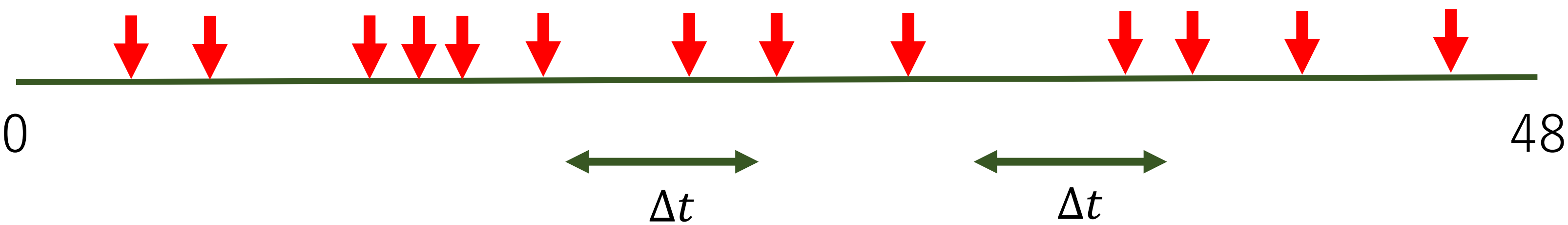
誤審が, ある一定期間に起こる回数 X の確率分布（⇒ ポアソン分布）を導出

稀なイベントの発生回数の確率分布として広い応用

- 馬に蹴られて死亡した兵士数（ボルトキーヴィッチ）
- 電話の呼び出し, メールの着信
- サッカーのゴール数, 野球のホームラン数

例：メールの着信回数

メールの着信を観測して, 48時間に324回のメール着信があった. これをもとに, ある特定の1時間にメール着信が2回以下の確率を求めよ.

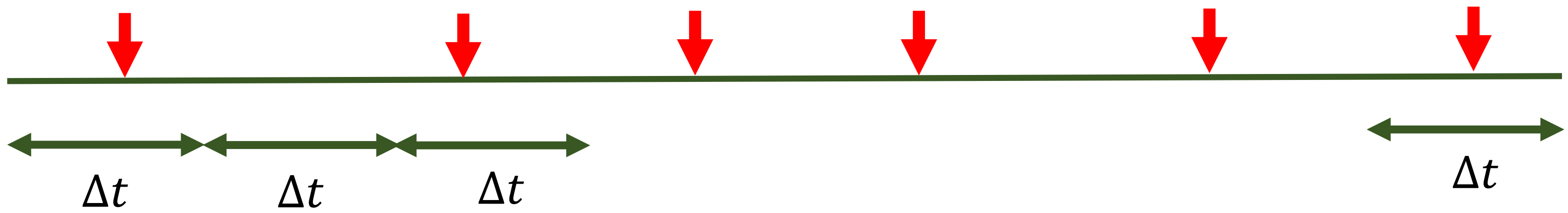


仮定

- 微小時間区間 Δt の中では着信は1回, または0回
- 微小時間区間 Δt がずれていれば着信の有無は独立

微小時間区間 Δt 毎のメール着信をコイン投げとみなす

1時間当たりの着信回数 X をモデル化する



- 1時間を微小時間区間 Δt に N 分割

$$\Delta t = \frac{1}{N}$$

$$p = \mathrm{P}(\text{時間区間 } \Delta t \text{ にメール着信がある})$$

$$1 - p = \mathrm{P}(\text{時間区間 } \Delta t \text{ にメール着信がない})$$

- 1時間の間に N 回のコイン投げ

表の回数　$X \sim B(N, p)$

平均値 $\mu = Np$

- 観測から1時間当たり

$$\frac{324}{48} = 6.75 \quad \text{回の着信}$$

- p の推定

$$\mu = Np = 6.75$$

$$p = \frac{6.75}{N}$$

- こうして

$$X \sim B\left(N, \frac{6.75}{N}\right)$$

ポアソン分布の導出（ポアソンの少数の法則）

$B\left(N, \dfrac{\lambda}{N}\right)$ は $N \to \infty$ とすると $\mathrm{Po}(\lambda)$ に収束する.

言い換え

$B(N, p)$ は, $N \to \infty, p \to 0, Np \to \lambda$ とすると $Po(\lambda)$ に収束する.

$X \sim B\left(N, \dfrac{\lambda}{N}\right)$ として

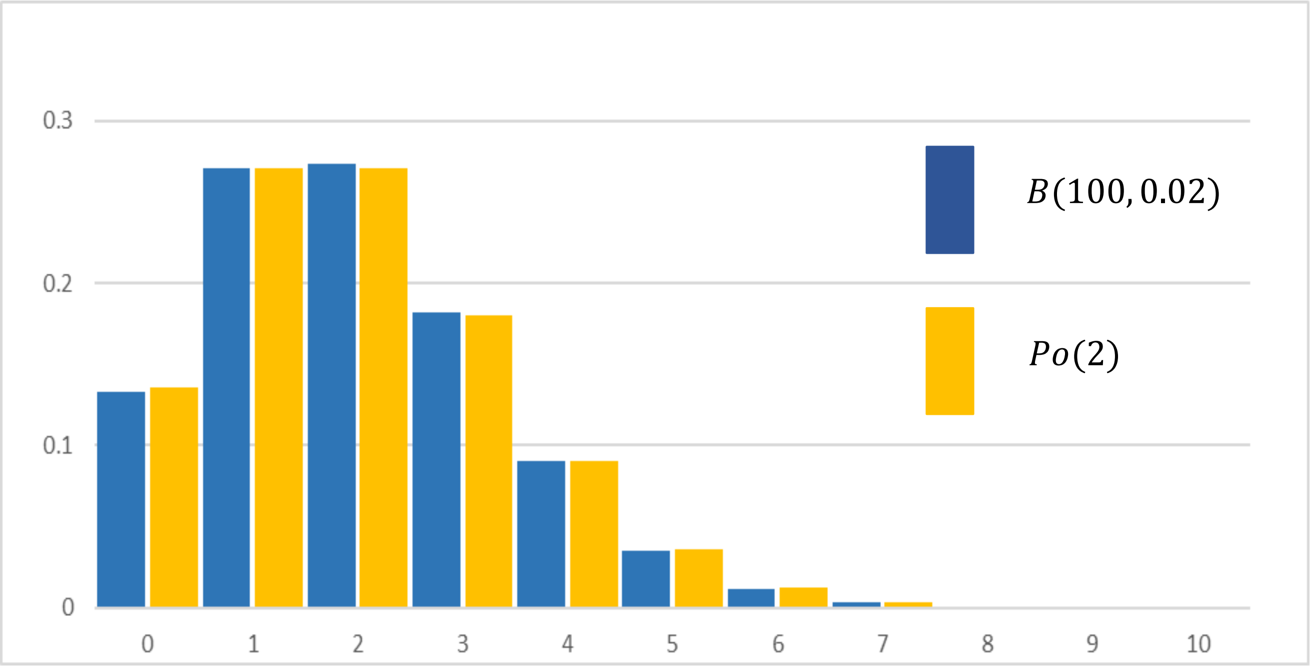
$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$= \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-k}$$

$$\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (N \to \infty)$$

例　$B(100, 0.02) \approx Po(2)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
二項分布	0.13262	0.27065	0.27341	0.18228	0.09021	0.03535	0.01142	0.00313	0.00074	0.00015
ポアソン分布	0.13534	0.27067	0.27067	0.18045	0.09022	0.03609	0.01203	0.00344	0.00086	0.00019



例：メールの着信回数（続）

メールの着信を観測して, 48時間に324回のメール着信があった. これをもとに, ある特定の 1 時間にメール着信が2回以下の確率を求めよ.

- X：1 時間当たりの着信回数
- 1時間を微小時間区間 Δt に N 分割してモデル化

$$X \sim B\left(N, \frac{6.75}{N}\right)$$

N は人為的なので消去したい

- **$N \to \infty$ として** $\boldsymbol{X \sim \mathrm{Po}(6.75)}$
- 答

$$P(X \leq 2) = \frac{6.75^0}{0!}e^{-6.75} + \frac{6.75^1}{1!}e^{-6.75} + \frac{6.75^2}{2!}e^{-6.75}$$
$$= (1 + 6.75 + 22.78) \times 0.00117 = 0.036$$

問題 5.1［二項分布のモード］$0 < p < 1$ とする．二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X に対して, $P(X = k)$ が最大となる $k = M$ を求めよ. 次に, この M と $B(n, p)$ の平均値 $m = np$ を比較せよ.

問題 5.2 [二項分布の歪度］二項分布 $B(n, p)$ の3次の中心モーメント m_3 を求めよ. 次に, 比 m_3/σ^3 (歪度という)を計算せよ.

問題 5.3＊　確率変数 X はパラメータ λ のポアソン分布に従うものとする．X は奇数よりも偶数の値を取り易いことを示せ．つまり,

$$E_0 = \{0,2,4, \dots\}, \qquad E_1 = \{1,3,5, \dots\}$$

とするとき, $P(X \in E_0) > P(X \in E_1)$ となることを示せ.

問題 5. 4 箱の中に赤玉5個, 白玉10個が入っている. この箱から無作為に玉を1個ずつ取り出し, 初めて赤玉が出るのに要する回数(赤玉が取り出された回も含める)を N とする. 次の場合について N の分布を求めよ.

(1) 1回取りだされた玉は箱に戻さない(非復元抽出).

(2) 1回ごとに取り出された玉を箱に戻す(復元抽出).

問題 5. 5 $k \geq 0,\ m \geq 0$ を整数とするとき, 一般化された二項係数について次の等式を証明せよ.

$$\binom{k+m}{m} = \binom{k+m}{k} = (-1)^k \binom{-m-1}{k}$$

問題 5. 6 [負の二項分布] 成功確率 p のベルヌーイ試行列において，ちょうど n 回目の成功を得るまでに要した失敗の回数を X とする.

(1) X の確率分布が次のように与えられることを示せ.

$$P(X=k)=\binom{n-1+k}{k}p^n(1-p)^k, \qquad k=0,1,2,\ldots.$$

(2) X の確率母関数 $G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\,z^k$ を求めよ.

(3) X の平均値と分散が次にように与えられることを示せ.

$$E[X]=\frac{n(1-p)}{p}, \qquad V[X]=\frac{n(1-p)}{p^2}$$

※ 一般に, $r\geq 1$, $0<p\leq 1$ を定数とするとき, 次で定まる離散分布を**負の二項分布**といい, $NB(r,p)$ で表す.

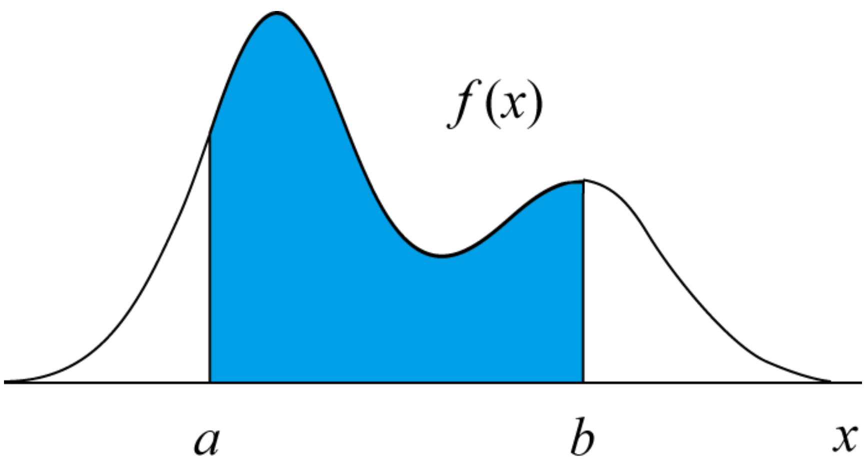
$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r-1+k}{k}p^r(1-p)^k\delta_k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}p^r(p-1)^k\delta_k$$

※ $P=1/p-1$ とおくと, $NB(r,p)$ は形式的に $B(-r,-P)$ と書ける.

連続型確率変数 X

＜でも ≤ でも同じ

- 特定の値 a をとる確率： $P(X = a) = 0$
- ある範囲（a より大きく b 以下）の値をとる確率：$P(a < X \leq b)$
- 確率密度関数を用いて面積で確率を表す



基本的な性質

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

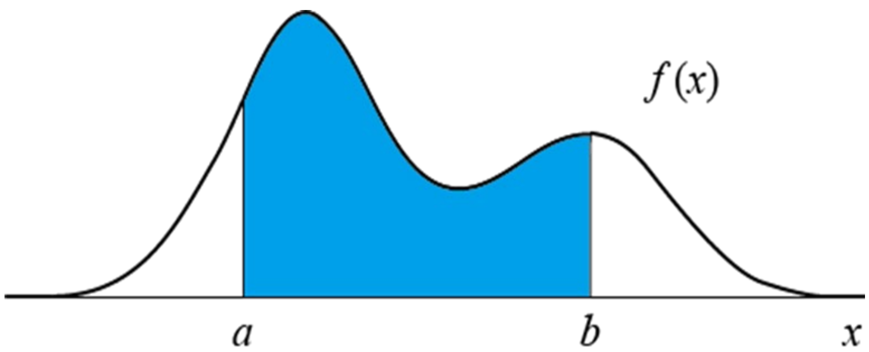
$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx}$$

連続型確率分布の平均値と分散

確率密度関数

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$



- 平均値　$$\mathbf{E}[X] = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

- 分散　$$\mathbf{V}[X] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x)\,dx$$

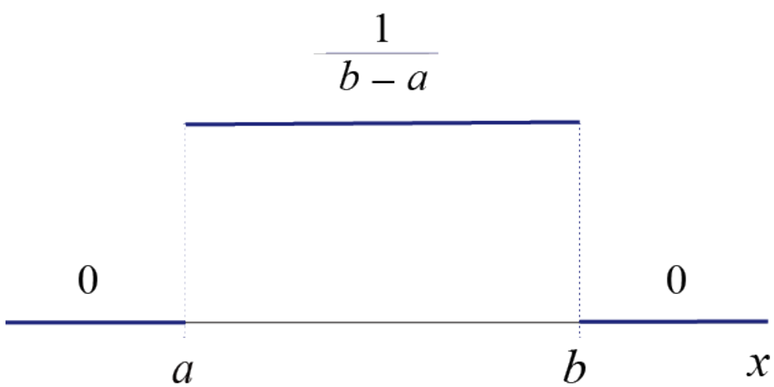
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - m_X^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$$

名前の付いた重要な連続分布

- ✓ 一様分布　二項母集団の分布
- ✓ 指数分布　待ち時間の分布
- ✓ 正規分布　統計学で最重要
- ✓ t-分布，χ^2分布，F分布　統計的推測で改めて扱う

一様分布

密度関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で与えられ, その値が一定であるような分布を一様分布という.



確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

区間 $[a, b]$ から1点を, どの点も同程度の確からしさで選ぶとき, 選ばれた点の座標を X とする.

X は連続型確率変数となり, その分布が一様分布

一様分布の平均値と分散

確率変数 X が区間 $[a, b]$ 上の一様分布に従うとき,

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

平均値

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

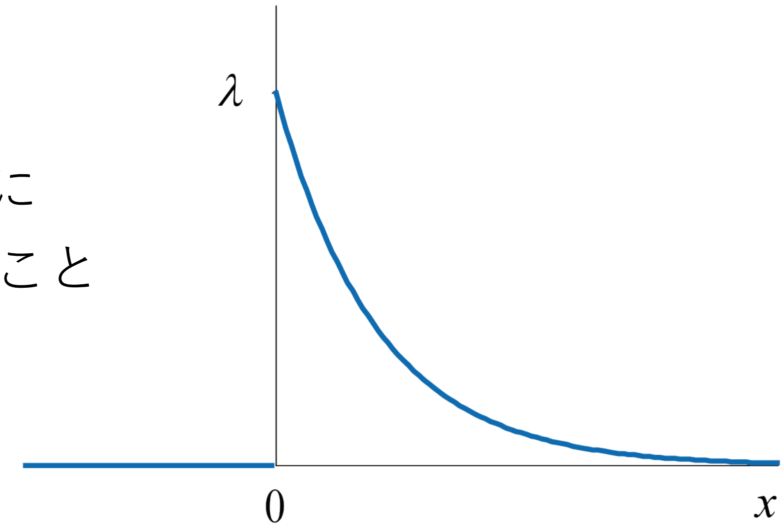
$$\mathbf{E}[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

分散

$$\sigma^2 = \mathbf{E}[X^2] - \boldsymbol{E}[X]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

指数分布

$\lambda > 0$ を定数とする.
確率変数 X がパラメータ λ の指数分布に従うとは, X が次の確率密度関数をもつこと



密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

平均値

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\, \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{\mathbf{0}}^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

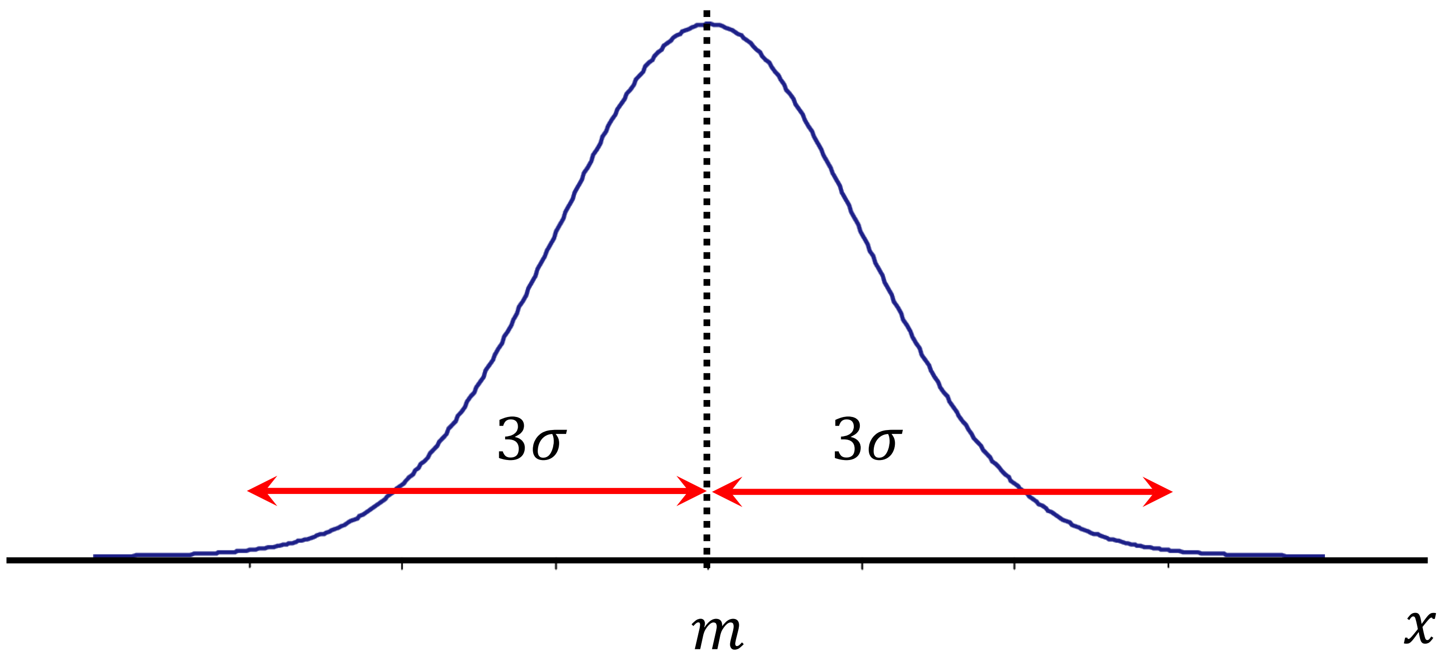
分散

$$\sigma^2 = \mathbf{E}[X^2] - \boldsymbol{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

正規分布＝ガウス分布 $N(m, \sigma^2)$

密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



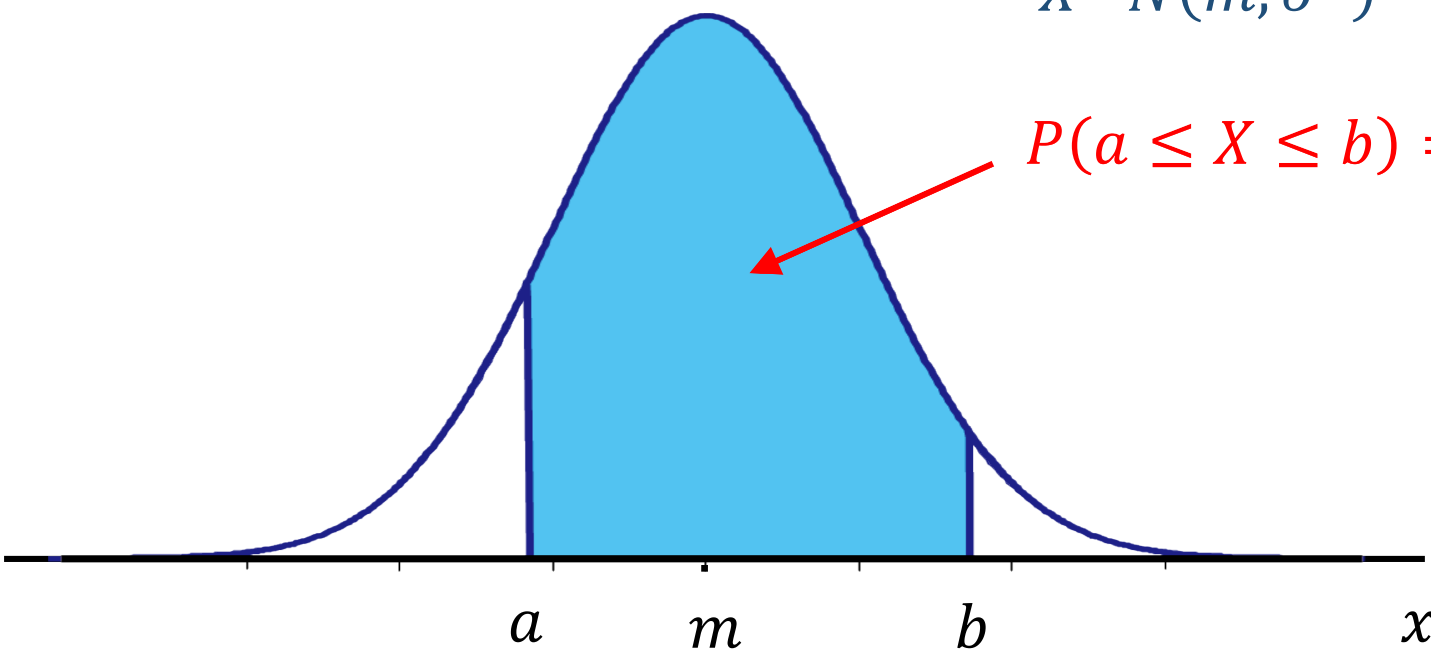
正規分布＝ガウス分布 $N(m,\sigma^2)$

密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$X\sim N(m,\sigma^2)$

$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)\,dx$



正規分布＝ガウス分布 $N(m,\sigma^2)$

分散

平均値

密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

平均値

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = m$$

分散

$$\mathbf{V}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx = \sigma^2$$

標準正規分布 (standard normal distribution)

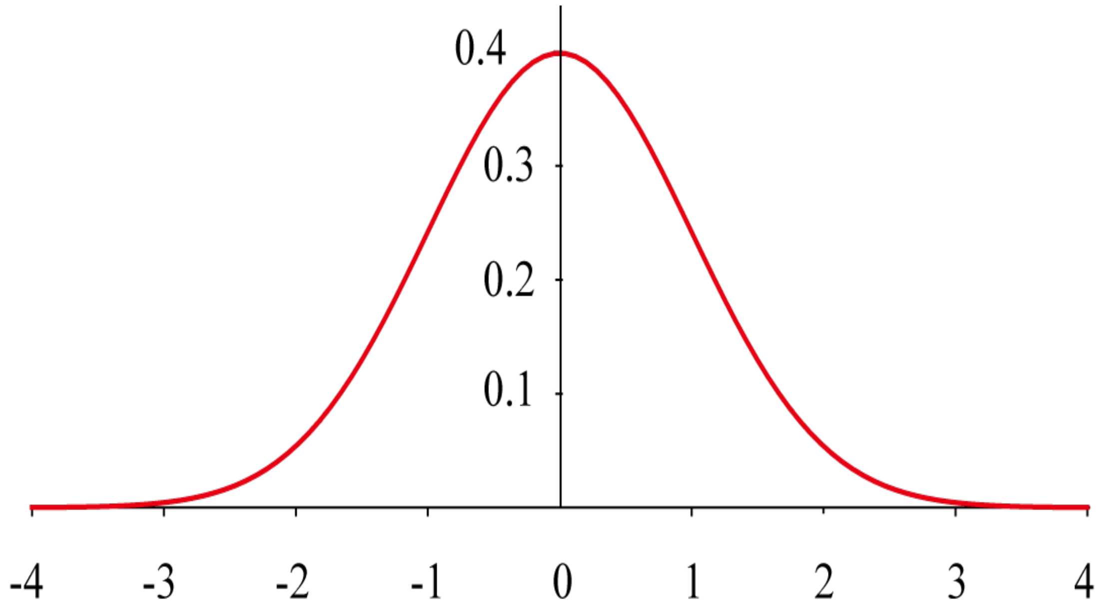
$$N(0,1)$$

平均値　$m = 0$

分散　$\sigma^2 = 1$

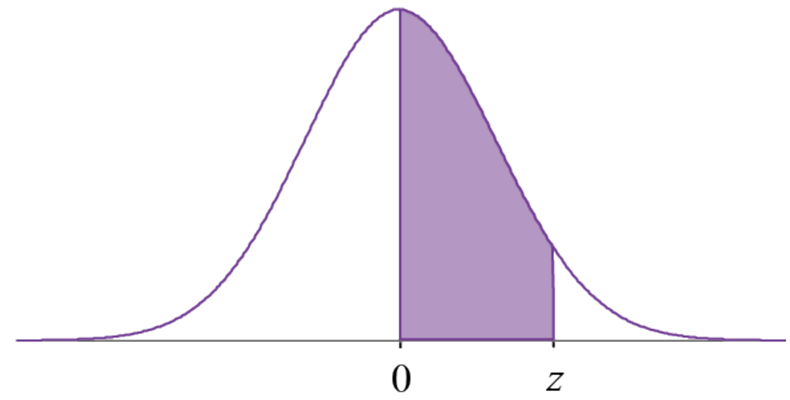
密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



標準正規分布表

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990



$$Z \sim N(0,1)$$

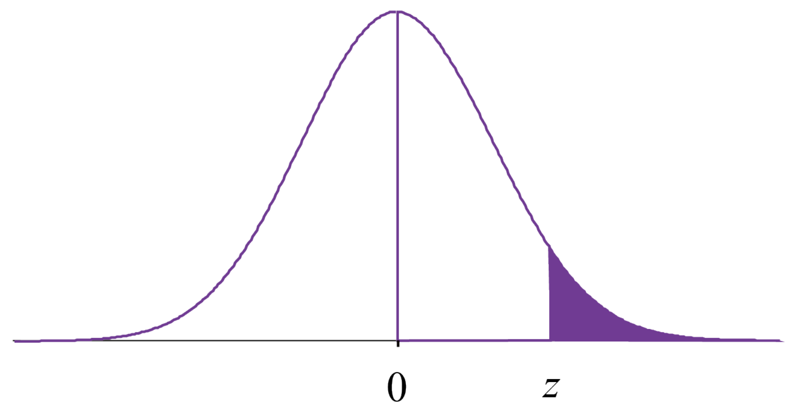
$$P(0 \leq Z \leq z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

例

$$P(0 \leq Z \leq 0.75) = 0.2734$$

標準正規分布表

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990



例　$P(Z \geq 0.75)$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.75)$$

$$= 0.5 - 0.2734$$

$$= 0.2266$$

演 習（10分）

問題 5.9　$Z \sim N(0,1)$ とする.

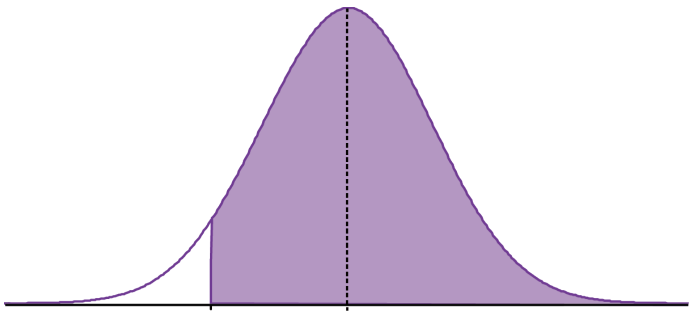
(1) 確率 $P(Z \geq -1.82)$ を求めよ.

(2) $P(Z \geq a) = 0.791$ が成り立つような a を求めよ.

標準正規分布表

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

（1）$P(Z \geq -1.82)$



$$P(-1.82 \leq Z)$$

$$= P(-1.82 \leq Z \leq 0) + 0.5$$

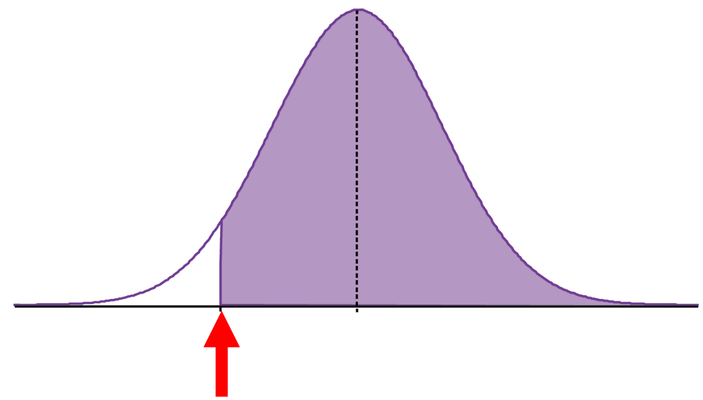
$$= 0.4656 + 0.5$$

$$= 0.9656$$

標準正規分布表

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

(2) $P(Z \geq a) = 0.791$



$$P(a \leq Z \leq 0)$$

$$= 0.791 - 0.5 = 0.291$$

$$a = -0.81$$

基準化＝標準化

定 理

$X \sim N(m, \sigma^2)$ ならば $aX + b \sim N(am + b, a^2\sigma^2)$

定 理 5.21 (基準化＝標準化)

$X \sim N(m, \sigma^2)$ ならば $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1)$

例 題 5.23 $X \sim N(2, 5^2)$

$$P(0 \le X < 6) = P\left(\frac{0-2}{5} \le \frac{X-2}{5} < \frac{6-2}{5}\right)$$

$$= P(-0.4 \le Z < 0.8) = 0.1554 + 0.2881 = 0.4435$$

演 習（10分）

X が正規分布 $N(-1, 2^2)$ に従うとき,

(1) $P(X \leq 2.29)$ を求めよ.

(2) $P(X > x) = 0.01$ であるような x の値を求めよ.

$X \sim N(-1, 2^2)$ に対して

(1) $P(X \leq 2.29)$ を求めよ.

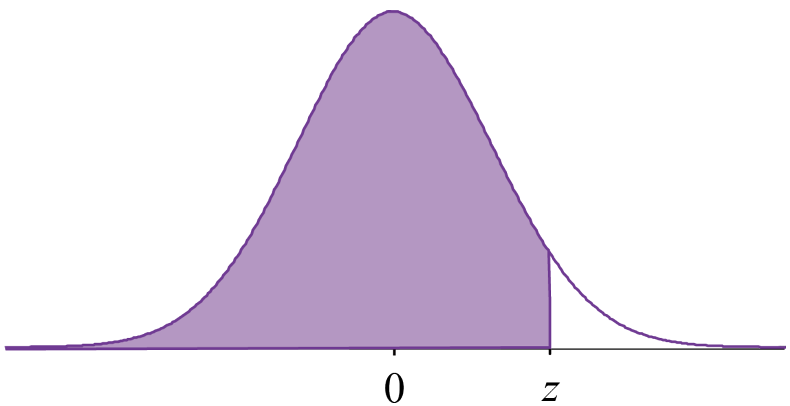
標準化 $X \sim N(m, \sigma^2)$ ➡ $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$P(X \leq 2.29)$$

$$= P\left(\frac{X-(-1)}{2} \leq \frac{2.29-(-1)}{2}\right)$$

$$= P(Z \leq 1.645)$$

$$= 0.5 + 0.45 = 0.95$$

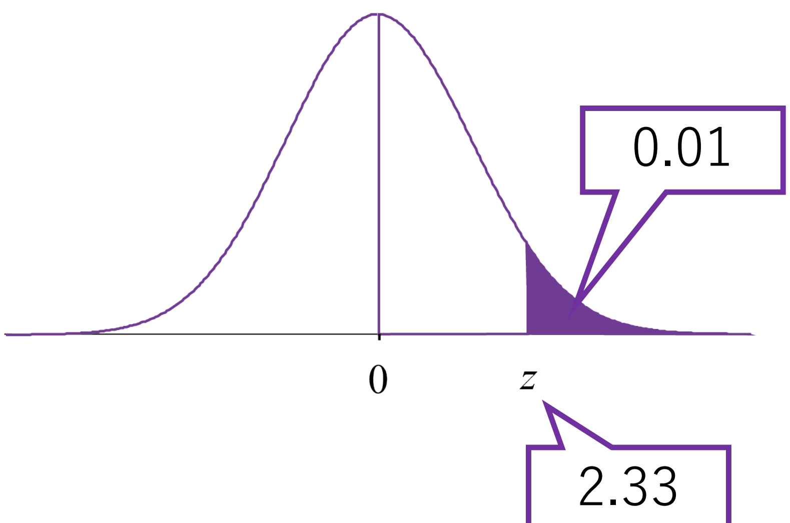


$X \sim N(-1, 2^2)$ に対して

(2) $P(X > x) = 0.01$ であるような x の値を求めよ.

標準化 $X \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow Z = \dfrac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$P(X > x) = P\left(\frac{X-(-1)}{2} > \frac{x-(-1)}{2}\right) = P\left(Z > \frac{x+1}{2}\right)$$



$$P(Z > 2.33) = 0.01$$

$$\frac{x+1}{2} = 2.33$$

$$x = 3.66$$

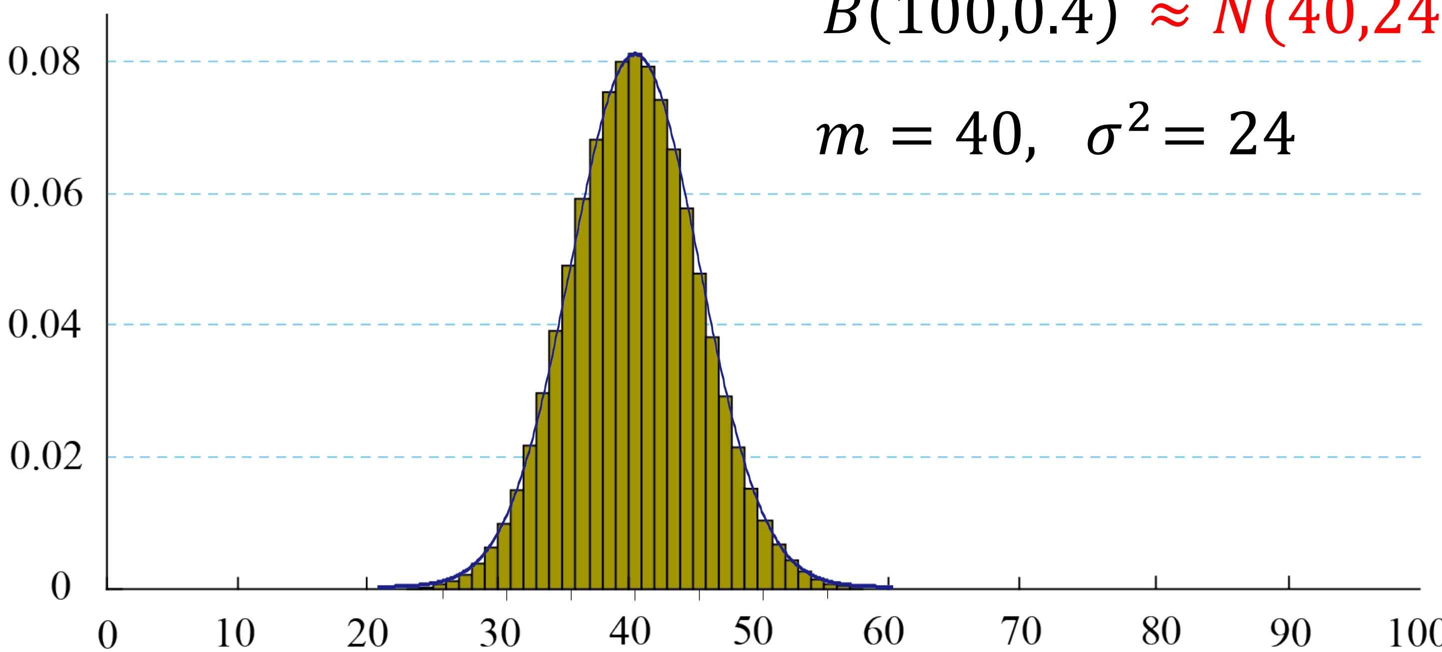
ド・モアブル－ラプラスの定理

二項分布 $B(n,p)$ は n が大きいとき，
同じ平均と分散をもつ正規分布に近い．

$$B(n,p) \approx N(m,\sigma^2) \quad m = np,\ \sigma^2 = np(1-p)$$

$$B(100,0.4) \approx N(40,24)$$

$$m = 40,\ \ \sigma^2 = 24$$



問題 5.7∗ X を $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とするとき，$-\log(1-X)$ は指数分布に従うことを示せ.

問題 5.8 X, Y を $[0,1]$ 上の一様分布に従う独立な確率変数とするとき，$X-Y$ の密度関数を求めよ.

問題 5.9 $Z \sim N(0,1)$ とする.
(1) 確率 $P(Z \geq -1.82)$ と $P(|Z| \geq 2.13)$ を求めよ.
(2) $P(Z \geq a) = 0.791$ が成り立つような a を求めよ.

問題 5.10∗ (1) $X \sim N(20, 4^2)$ のとき，$P(X > 17.8)$ を求めよ.
(2) $X \sim N(2.5, 6^2)$ のとき，$P(-0.14 < X \leq a) = 0.425$ を満たす a を求めよ.

問題 5.11∗ [偏差値] 受験者全員の平均点を m, 標準偏差を σ とするとき，得点 x の偏差値は

$$50 + 10 \times \frac{x-m}{\sigma}$$

で定義される. 受験者全体の得点分布は正規分布に従うとして, 偏差値が 55 以上になる確率と, 下位 20% の偏差値を求めよ. また, 偏差値が負になり得ることはあるか.

問題 5.12（1） $t>0$ に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}},\qquad t>0.$$

(2) (1) の両辺を t で微分することで次式を示せ.

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\frac{(2n)!}{2^n n!},\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

(3) 標準正規分布 $N(0,1)$ のモーメントを計算せよ.

問題 5.13　省略

問題 5.14 座標平面上で $A(0,1)$を中心とする半径1の円の下半分からなる半円 C を考える．C からどの点も同等な確からしさで 1 点を選び B とする. つまり, $\angle OAB=\theta$ が $[-\pi/2,\pi/2]$ 上の一様分布に従う．直線 AB が x 軸と交わる点の x 座標を X とするとき，確率変数 X の密度関数が,

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

となり, コーシー分布に従うことを示せ.

問題 5.15 – 5.18 省略

Lecture 6

大数の法則と中心極限定理

【教科書】

第 6 章 大数の法則と中心極限定理
- 6.1 大数の法則
- 6.2 中心極限定理

大数の法則 (Law of Large Numbers = LLN)

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

無作為
復元抽出

標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

標本の大きさ n が十分大きければ，標本平均 $\bar{X}$ が母平均 m に近いということを主張する．

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx m$$

左辺は確率変数!
それが定数 m に近いとはどう表現すべきか？

コインを投げのシミュレーション

コイン投げを繰り返す：　$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$

$$X_n = 1\ (\text{表のとき}), \quad X_n = 0\ (\text{裏のとき}),$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}$$

初めの n 回の内,
表の回数の相対頻度

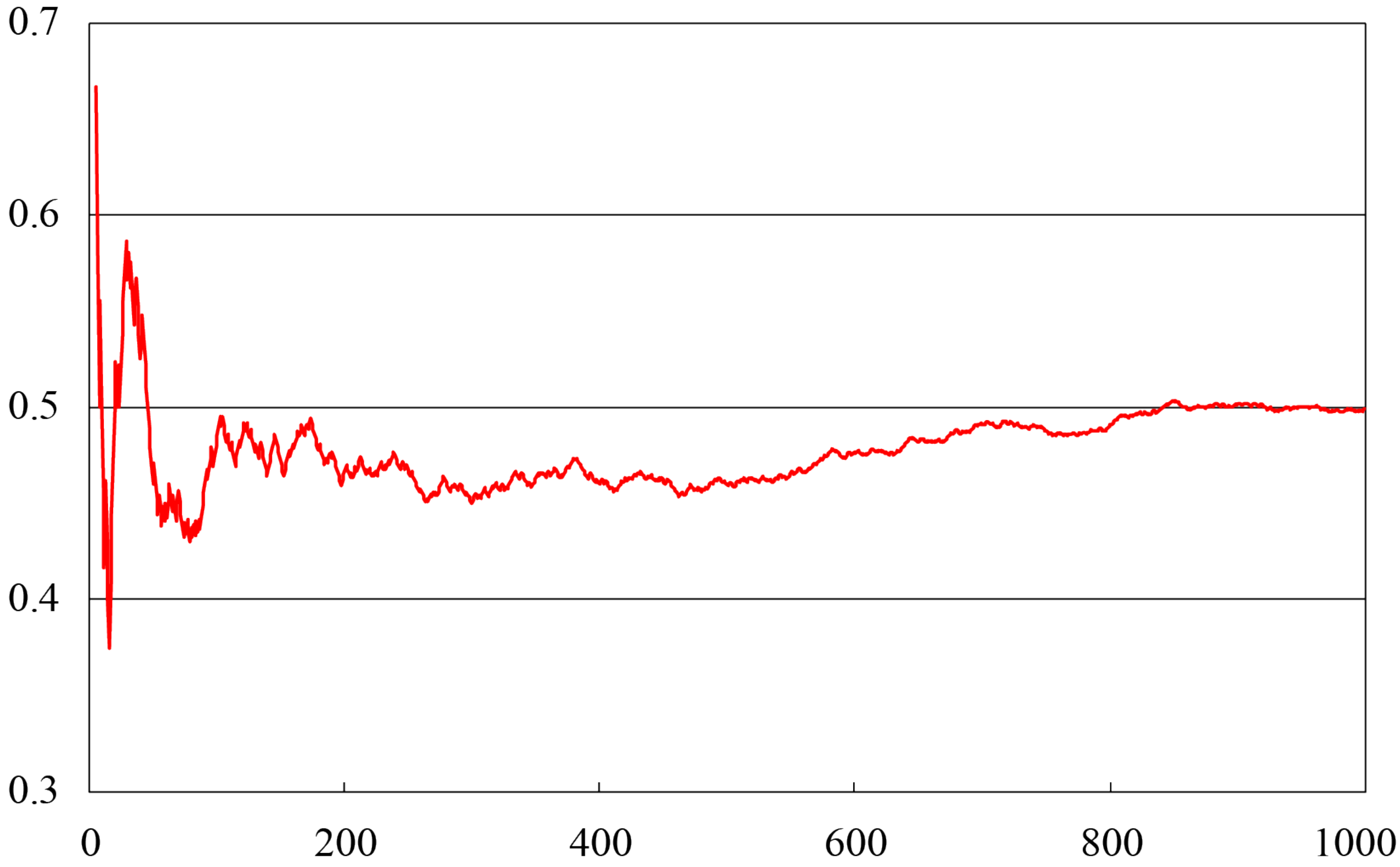
母平均（コイン投げ1回の平均値）

$$m = E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

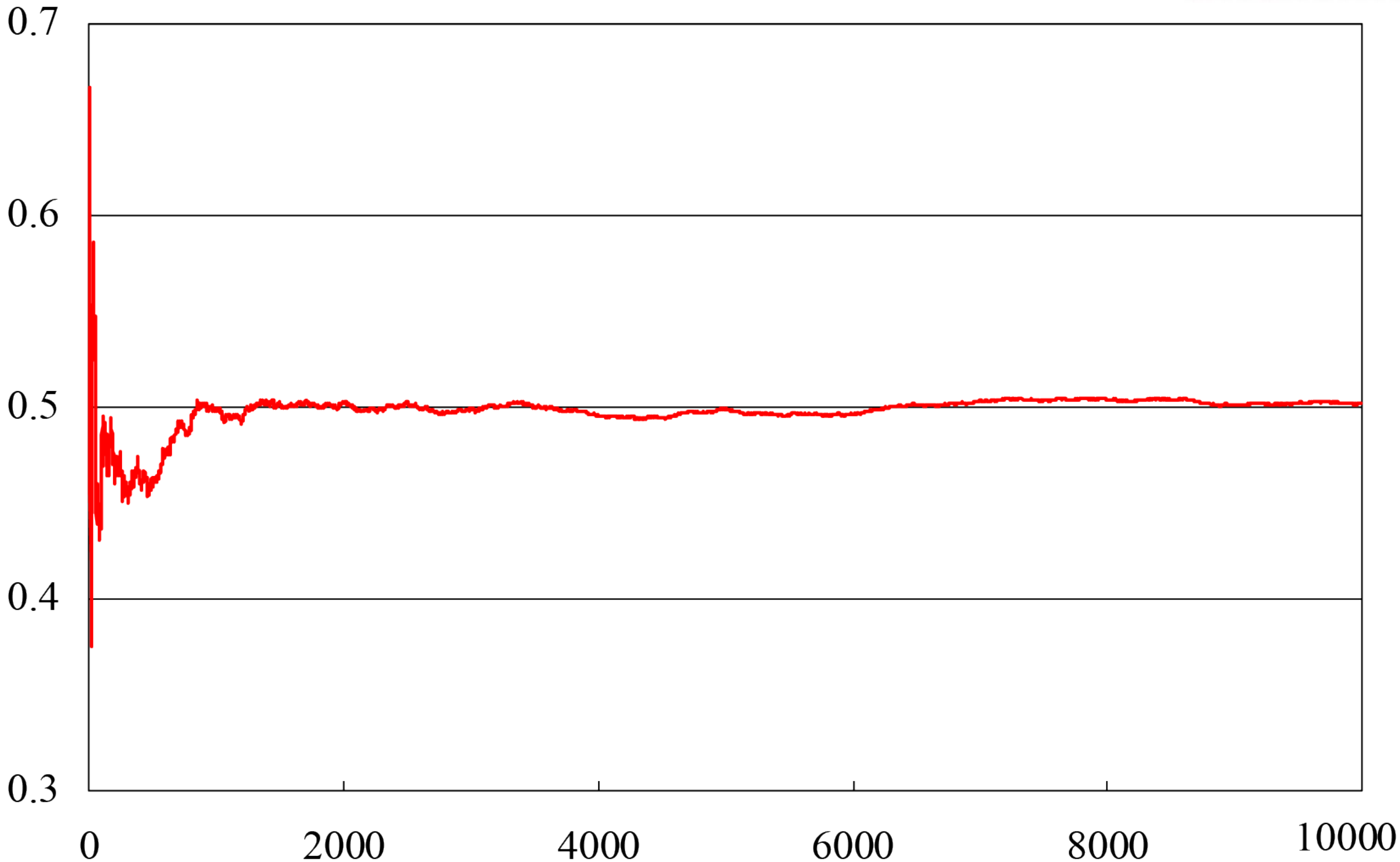
大数の法則

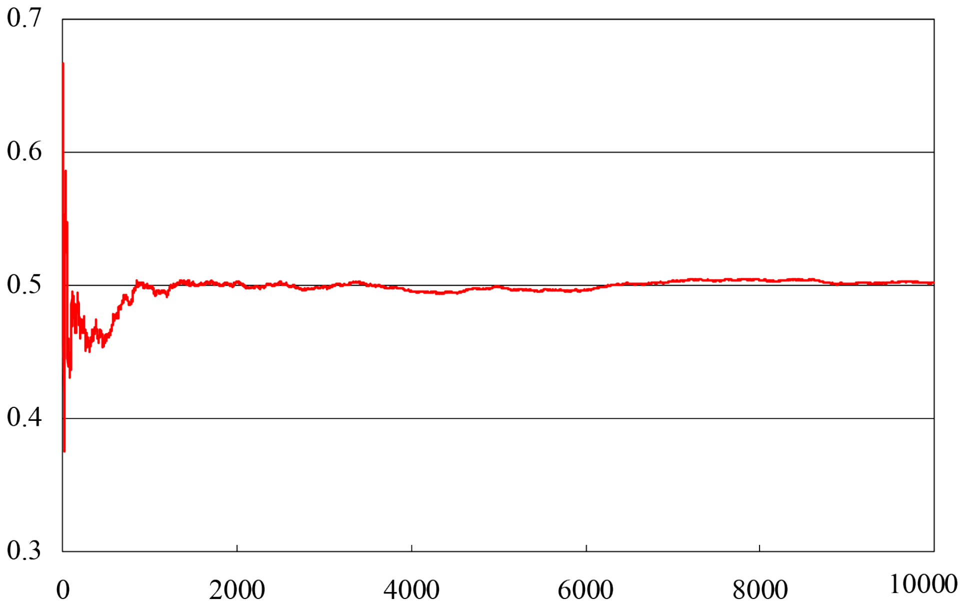
$$T_n \approx m$$

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad 1 \leq n \leq 1000$$



$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad 1 \leq n \leq 10000$$





$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0.5$$

だんだん
近づく

微積分の概念で「収束する」
と言ってよいか？

毎回表が出続けることもありうる（確率は小さいが）

そうすると，いつまでたっても $T_n = 1$ 　矛盾？　$T_n \to 0.5$

確率を用いた表現が必要

大数の法則 (Law of Large Numbers = LLN)

標本の大きさ n が十分大きければ，標本平均 $\bar{X}$ が母平均 m に近い．

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx m$$

定 理　6.1（大数の弱法則）

母平均 m をもつ分布からの無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

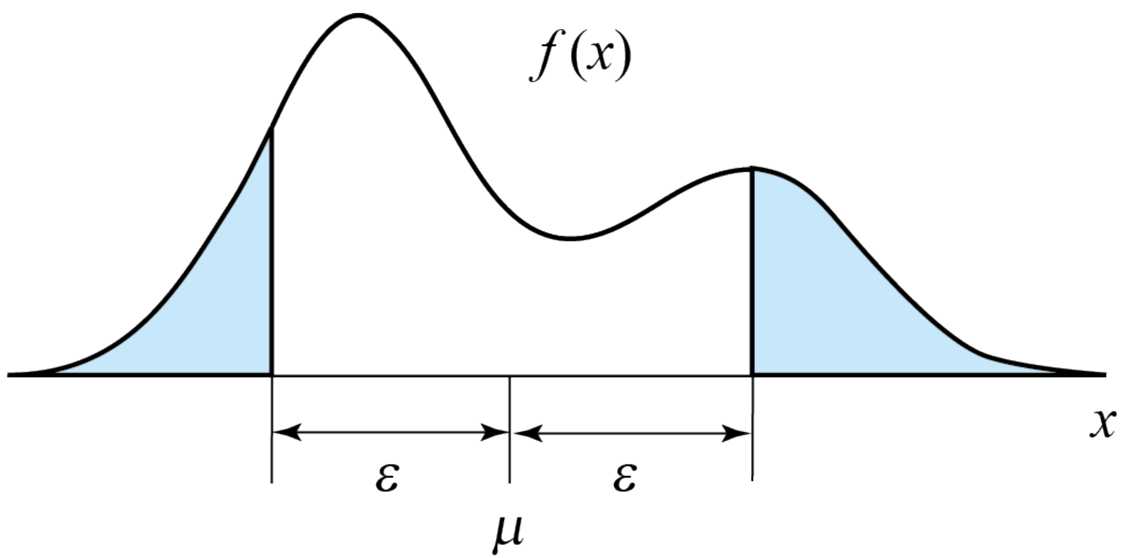
と任意の $\epsilon > 0$ に対して，次の式が成り立つ．

$$P(|T_n - m| \geq \epsilon) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

定理 5.7 （チェビシェフの不等式）

確率変数 X が平均 m , 分散 σ^2 をもつとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して, 次の不等式が 成り立つ .

$$P(|X-m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$



大数の法則の証明

※ ここでは，分布が分散をもつものとして，チェビシェフの不等式を使って証明する．

$T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ に対して，定理4.8と定理4.20 を適用して，

$$E(T_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m = m$$

$$V(T_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ここで，チェビシェフの不等式を適用すれば，

$$P(|T_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0$$

大数の法則 (Law of Large Numbers = LLN)

定 理 6.1（大数の弱法則）

母平均 m の母集団から取り出した無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均を

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

とすれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して，次の式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - m| \geq \epsilon) = 0$$

定 理 6.3（大数の強法則）

教科書を参照

$$P\left(\lim_{n\to\infty} T_n = m\right) = 1$$

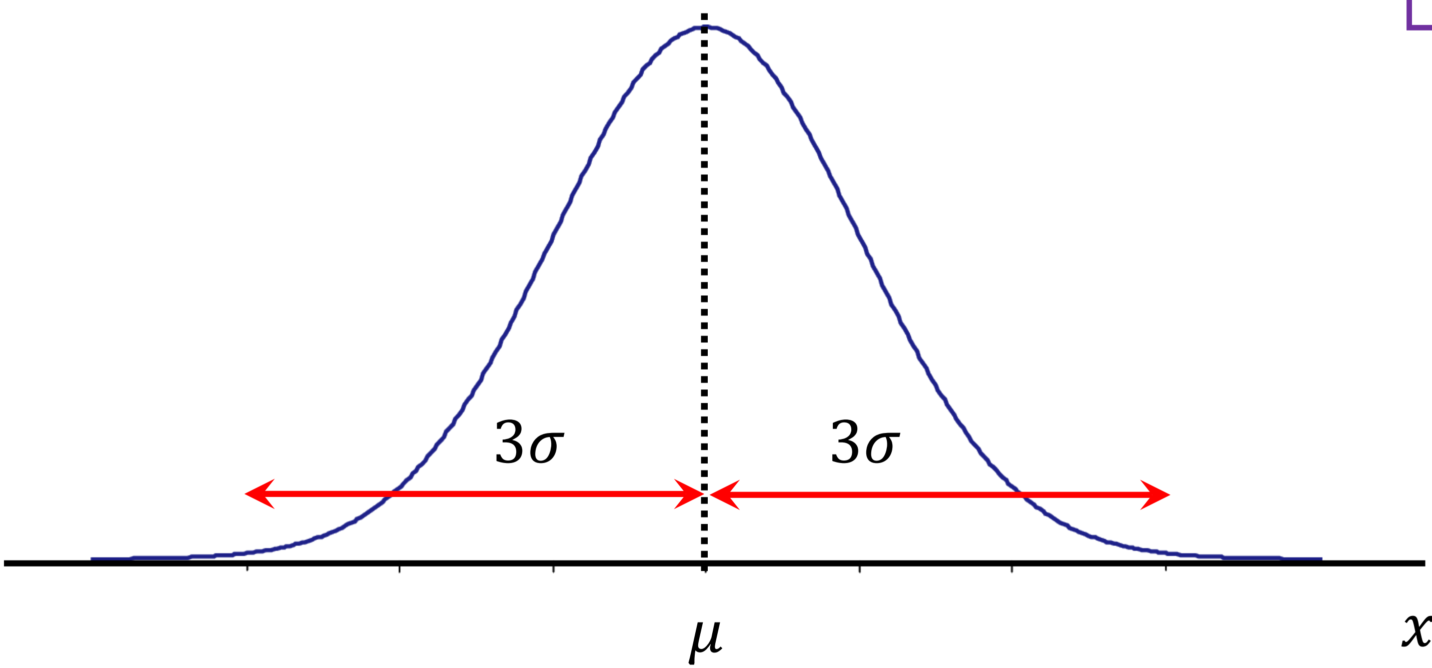
復習：正規分布＝ガウス分布 $N(m,\sigma^2)$

分散

平均値

密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



中心極限定理 (Central Limit Theorem = CLT)

定理 6.8 (CLT)

平均値 m, 分散 σ^2 の一般の母集団から取り出した無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して, n が十分大きいとき,

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad (*)$$

が近似的に成り立つ.

注 意　正規母集団 $N(m, \sigma^2)$ の場合は, (*) は厳密に成り立つ.

証 明　フーリエ変換（またはラプラス変換）を用いる.

教科書を参照

CLTは実世界によく現れる

$$\overbrace{\boxed{Z_1}\boxed{Z_2}\boxed{Z_3}\boxed{Z_4}\ \cdots\ \boxed{Z_n}}^{S_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k}$$

$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots$ ：独立同分布な確率変数列

それぞれの平均値 $= m$,　分散 $= \sigma^2$

$$\mathrm{E}[S_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[Z_k] = nm$$

$$\boxed{\text{CLT}\qquad S_n - nm \sim N(0, n\sigma^2) \qquad (n \to \infty)}$$

・細かい誤差が集積すると全体の揺らぎは正規分布に従う

例題 5.4（二項分布の正規分布近似）

ド・モアブルーラプラスの定理

二項分布 $B(n,p)$ は, n が大きいとき，同じ平均値と分散をもつ正規分布 $N(np\,,np(1-p))$ で近似できる.

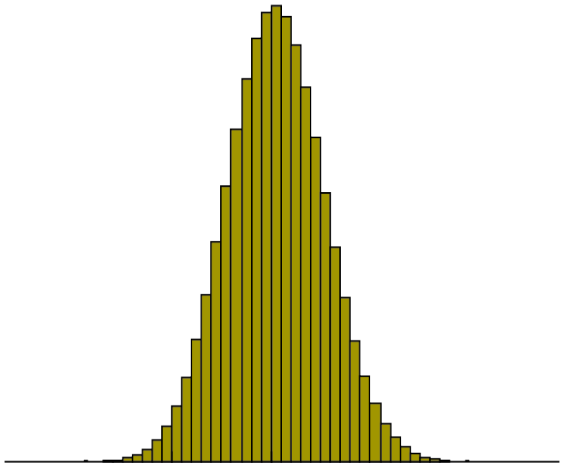
$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots$ ：ベルヌイ試行列

それぞれの平均値 $= p$,　分散 $= p(1-p)$

$$X_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \sim B(n,p)$$

CLT により，
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

したがって，
$$\sum_{k=1}^{n} Z_k \approx N(np, np(1-p))$$



連続補正（半目補正）

例 題　公平なコインを400回投げたとき，表が225回以上出る確率を求めよ.

X : 表の枚数

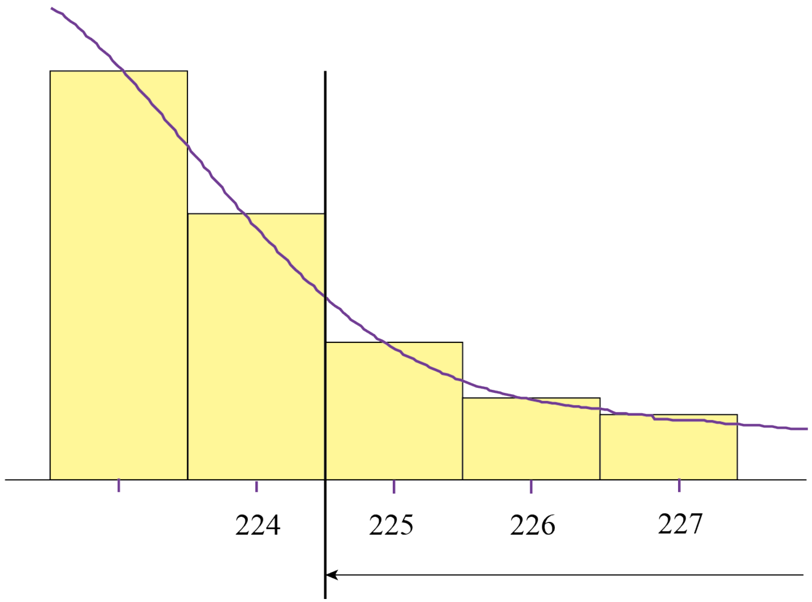
$X \sim B(400,0.5) \approx N(200, 10^2)$

$P(X \geq 225) = P(X \geq 224.5)$

$= P\left(\frac{X-200}{10} \geq \frac{224.5-200}{10}\right)$

$= P(Z \geq 2.45)$

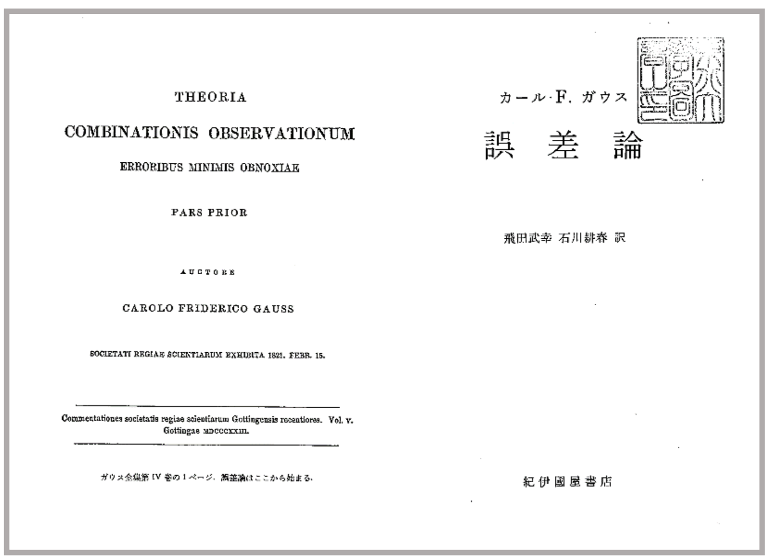
$= 0.5 - 0.4929 = 0.0071$



Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

19世紀以降の近代数学のほとんどの分野に影響を与えている：

- 素数定理、平方剰余の相互法則
- 正十七角形の作図、代数学の基本定理、円分多項式(代数学)
- 最小二乗法(統計)
- 複素数、ガウス平面、複素関数論
- 電磁気などの物理学



THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE
PARS PRIOR
AUCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS
SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITA 1821. FEBR. 15.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. V. Gottingae MDCCCXXIII.

ガウス全集第 IV 巻の 1 ページ. 誤差論はここから始まる.

カール・F. ガウス
誤 差 論
飛田武幸 石川耕春 訳
紀伊國屋書店

1807年～終生
ゲッティンゲンの天文台長（初代）

1809年『天体運行論』
最小二乗法を用いたデータ補正、正規分布

1821-26年『誤差を最小にする観測』

問題 6.1＊ ある大学では過去のデータによると入学試験の合格者の内, 入学を辞退するものが4%いるという．1000人の定員のところ1050人合格としたとき, 定員割れを起こす確率を二項分布の正規分布近似を用いて求めよ.

問題 6.2 自由度 n のカイ2乗分布 χ_n^2 は, n が大きければ正規分布 $N(n, 2n)$ に近いことを中心極限定理を用いて示せ.

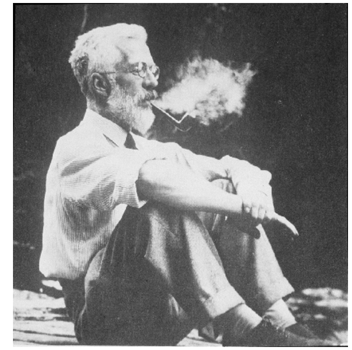
Lecture 7

統計的推定

【教科書】

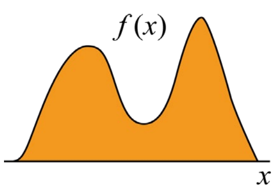
第 7 章 母数の推定
　7.1 標本抽出の確率モデル
　7.2 点推定

統計的推定の基本問題



Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962)

母集団
Population



母集団分布

母数 θ

無作為復元抽出

標本
Samples

$X_1, X_2, \ldots X_n$

計算式 T

母数 θ の推定

$T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$によって

母数 θ の推定値とする

母数＝母集団の統計量
平均値、分散、など

推定論の課題

1)　合理的な関数 T を与えること
2)　信頼性の評価を与えること

平均値の推定

母集団

母平均 m

母分散 σ^2

無作為
復元抽出

標本

$X_1, X_2, \ldots, X_n$

数学的には

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は
母集団分布に従
う独立同分布(iid)
な確率変数列

定義　標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

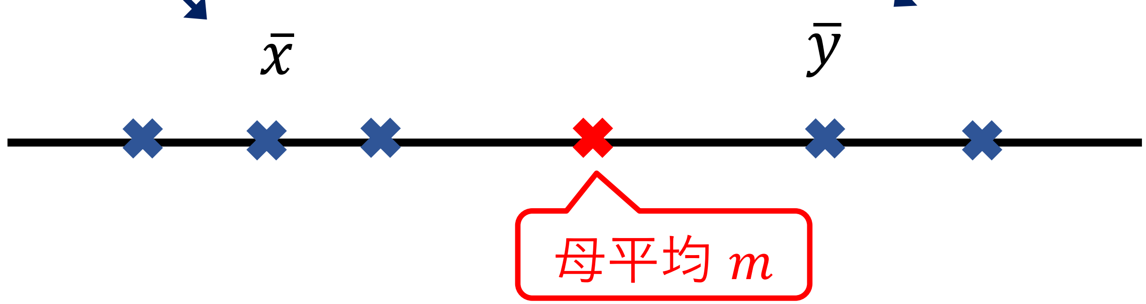
無作為
復元抽出

標本
$X_1, X_2, \dots, X_n$

標本平均 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ は確率変数である

sample 1:
$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \to \bar{x}$

sample 2:
$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n \to \bar{y}$



定理 7.3　母平均を m，母分散を σ^2 とする.

標本平均 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の平均値と分散は

$$E(\bar{X}) = m, \qquad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

証明　[平均値の線形性](定理 4.8)
確率変数 X,Y と 定数 a,b に対して

$$E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m = m$$

定理 7.3　母平均を m，母分散を σ^2 とする.

標本平均 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の平均値と分散は

$$E(\bar{X}) = m, \qquad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

証明　[分散の加法性]（定理 4.20）

独立な確率変数 X, Y と 定数 a, b に対して

$$V[aX + bY] = a^2\, V[X] + b^2\, V[Y]$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

無作為
復元抽出

標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

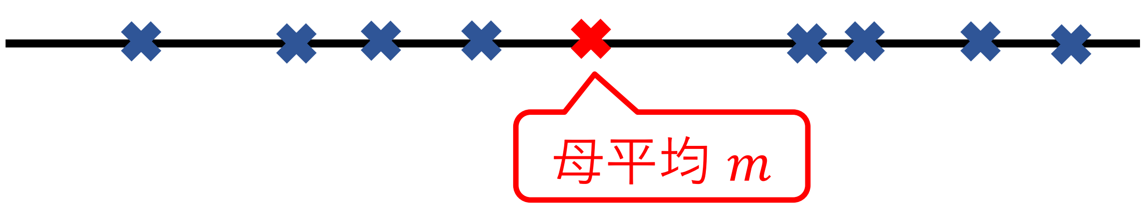
標本平均　$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$　は確率変数である

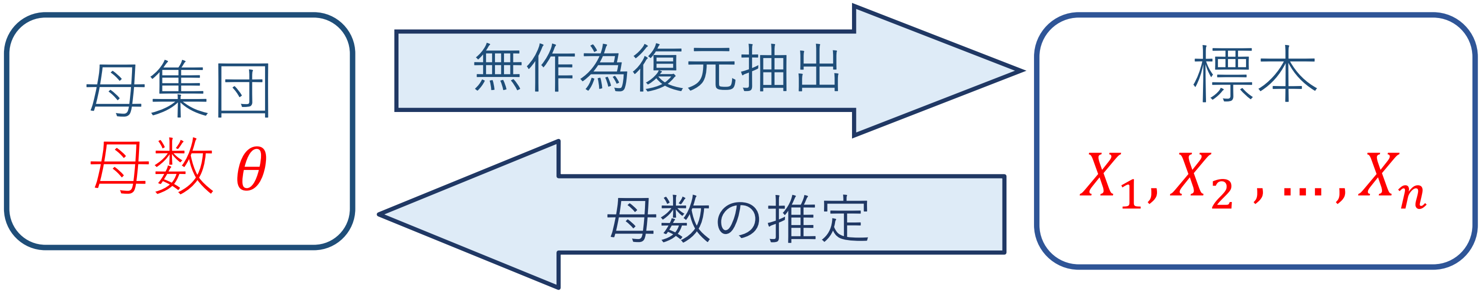
$$\boxed{E(\bar{X}) = m}$$

その意味は？

不偏性

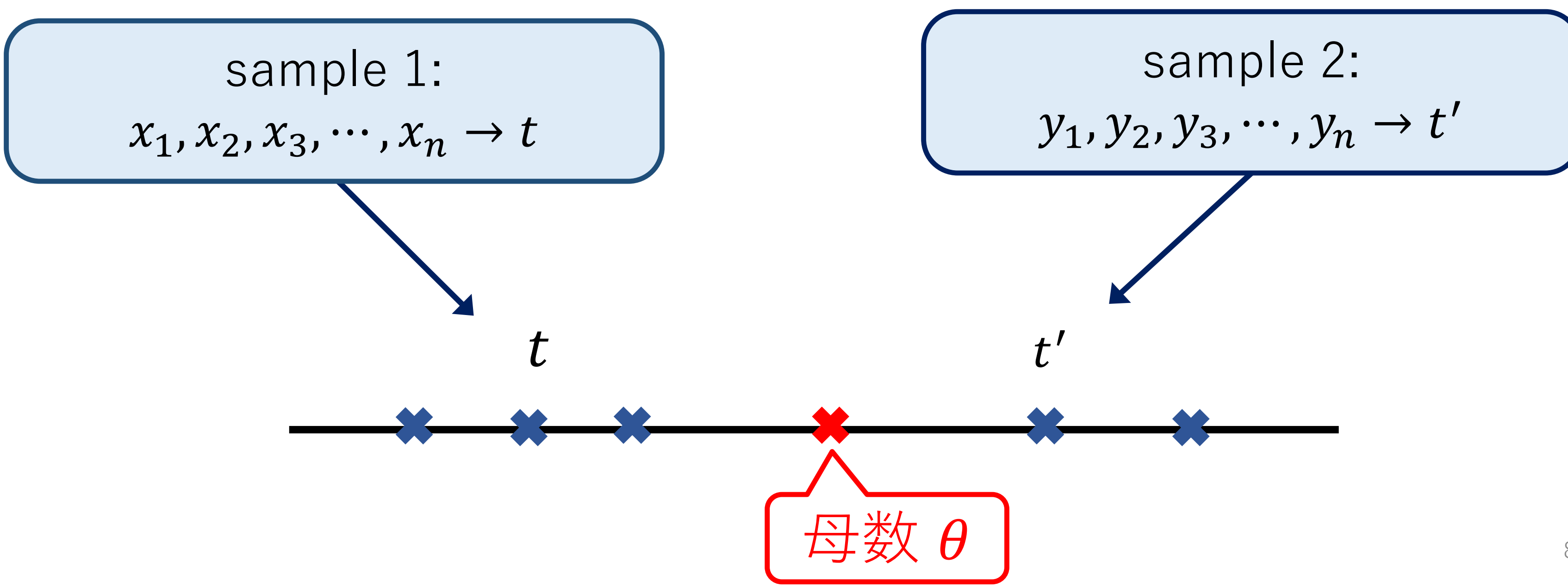
標本平均をもって母平均の推定値とする根拠





推定量 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は確率変数である

※ データから計算される $\hat{\theta} = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は<u>推定値</u>という．



不偏推定量（unbiased estimator）

定 義　母数 θ の推定量 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ が, $E(T) = \theta$ を満たすとき不偏推定量であるという.

定理 7.3 の言い換え

標本平均 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ は $E(\bar{X}) = m$ を満たす.

すなわち, <u>標本平均 $\bar{X}$ は母平均 m の不偏推定量である</u>.

標本分散と不偏分散

標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

不偏分散

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

定理 7.12　母平均を m，母分散を σ^2 とする．

(1) 標本分散　$S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$　の平均値は次を満たす．

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

(2) 不偏分散　$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$　の平均値は

$$E(U^2) = \sigma^2$$

を満たす．すなわち，U^2 は母分散 σ^2 の不偏推定量である．

証明　計算でわかる（教科書を見よ）

加重平均（重み付き平均）

$$T = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \quad \text{ただし} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$$

等加重にすれば標本平均　$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$

定 理　加重平均は母平均の不偏推定量である.

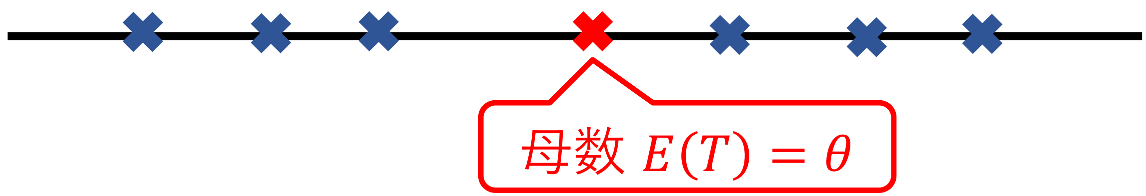
$$E[T] = \sum_{k=1}^{n} a_k E[X_k] = \sum_{k=1}^{n} a_k m = m$$

※ 一般に, 母数の不偏推定量はたくさんある.

平均2乗誤差と有効推定量

T：母数 θ の不偏推定量（そうすると $E(T)=\theta$）

T の分散 = 平均2乗誤差：　$V(T)=E\{(T-\theta)^2\}$



※ 不偏推定量の分散は推定量の良さの指標となる
　（分散が小さいほど推定量として優れている）

T_1，T_2：母数 θ の不偏推定量

$$V(T_1)\leq V(T_2)$$

T_1 は T_2 より有効（efficient）であるという．

例 7.15　標本平均は加重平均の中で最も有効である.

$$T=\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$ の平均2乗誤差を計算する.

$$\mathbf{V}[T]=\sum_{k=1}^{n} a_k^2\,\mathbf{V}[\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{k}}]=\sigma^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2=\sigma^2\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{\sigma^2}{n}$$

$a_k=\dfrac{1}{n}$ のとき $V[T]$ が最小になる

$$T=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k=\bar{X}$$ つまり, 標本平均

※ 不偏推定量の中で最も有効なものが望ましい：
　フィッシャー情報量などを用いる理論がある.

問題 7.7（ドイツ戦車問題）

1番から順に通し番号がついている戦車が街を巡回している．目撃された番号 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して，それらの最大値を$M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ とおく．このとき，$\hat{N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である．

M の分布を求める．

$$P(M = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n!\,(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!\,N(N-1)\cdots(N-n+1)}$$

$$= \frac{n(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \qquad n \le k \le N$$

M の平均値を求める．

$$E[M] = \sum_{k=n}^{N} kP(M = k)$$

問題 7.7（ドイツ戦車問題）

1番から順に通し番号がついている戦車が街を巡回している．目撃された番号 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して，それらの最大値を$M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ とおく．このとき，$\hat{N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である．

$$E[M] = \frac{n}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \sum_{k=n}^{N} k\,(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

$$\sum_{k=n}^{N} k\,(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

$$= \sum_{k=n}^{N} \{(k+1)k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

$$-k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)\} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= (N+1)N\cdots(N-n+1) \times \frac{1}{n+1}$$

問題 7.7（ドイツ戦車問題）

1番から順に通し番号がついている戦車が街を巡回している．目撃された番号 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して，それらの最大値を $M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ とおく．このとき，$\hat{N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である．

$$E[M] = \frac{n}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \sum_{k=n}^{N} k\,(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

$$= \frac{n}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \times (N+1)N\cdots(N-n+1) \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} \times (N+1)$$

$$\frac{n+1}{n}E[M] - 1 = N \quad \Rightarrow \quad E\left[\frac{n+1}{n}M - 1\right] = N$$

問題 7.7（ドイツ戦車問題）

1番から順に通し番号がついている戦車が街を巡回している．目撃された番号 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して，それらの最大値を $M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ とおく．このとき，$\hat{N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である．

Month	Statistical estimate	Conventional estimate*)	German records
June 1940	169	1,000	122
June 1941	244	1,550	271
August 1942	327	1,550	342

*) 連合軍情報本部の伝統手法

問題 7.1 母平均 m, 母分散 σ^2をもつ大きさ N の有限母集団から無作為非復元抽出で選ばれた大きさ n の標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする$(1 \leq n \leq N)$.

(1) $E[X_i] = m,\ V[X_i] = \sigma^2$を示せ.

(2) $i \neq j$ のとき, X_iと X_jの共分散と相関係数について, 次を示せ.

$$\mathbf{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{\sigma^2}{N-1}, \qquad r_{X_i X_j} = -\frac{1}{N-1}$$

(3) 標本平均 $\bar{X}$ について, 次を示せ.

$$E[\bar{X}] = m, \qquad V[\bar{X}] = \frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}$$

問題 7.2 $N \geq 1$ を定数とする. $\{1,2,\ldots,N\}$ から無作為非復元抽出で取り出された大きさ n の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$に対して,

$$S = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \qquad T = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

とおく$(1 \leq n \leq N)$.

(1) S の分布, 平均値 $E[S]$, 分散 $V[S]$ を求めよ.

(2) T の分布, 平均値 $E[T]$, 分散 $V[T]$ を求めよ.

問題 7.3 区間 $[a, b]$ 上の一様分布に従う独立同分布な確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の i 番目の順序統計量 $X_{(i)}$ とする.
(1) $E\left[X_{(i)}\right]$と $V\left[X_{(i)}\right]$を求めよ.
(2) $1 \leq i < j \leq n$ について, $X_{(i)}$と $X_{(j)}$の結合密度関数を求めよ.

問題 7.4＊ $X_1, \ldots, X_n$ を区間 $[a, b]$ 上の一様分布に従う母集団から取り出された大きさ n の標本とし,

$$S = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \qquad T = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

とする. このとき,

$$A = \frac{nS - T}{n-1}, \qquad B = \frac{nT - S}{n-1}$$

はそれぞれ a, b の不偏推定量であることを示し, $V[A], V[B]$ を計算せよ.

問題 7.5＊ $X_1, \ldots, X_n$ を母平均 m, 母分散 σ^2 の母集団から取り出された大きさ n の標本とする. このとき,

$$T = -\frac{1}{n-1}\sum_{i \neq j}(X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})$$

は母分散 σ^2 の不偏推定量であることを示せ. ただし, $\bar{X}$ は標本平均である.

※ 問題 7.6-7.9 は省略

Lecture 8

母平均の推定

【教科書】

第 7 章 母数の推定
7.3 区間推定

母平均の点推定（批判）

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

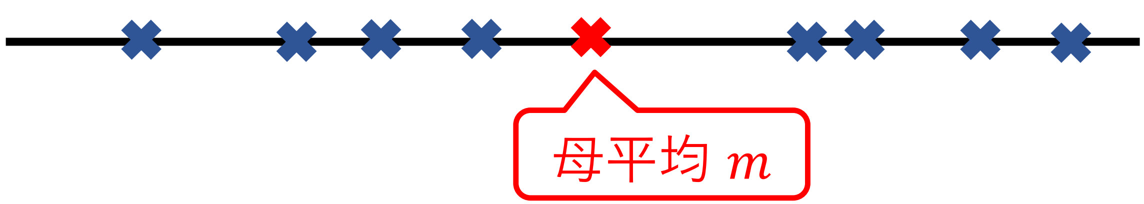
無作為復元抽出

標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

標本平均による推定

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$ について既に知っていること

(1) [不偏性] $E[\bar{X}] = m$　　　(2) [一致性] $P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X} = m\right) = 1$



実際に得られるのは 1個の数値 $\bar{x}$ であり，
それが m に近いかどうか全く不明である．

→ 信頼性を評価する

標本平均に関する基本定理

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

無作為復元抽出 →

標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \xleftrightarrow{\textbf{基準化}} \quad Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(1) 一般の母集団に対しては, n が十分大きいとき, 近似的に成り立つ.

(2) 正規母集団に対しては, 任意の n で厳密に成り立つ.

※ (1) は中心極限定理(定理 6.8)である.

母平均の区間推定

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

無作為復元抽出

標本
$X_1, X_2, \dots, X_n$

標本平均

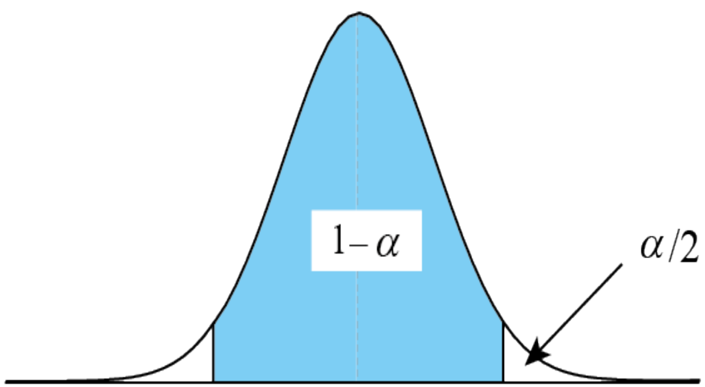
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$$

$$P\left(-z(\alpha/2) \le Z \le z(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha$$

$$-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - m \le z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad z = z(\alpha/2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



$z(\alpha/2)$　上側 $\alpha/2$ 点

母平均の区間推定

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

無作為復元抽出

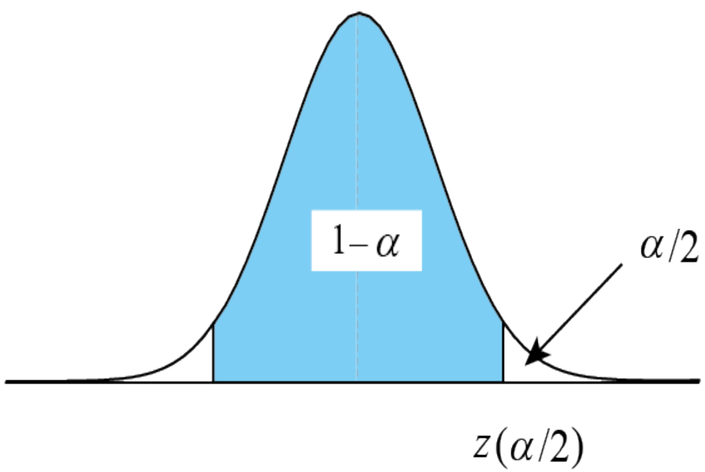
標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$$

$$\boxed{P\left(\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha}$$



上側 $\alpha/2$ 点

得られた標本平均 $\bar{x}$ を用いて，区間

$$\bar{x} \pm z(\alpha/2)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を考えると，確率が $1-\alpha$ で，その中に母平均 m を捕まえている．

母平均の区間推定（母分散既知）

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

無作為
復元抽出

標本
$X_1, X_2, \dots, X_n$

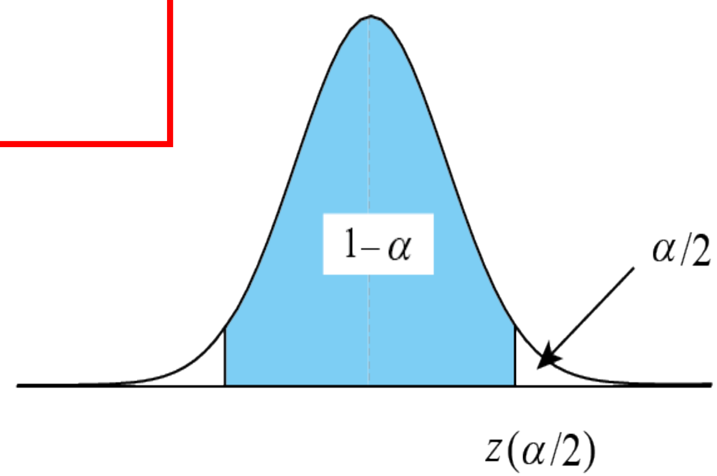
標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

母平均 $\boldsymbol{m}$ に対する信頼係数 $\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}$ の信頼区間

$$\bar{X} \pm z(\alpha/2)\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

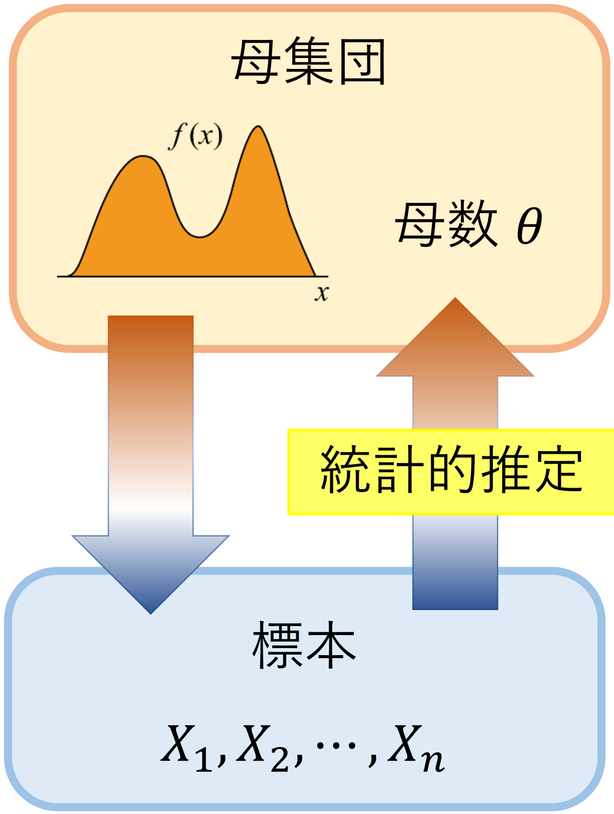
$$P\left(\bar{X} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{X} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



上側 $\alpha/2$ 点

※ 母分散 σ^2 が既知の場合に使う．

区間推定（Interval Estimation）



θ：推定したい母数（未知であるが定数）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$： n 個の無作為標本

- これを特定の関数に代入して、得られた値によって, θ の範囲を推定する

$$\hat{L} = \hat{L}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$
$$\hat{R} = \hat{R}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

- θ は区間 $[\hat{L}, \hat{R}]$ に存在すると主張する
- 存在しないかもしれないので信頼度を示す

推定論の課題　よい関数 $\hat{L}$, $\hat{R}$ を見出すこと

母平均の区間推定（母分散未知）

母集団
母平均 m
母分散 σ^2

無作為
復元抽出

標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

基準化

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

母分散 σ^2 が未知.

σ^2 を不偏分散

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

で置き換える

$$T = \frac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}} \sim \cancel{N(0,1)}$$

定 理 7.33（t-変換）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$：正規母集団 $N(m, \sigma^2)$ から取り出された n 個の無作為標本

標本平均：$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$　　不偏分散：$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$

このとき，$T = \dfrac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}}$ は自由度 $n-1$ の t-分布 t_{n-1} に従う．

比 較

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$　標準正規分布

(1) 正規母集団に対しては, 任意の n で厳密に成り立つ.

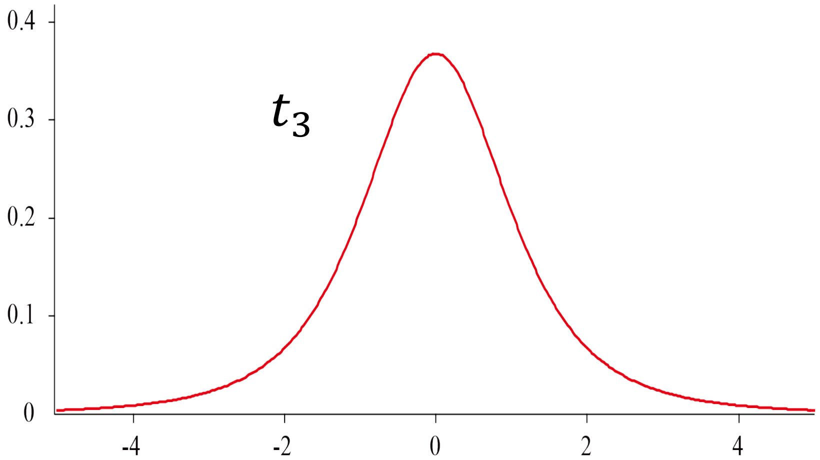
(2) 一般の母集団に対しては, n が十分大きいとき, 近似的に成り立つ.

中心極限定理

t 分布

自由度 n の t_n - 分布の密度関数

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



定理 7.33 の証明のためには

自由度 n−1 の
カイ 2 乗分布

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \quad Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

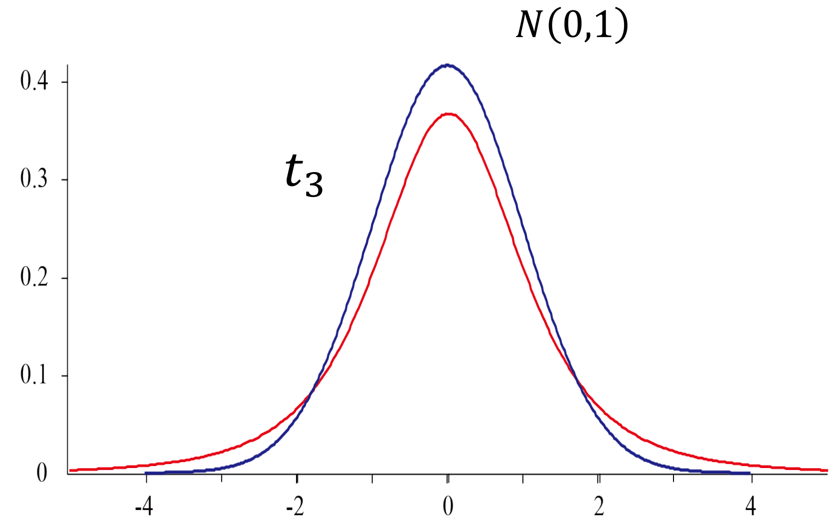
Z と Y は独立なので，t-分布 t_{n-1} の定義から

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$

t 分布

自由度 n の t_n - 分布の密度関数

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

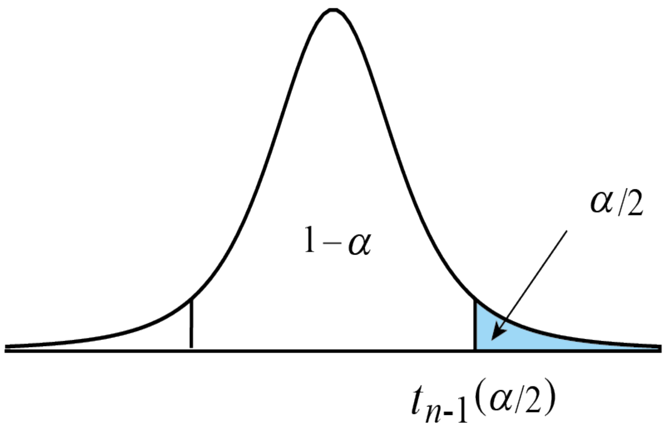


- $N(0,1)$ に比べて, すそ野が厚い.
- 自由度 $n \to \infty$ で t_n-分布は標準正規分布 $N(0,1)$ に一致する.
- 実用上, $n \geq 30$ で標準正規分布 $N(0,1)$ で代用.

t 変換による信頼区間の導出

標本平均　$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$

不偏分散　$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2$



$$T = \frac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}} \sim\ t_{n-1}$$

自由度 $n-1$ の t 分布

$$\underbrace{P\left(-t_{n-1}(\alpha/2) \le T \le t_{n-1}(\alpha/2)\right)}_{} = 1 - \alpha$$

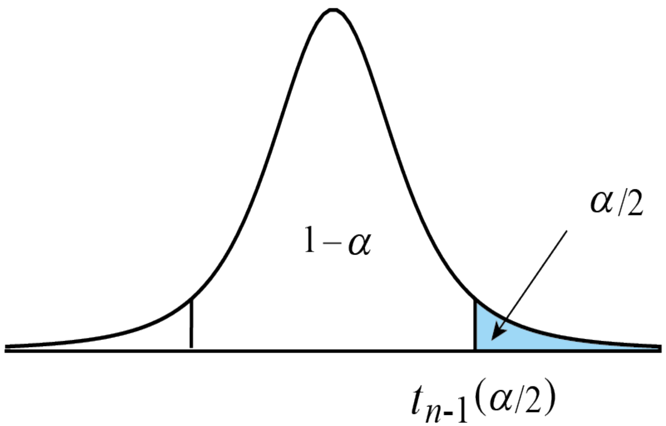
$$-t\frac{U}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - m \le t\frac{U}{\sqrt{n}}$$

$$P\left(\bar{X} - t\frac{U}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{X} + t\frac{U}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

t 変換による信頼区間の導出

標本平均 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$

不偏分散 $U^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$



$$T=\frac{\bar{X}-m}{U/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$$

$$P\left(\bar{X}-t\frac{U}{\sqrt{n}}\leq m\leq \bar{X}+t\frac{U}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

自由度 $n-1$ の t 分布

母平均 m に対する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間

$$\bar{X}\pm t_{n-1}(\alpha/2)\,\frac{U}{\sqrt{n}}$$

例 題 7.34 次の 8 個のデータから母平均の 90% 信頼区間を求めよ.

22.7 21.6 23.0 22.4 22.2 21.3 23.1 22.1

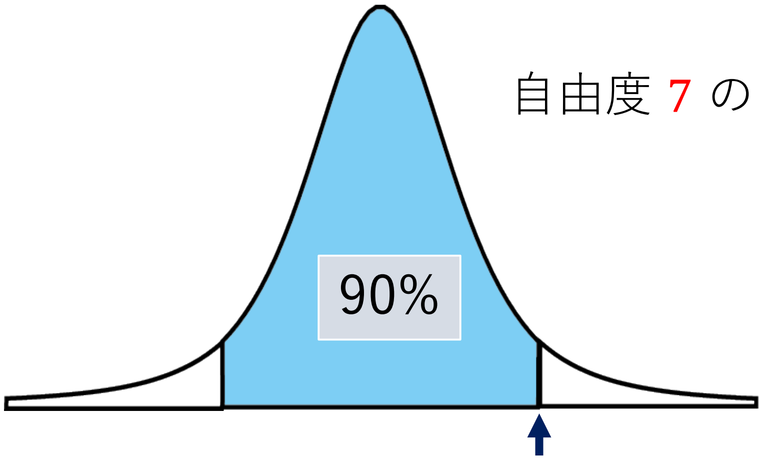
$$\bar{x} = \frac{1}{8}\sum x_i = 22.3$$

$$u^2 = \frac{1}{7}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{7}\sum x_i^2 - \frac{8}{7}\bar{x}^2 = 0.637^2$$

$$T = \frac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}} \sim t_7$$

90% 信頼区間　$\bar{x} \pm t_7(0.05)\dfrac{u}{\sqrt{8}}$

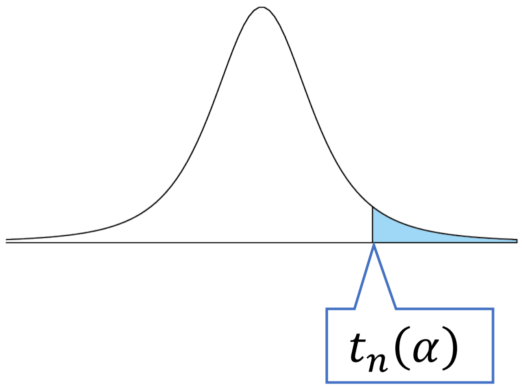


自由度 7 の t 分布

上側 5 %点　$t_7(0.05) = 1.895$

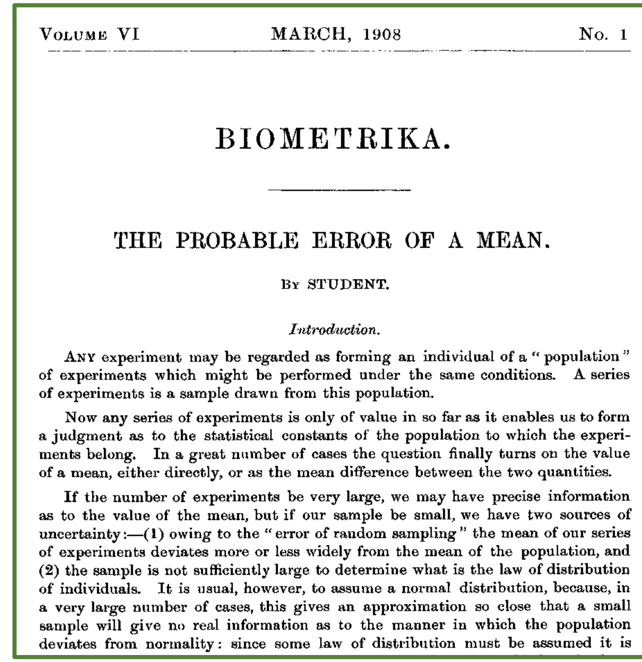
$$= 22.3 \pm 1.895 \times \frac{0.637}{\sqrt{8}} = 22.3 \pm 0.43$$

t 分布の
上側 α 点



n \ α	0.250	0.200	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	1.00000	1.37638	1.96261	3.07768	6.31375	12.70620	31.82052	63.65674	318.30884
2	0.81650	1.06066	1.38621	1.88562	2.91999	4.30265	6.96456	9.92484	22.32712
3	0.76489	0.97847	1.24978	1.63774	2.35336	3.18245	4.54070	5.84091	10.21453
4	0.74070	0.94096	1.18957	1.53321	2.13185	2.77645	3.74695	4.60409	7.17318
5	0.72669	0.91954	1.15577	1.47588	2.01505	2.57058	3.36493	4.03214	5.89343
6	0.71756	0.90570	1.13416	1.43976	1.94318	2.44691	3.14267	3.70743	5.20763
7	0.71114	0.89603	1.11916	1.41492	1.89458	2.36462	2.99795	3.49948	4.78529
8	0.70639	0.88889	1.10815	1.39682	1.85955	2.30600	2.89646	3.35539	4.50079
9	0.70272	0.88340	1.09972	1.38303	1.83311	2.26216	2.82144	3.24984	4.29681
10	0.69981	0.87906	1.09306	1.37218	1.81246	2.22814	2.76377	3.16927	4.14370
11	0.69745	0.87553	1.08767	1.36343	1.79588	2.20099	2.71808	3.10581	4.02470
12	0.69548	0.87261	1.08321	1.35622	1.78229	2.17881	2.68100	3.05454	3.92963
13	0.69383	0.87015	1.07947	1.35017	1.77093	2.16037	2.65031	3.01228	3.85198
14	0.69242	0.86805	1.07628	1.34503	1.76131	2.14479	2.62449	2.97684	3.78739
15	0.69120	0.86624	1.07353	1.34061	1.75305	2.13145	2.60248	2.94671	3.73283
16	0.69013	0.86467	1.07114	1.33676	1.74588	2.11991	2.58349	2.92078	3.68615
17	0.68920	0.86328	1.06903	1.33338	1.73961	2.10982	2.56693	2.89823	3.64577
18	0.68836	0.86205	1.06717	1.33039	1.73406	2.10092	2.55238	2.87844	3.61048
19	0.68762	0.86095	1.06551	1.32773	1.72913	2.09302	2.53948	2.86093	3.57940
20	0.68695	0.85996	1.06402	1.32534	1.72472	2.08596	2.52798	2.84534	3.55181
21	0.68635	0.85907	1.06267	1.32319	1.72074	2.07961	2.51765	2.83136	3.52715
22	0.68581	0.85827	1.06145	1.32124	1.71714	2.07387	2.50832	2.81876	3.50499
23	0.68531	0.85753	1.06034	1.31946	1.71387	2.06866	2.49987	2.80734	3.48496
24	0.68485	0.85686	1.05932	1.31784	1.71088	2.06390	2.49216	2.79694	3.46678
25	0.68443	0.85624	1.05838	1.31635	1.70814	2.05954	2.48511	2.78744	3.45019
26	0.68404	0.85567	1.05752	1.31497	1.70562	2.05553	2.47863	2.77871	3.43500
27	0.68368	0.85514	1.05673	1.31370	1.70329	2.05183	2.47266	2.77068	3.42103
28	0.68335	0.85465	1.05599	1.31253	1.70113	2.04841	2.46714	2.76326	3.40816
29	0.68304	0.85419	1.05530	1.31143	1.69913	2.04523	2.46202	2.75639	3.39624
30	0.68276	0.85377	1.05466	1.31042	1.69726	2.04227	2.45726	2.75000	3.38518
35	0.68156	0.85201	1.05202	1.30621	1.68957	2.03011	2.43772	2.72381	3.34005
40	0.68067	0.85070	1.05005	1.30308	1.68385	2.02108	2.42326	2.70446	3.30688
45	0.67998	0.84968	1.04852	1.30065	1.67943	2.01410	2.41212	2.68959	3.28148
50	0.67943	0.84887	1.04729	1.29871	1.67591	2.00856	2.40327	2.67779	3.26141
∞	0.67449	0.84162	1.03643	1.28155	1.64485	1.95996	2.32635	2.57583	3.09023

William Sealy Gosset (1876-1937)



VOLUME VI MARCH, 1908 No. 1

BIOMETRIKA.

THE PROBABLE ERROR OF A MEAN.

BY STUDENT.

Introduction.

ANY experiment may be regarded as forming an individual of a "population" of experiments which might be performed under the same conditions. A series of experiments is a sample drawn from this population.

Now any series of experiments is only of value in so far as it enables us to form a judgment as to the statistical constants of the population to which the experiments belong. In a great number of cases the question finally turns on the value of a mean, either directly, or as the mean difference between the two quantities.

If the number of experiments be very large, we may have precise information as to the value of the mean, but if our sample be small, we have two sources of uncertainty:—(1) owing to the "error of random sampling" the mean of our series of experiments deviates more or less widely from the mean of the population, and (2) the sample is not sufficiently large to determine what is the law of distribution of individuals. It is usual, however, to assume a normal distribution, because, in a very large number of cases, this gives an approximation so close that a small sample will give no real information as to the manner in which the population deviates from normality: since some law of distribution must be assumed it is

1899年 ギネスビール社ダブリン醸造所に就職

1906-07年 カール・ピアソンに学ぶ

1908年 有名な論文（スチューデントのｔ分布）

1935年 新設のロンドン醸造所に転勤

・小標本の問題を扱う（フィッシャーが高く評価）

・当時の主流（ゴルトン、ピアソンら）「大標本主義」

問題 7.10＊ 大量生産した製品のあるロットから大きさ 25 の標本を選んで不純物量を測定したとき, 平均 3.28 g の不純物が含まれていた．この工場の工程から, 不純物量は標準偏差 1.25 g の正規分布に従うことが経験的にわかっている. このロット全体における不純物の平均重量の90%信頼区間を求めよ.

問題 7.12＊ ある方法で合成した化学物質の重量(g)は正規分布に従うことが仮定できる．実際に, 10回の合成実験で得られた重量は次のとおりであった.

23.3　22.2　26.7　24.8　22.3　23.5　22.8　23.8　24.8　21.8

この合成法で得られる化学物質の重量について, 母平均の95%信頼区間を求めよ.

Lecture 9

母比率と母分散の推定

【教科書】

第 7 章 母数の推定
7.3　区間推定（続）

母平均の区間推定（復習）

母集団
母平均　m　母分散 σ^2

→ 無作為復元抽出 →

標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

標本平均： $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$　　不偏分散： $U^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

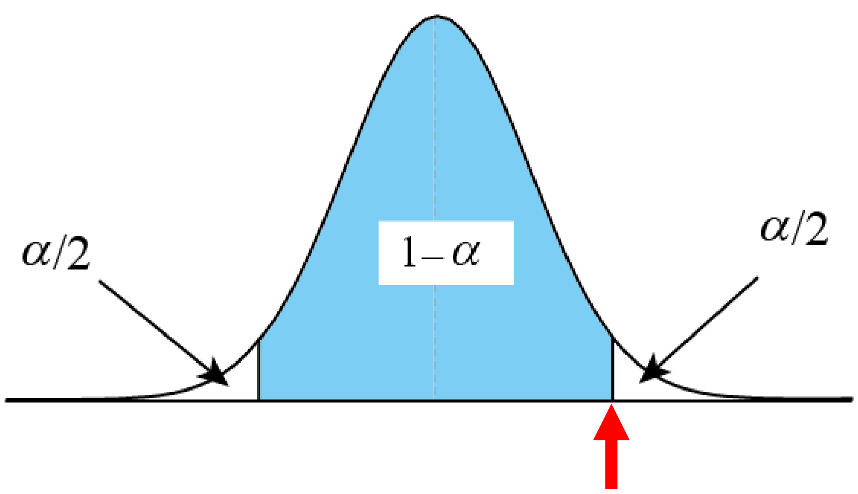
- **点推定**なら $\bar{X}$ によって母平均 m の推定値とするが,
  ⇒ 信頼性が不明
- **区間推定**では, $\bar{X} \pm \epsilon$ の形で母平均 m の信頼区間を示し,
  $\bar{X} - \varepsilon \leq m \leq \bar{X} + \varepsilon$ となる確率（信頼係数）を与える

標本平均に関する基本定理

母集団	基本定理	使う確率分布	参照
正規母集団	$\dfrac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	標準正規分布	定理 7.5
正規母集団	$\dfrac{\bar{X}-m}{U/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	自由度 $n-1$ の t-分布	定理 7.33
一般の母集団 n：大きい	$\dfrac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 近似的に成立	標準正規分布	定理 6.8 中心極限定理

信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間

母分散 σ^2 が既知	母分散 σ^2 が未知
正規母集団または， 一般の母集団で n が大きい	正規母集団
$\bar{X} \pm z(\alpha/2)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} \pm t_{n-1}(\alpha/2)\dfrac{U}{\sqrt{n}}$



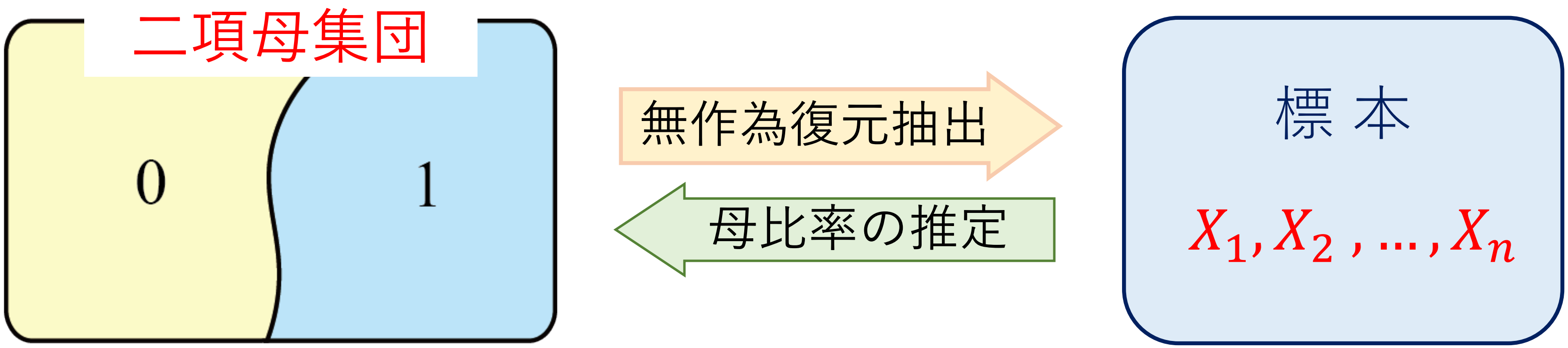
上側 $\alpha/2$ 点

正規分布　$z(\alpha/2)$

t 分布　$t_{n-1}(\alpha/2)$

二項母集団の母比率の推定

- 二項母集団とは，0 と 1 からなる母集団
- 母比率 p とは, 1 の割合



母平均と母分散

$$m = p$$

$$\sigma^2 = p(1-p)$$

標本平均 ＝標本比率

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \hat{p}$$

母比率の点推定

例えば，視聴率調査

順位	番組タイトル	放送局	視聴率
1	連続テレビ小説・なつぞら （4/10）	NHK総合	23.1 %
2	特捜9 （4/10）	テレビ朝日	15.2 %
2	木曜ドラマ・緊急取調室 （4/11）	テレビ朝日	15.2 %
4	ラジエーションハウス・放射線科の診断レポート （4/8）	フジテレビ	12.7 %
5	日曜プライム「ドラマスペシャル アガサ・クリスティ　予告殺人」（4/14）	テレビ朝日	11.5 %
6	金曜ドラマ・インハンド （4/12）	TBS	11.3 %
7	白衣の戦士！ （4/10）	日本テレビ	10.3 %
8	緊急取調室（4/11）	テレビ朝日	9.9 %
9	いだてん〜東京オリムピック噺〜 （4/14）	NHK総合	9.6 %
10	特捜9[再] （4/10）	テレビ朝日	9.5 %

ビデオリサーチ社：関東地区（ドラマ）

母比率の区間推定

二項母集団 母比率 p	無作為復元抽出 → ← 母比率の推定	標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$

母平均と母分散

$$m = p \quad \sigma^2 = p(1-p)$$

標本平均＝標本比率

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \hat{p}$$

標本比率の分布

- n が大きいときは近似的に,

$$\bar{X} = \hat{p} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

- n が大きいときは, 大数の法則で $\hat{p}$ と p は高い確率で近い

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \sim N(0,1)$$

母比率の区間推定

二項母集団
母比率 p

無作為復元抽出 →

← 母比率の推定

標本
$X_1, X_2, \dots, X_n$

母平均と母分散

$m = p \quad \sigma^2 = p(1-p)$

標本平均＝標本比率

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \hat{p}$$

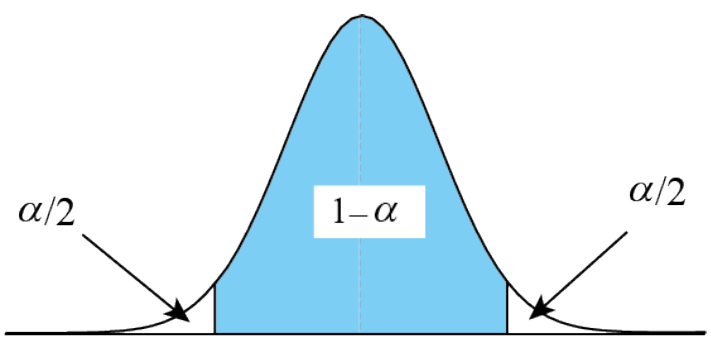
母比率の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \sim N(0,1)$$

$$-z(\alpha/2) \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \leq z(\alpha/2)$$

p について解いて,

$$\boxed{\hat{p} \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$



例　関東地区の視聴率調査は 600 世帯を対象にしている.

順位	番組タイトル	放送局	視聴率
1	連続テレビ小説・なつぞら　(4/10)	NHK総合	23.1 %
2	特捜9　(4/10)	テレビ朝日	15.2 %
・・・・・			
9	いだてん〜東京オリムピック噺〜　(4/14)	NHK総合	9.6 %
10	特捜9[再]　(4/10)	テレビ朝日	9.5 %

95%信頼区間

$$\hat{p} \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.231 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.231(1-0.231)}{600}} = 0.231 \pm 0.034$$

$$\hat{p} \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.095 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.095(1-0.095)}{600}} = 0.095 \pm 0.023$$

例題 7.36　　練 習 （5分）

無作為に選ばれた 600 人に対して, ある支持率調査を行ったところ, 124 人が支持していることが分かった. 支持率の 95% 信頼区間を求めよ. また 90% 信頼区間を求めよ.

$$\hat{p} = \frac{124}{600} = 0.207$$

95% 信頼区間

$$\hat{p} \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.207 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.207(1-0.207)}{600}} = 0.207 \pm 0.032$$

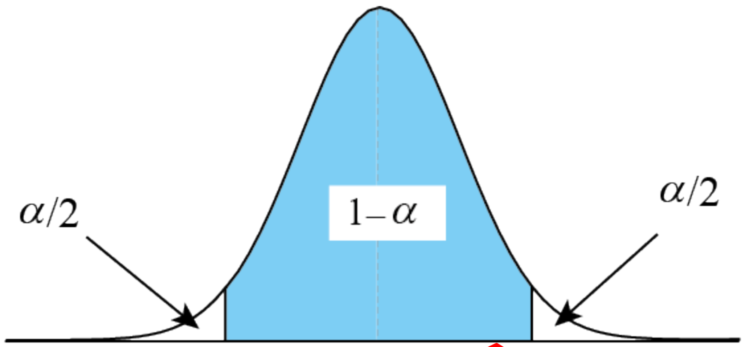
90% 信頼区間

$$\hat{p} \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.207 \pm 1.64 \times \sqrt{\frac{0.207(1-0.207)}{600}} = 0.207 \pm 0.027$$

信頼係数と信頼区間の幅

$$\bar{X} \pm z(\alpha/2)\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} \pm t_{n-1}(\alpha/2)\,\frac{U}{\sqrt{n}}$$



上側 $\boldsymbol{\alpha/2}$点
$= \boldsymbol{z(\alpha/2)}$ または $\boldsymbol{t_{n-1}(\alpha/2)}$

信頼係数 $1-\alpha$	0	小		大	1
α	1	大		小	0
信頼区間の幅	0	小		大	無限大 ∞

点推定

何も言わない

母分散の区間推定

母集団		標本
母平均 m　母分散 σ^2	無作為復元抽出 →	$X_1, X_2, \dots, X_n$

標本平均： $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　不偏分散： $U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

- 点推定なら, 不偏分散を使う
- 区間推定のためには, 不偏分散の分布が必要

カイ 2 乗分布（χ^2-分布）

$Z_1, Z_2, \cdots, Z_\nu$：標準正規分布 $N(0,1)$ に従う ν 個の無作為標本

それらの 2 乗和　$X = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$　の分布を

自由度 ν のカイ 2 乗分布と呼び, 記号 χ_ν^2 で表す.

密度関数

$$f_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x \geq 0),$$

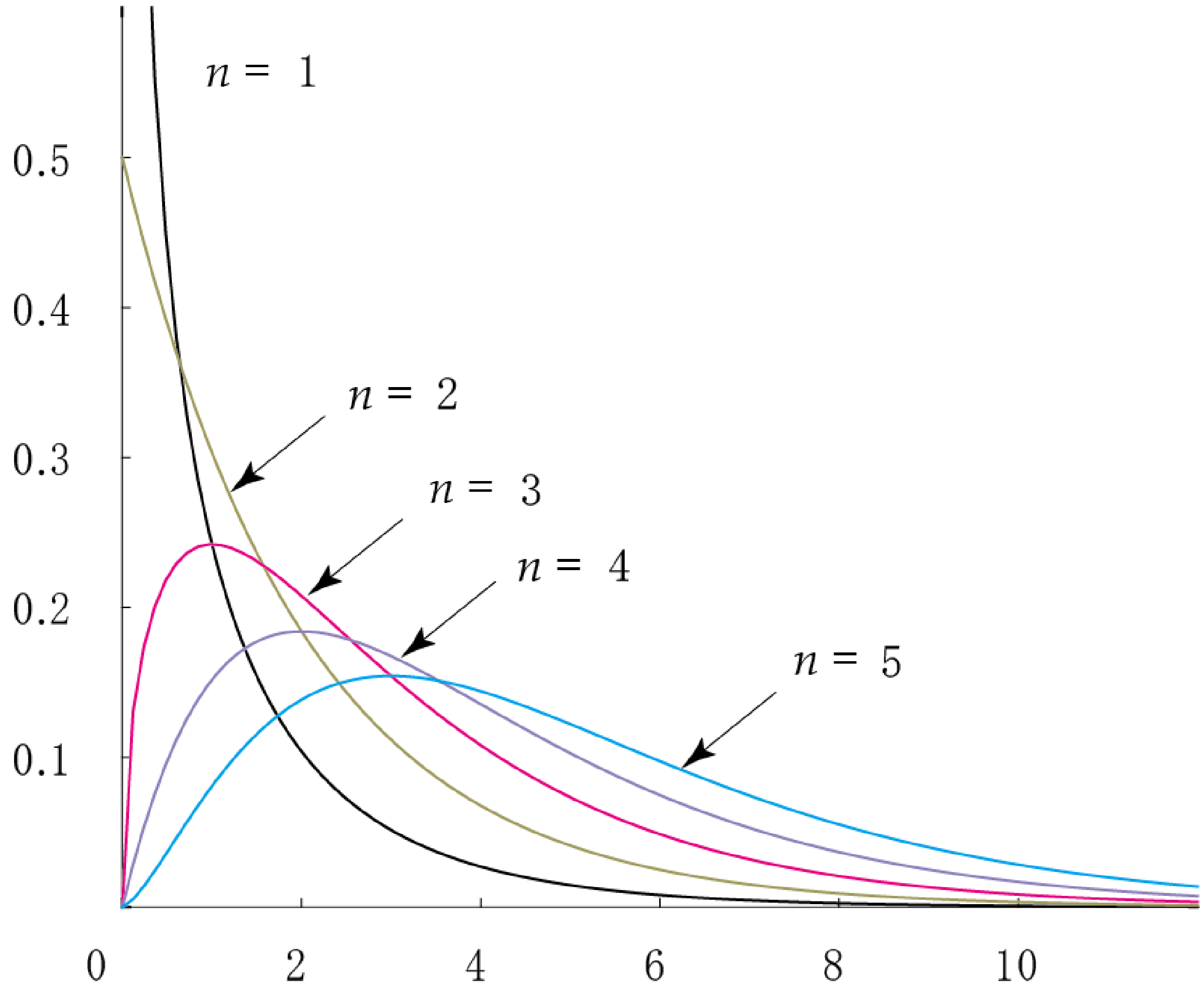
$$= 0 \quad (x < 0)$$

平均値　$m = \nu$

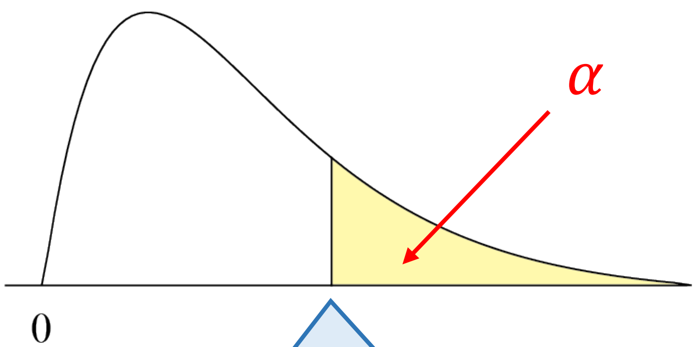
分散　$\sigma^2 = 2\nu$

（注）$\Gamma(x)$ はガンマ関数

自由度 n のカイ 2 乗分布（χ_n^2-分布）



自由度 n のカイ 2 乗分布（χ_n^2-分布）



上側 α 点

$\chi_n^2(\alpha)$

$n\backslash\alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

例

$n = 7$

$\alpha = 0.05$

$\chi_7^2(0.05) = 14.067$

定理 7.31（不偏分散の分布）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ ：正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う n 個の無作為標本

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ：標本平均

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $v = n - 1$ のカイ 2 乗分布 χ^2_{n-1} に従う．

標準化すると， $Z_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$,　$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n\mu^2}{\sigma^2}$$

χ^2_n

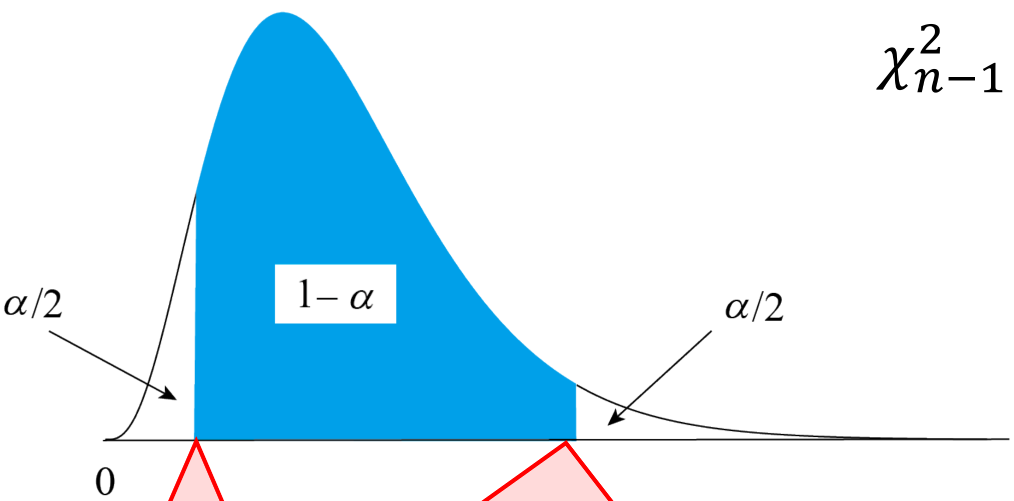
$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + \frac{2\bar{X}}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2} - \frac{2\mu}{\sigma^2}n\bar{X} + \frac{n\mu^2}{\sigma^2} = Y + Z^2$$

χ^2_1

独立

母分散の区間推定

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$ を用いる



上側 $\alpha/2$点$= \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$

上側 $1-\alpha/2$ 点$= \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$

$$\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \le Y \le \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$$

⇕

$$\frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \le \sigma^2$$

$$\le \frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}$$

母分散の区間推定

母集団	無作為復元抽出 →	標本
母平均 m　母分散 σ^2		$X_1, X_2, \ldots, X_n$

標本平均： $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　不偏分散： $U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

母分散に対する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\left[\frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)},\quad \frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right]$$

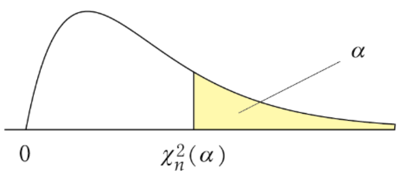
問題 7.11＊ ある地域から無作為に選ばれた 2000人 に対して, ある事案について尋ねたところ 344人が支持すると回答した．この地域全体での支持率の90%信頼区間を求めよ.

問題 7.12（再録）＊ ある方法で合成した化学物質の重量(g)は正規分布に従うことが仮定できる．実際に, 10回の合成実験で得られた重量は次のとおりであった.

23.3　22.2　26.7　24.8　22.3　23.5　22.8　23.8　24.8　21.8

この合成法で得られる化学物質の重量について, <u>母分散</u>の95%信頼区間を求めよ.

カイ2乗分布



上側 α 点

$\chi_\nu^2(\alpha)$

ν \ α	.99	.975	.95	.90	.70	.50	.30	.10	.05	.025	.01
1	.000157	.00098	.00393	.0158	.148	.455	1.074	2.706	3.841	5.0238	6.635
2	.0201	.0506	.103	.211	.713	1.386	2408	4 605	5.991	7 3780	9.210
3	.115	.216	.352	.584	1.424	2.366	3.665	6 251	7.815	9 348	11.345
4	.297	.484	.711	1.064	2.195	3.357	4.878	7.779	9.488	11.243	13.277
5	.554	.831	1.145	1.610	3.000	4.351	6.064	9.236	11.070	12.832	15.086
6	.872	1.237	1.635	2.204	3.828	5.348	7.231	10 645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	4.671	6.346	8.383	12.017	14.067	16 013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	3.490	5.527	7.344	9.524	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	6.393	8.343	10.656	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	7.267	9.342	11.781	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	8.148	10.341	12.899	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3 571	4.404	5.226	6.304	9.034	11.340	14.011	18.549	21.026	23 337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	9.926	12.340	15 119	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6 571	7.790	10 821	13.339	16.222	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	11.721	14.339	17.322	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	12.624	15.338	18.418	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	13.531	16.338	19.511	24 769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	14.440	17.338	20.601	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	11.651	15.352	18.338	21.689	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	16.266	19.337	22.775	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	13.240	17.182	20.337	23.858	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	14.041	18.101	21.337	24.939	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	19.021	22.337	26.018	32 007	35.172	38 076	41.638
24	10 856	12.401	13.848	15.659	19.943	23 337	27.096	33 196	36.415	39 364	42980
25	11.524	13.120	14 611	16 473	20.867	24 337	28.172	34.382	37.652	40 646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	21.792	25.336	29.246	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	22.719	26.336	30.319	36.741	40.113	43.194	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	23.647	27.336	31.391	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17 708	19.768	24 577	28.336	32.461	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	25.508	29.336	33.530	40.256	43.773	46.979	50.892

Lecture 10

仮説検定とは

【教科書】

第 8 章 検 定

8.1 母数の検定

8.2 母平均の検定

典型例

コインを 100 回投げて, 表が 67 回出た. コインは公平といえるか?

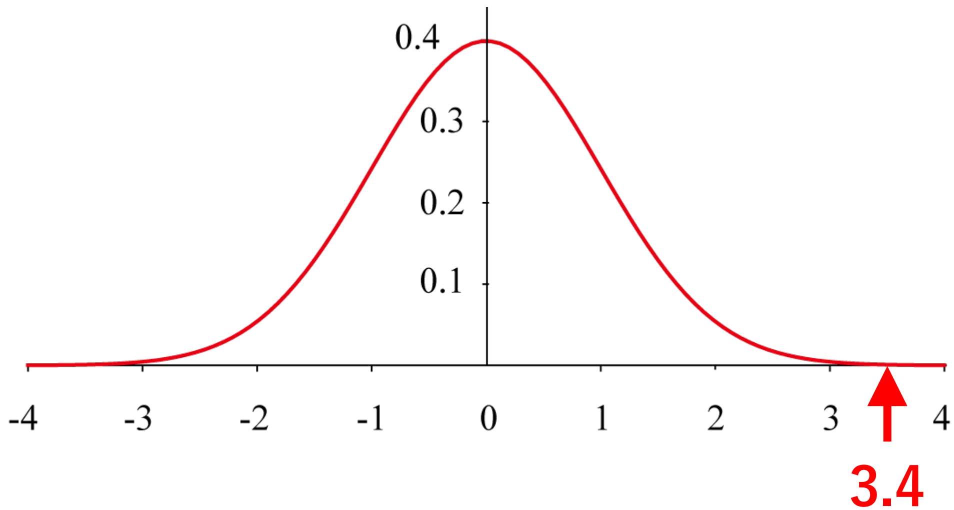
X ：100回投げて表の出る回数

実現値　$z = \dfrac{67-50}{5} = 3.4$

$$X \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right) \approx N(50, 5^2)$$

正規分布近似が便利

$$Z = \frac{X-50}{5} \sim N(0,1)$$



判断：かなり稀？

典型例

コインを 100 回投げて, 表が 54 回出た. コインは公平といえるか?

典型例

コインを 100 回投げて, 表が 54 回出た. コインは公平といえるか?

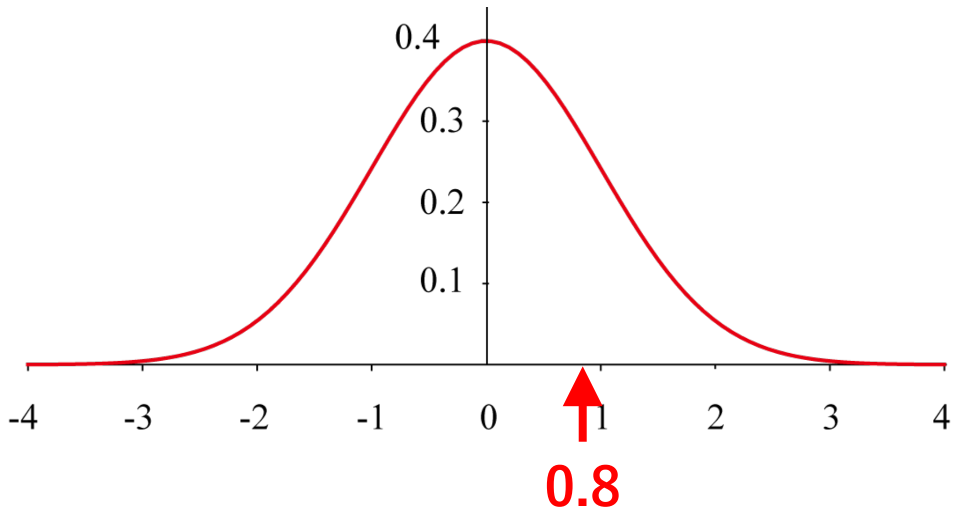
X ：100回投げて表の出る回数

$$X \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right) \approx N(50, 5^2)$$

正規分布近似が便利

$$Z = \frac{X-50}{5} \sim N(0,1)$$

実現値　$z = \dfrac{54-50}{5} = 0.8$



判断：ふつうに起こる？

仮説検定の定式化

(1) 母数に関する**帰無仮説**と**対立仮説**を決める.　　H_0　　H_1

(2) 関連する確率変数 T (**検定統計量**) を選び, H_0 の下で, この確率変数の分布を調べる

(3) **有意水準** $0 < \alpha < 1$ と**棄却域** W を決める.

(4) 標本から T の**実現値** t を計算する.

- $t \in W$ ⇒実現値は有意水準 α で**有意**である
  ⇒ H_0 を**棄却する**⇒ H_1 を採択する.
- $t \notin W$ ⇒実現値は有意水準 α で有意でない
  ⇒ H_0 を**棄却できない**
  (⇒ H_0 を採択する)

例　コインを 100 回投げて, 表が 67 回出た. コインは公正といえるか?

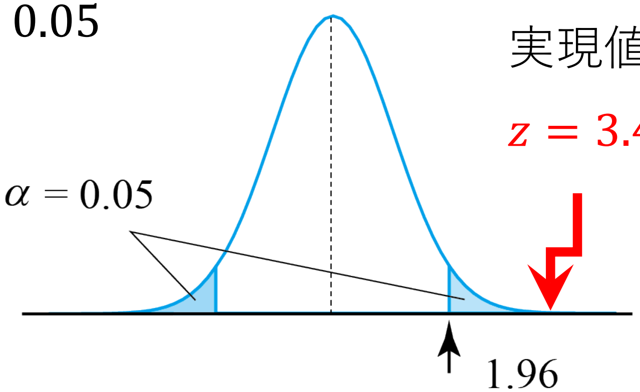
p ：表の出る確率

H_0 : $p = \frac{1}{2}$　　H_1 : $p \neq \frac{1}{2}$

X ：表の回数 $\sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$

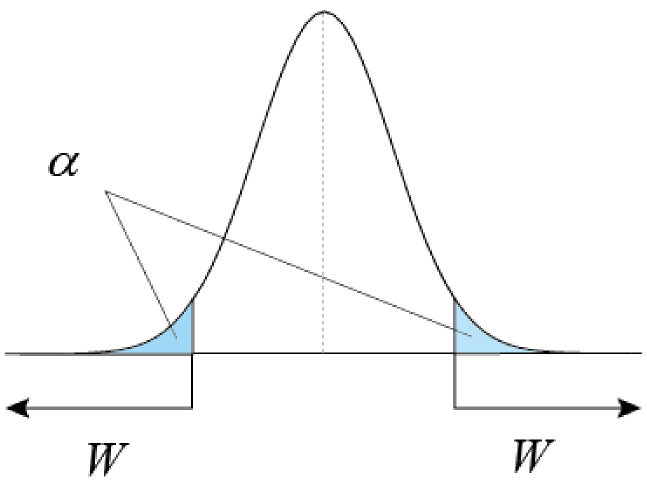
$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$

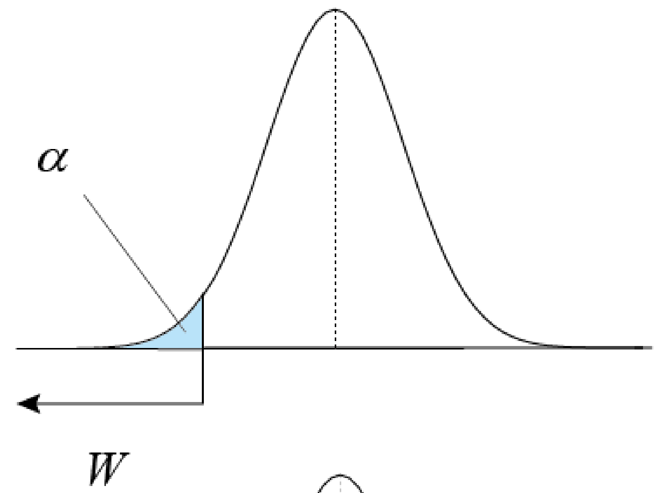
$\alpha = 0.05$

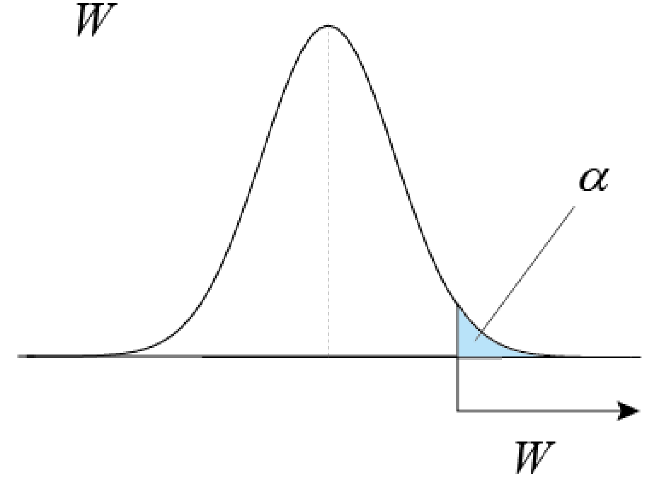


H_0: $p = \frac{1}{2}$ を棄却する

両側検定と片側検定

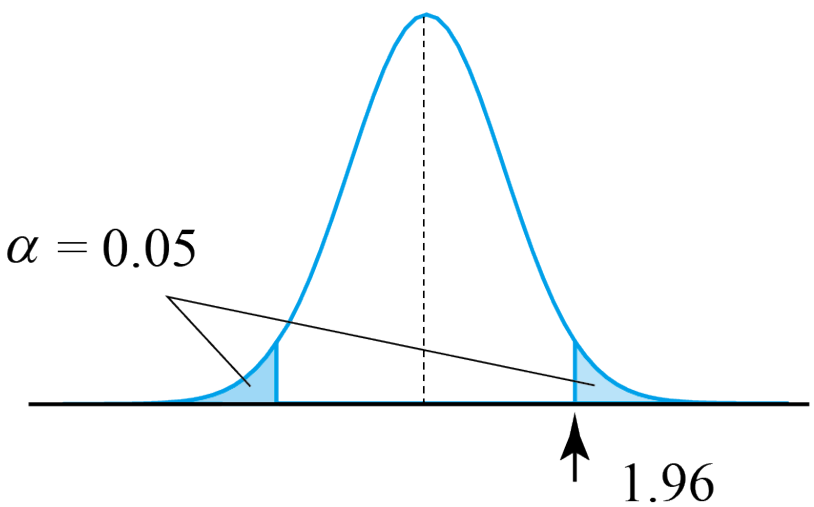


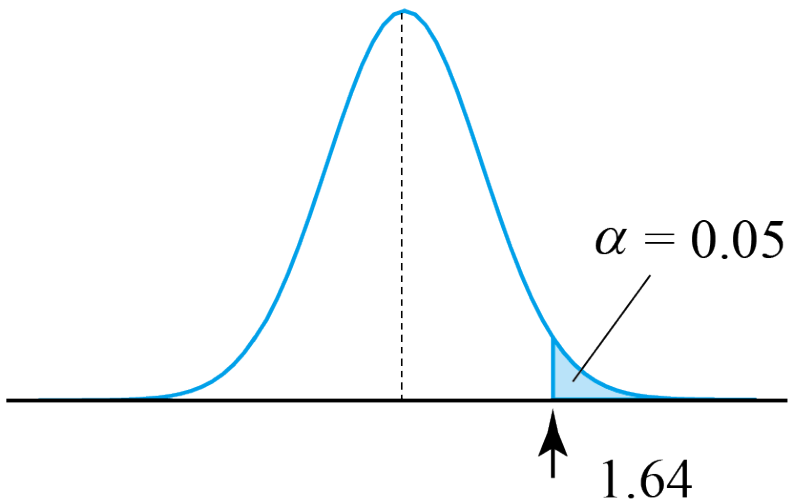




- 使い分けは文脈による
- 数理統計学の範疇ではない

両側 α 点と上側 α 点： $N(0,1)$ の場合





1.96 = 両側 5 % 点
= 上側 2.5 % 点

1.64 = 上側 5 % 点
= 両側 10 % 点

α	0.3173	0.1000	0.0500	0.0455	0.0100	0.0027	0.0010
$\alpha/2$	0.1587	0.0500	0.0250	0.0228	0.0050	0.0013	0.0005
z	1.000	1.645	1.960	2.00	2.576	3.000	3.290

母平均の分布（復習）

母集団
母平均 m　母分散 σ^2

無作為
復元抽出

標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

標本平均：　$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　不偏分散：　$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

母集団	基本定理	使う確率分布	参照
正規母集団	$\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	標準正規分布	定理 7.5
正規母集団	$\dfrac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	自由度 $n-1$ の t-分布	定理 7.33
一般の母集団 n：大きい	$\dfrac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 近似的に成立	標準正規分布	定理 6.8 中心極限定理

例 8.3 (両側検定)

ある調味料の製造ラインでは, 砂糖の含有量 (g) は, 原料の不均一や製造ラインの狂いなどから変動するが, 標準偏差は常に一定で $\sigma = 3$ の正規分布に従っているとしてよい. 各製品の砂糖の含有量が $m = 60$ になるように調整してラインを稼働させて, しばらくしてから, 25 個の製品を抜取検査したところ, 砂糖の含有量の平均値は 61.63 であった. その時点で製造ラインは $m = 60$ を保持していると言えるだろうか.

母集団

$m = 60$

$\sigma^2 = 3^2$

標 本

$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$

大きさ $n = 25$

標本平均
実現値

$\bar{x} = 61.63$

例 8.3 （両側検定）

母集団
$m = 60$
$\sigma^2 = 3^2$

標 本
$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$
大きさ $n = 25$

標本平均
実現値
$\bar{x} = 61.63$

帰無仮説と対立仮説　H_0: $m = 60$　H_1: $m \neq 60$

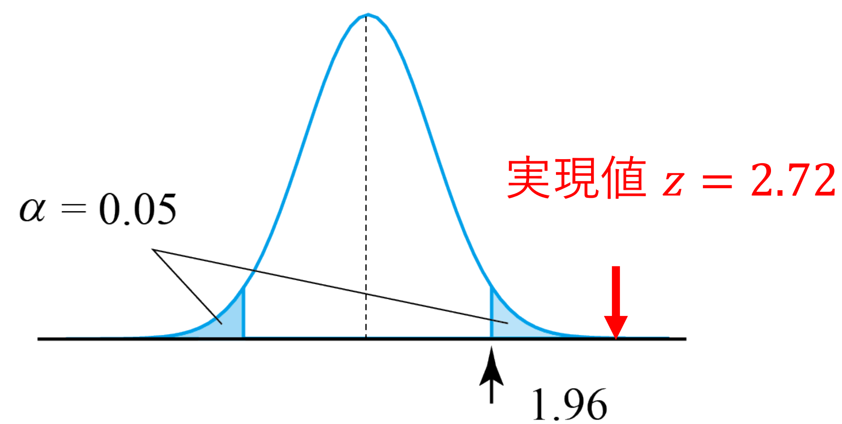
有意水準　$\alpha = 0.05$　$\alpha = 0.01$ では？

検定統計量　H_0 の下で,

$$\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N(60, 0.6^2)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 60}{0.6} \sim N(0,1)$$

実現値　$z = \dfrac{61.63 - 60}{0.6} = 2.72$



結論

有意水準 5% の両側検定で H_0 は棄却される．

$m = 60$ を保持していないという判断である．

例 8.3　(両側検定)

母集団
$m = 60$
$\sigma^2 = 3^2$

標 本
$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$
大きさ $n = 25$

標本平均
実現値
$\bar{x} = 61.63$

帰無仮説と対立仮説　$H_0: m = 60 \quad H_1: m \neq 60$

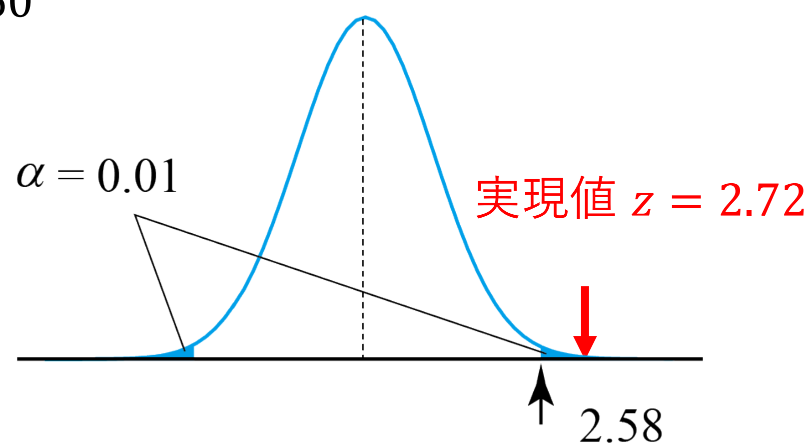
有意水準　$\alpha = 0.01$

検定統計量　H_0 の下で,

$$\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N(60, 0.6^2)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 60}{0.6} \sim N(0,1)$$

実現値　$z = \dfrac{61.63 - 60}{0.6} = 2.72$



結論

有意水準 1% の両側検定で H_0 は棄却される.

高度に有意である.

例 8.4　(片側検定)

薬品を瓶詰する工程があり, 1本あたりの不純物の重量(g)は正規分布に従っているという．この工程では, 1本あたりの不純物の重量が 1.5 になるように調整してあるが，製品 8 本を抜取検査したところ, 不純物の平均重量が 2.05, 不偏分散が 0.65^2 であった. さて, 工程は正しく調整されていると言えるだろうか.

母集団

$m = 1.5$

$\sigma^2 =$ 未知

⇒

標 本

$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$

大きさ $n = 8$

実現値

標本平均

$\bar{x} = 2.05$

不偏分散

$u^2 = 0.65^2$

例 8.4　（片側検定）

母集団
$m = 1.5$
$\sigma^2 =$ 未知

→

標 本
大きさ $n = 8$

実現値

標本平均　$\bar{x} = 2.05$

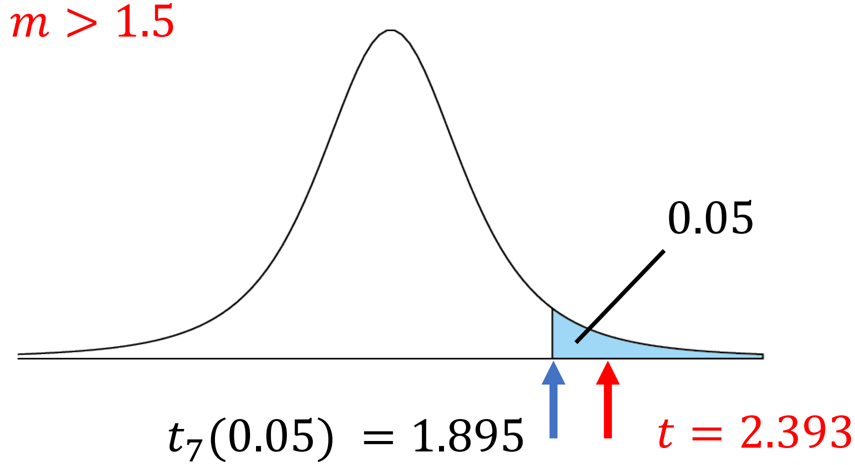
不偏分散　$u^2 = 0.65^2$

帰無仮説と対立仮説　$H_0\!: m = 1.5$　$H_1\!: m > 1.5$

有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　H_0 の下で,

$$T = \frac{\bar{X} - m}{U/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 1.5}{U/\sqrt{8}} \sim t_7$$



実現値

$$t = \frac{2.05 - 1.5}{0.65/\sqrt{8}} = 2.393$$

結論

有意水準 5% の片側検定で H_0 は棄却される.
工程は調整どおりになっていないと判定される.

問題 8.2

演習（10分）

日本人の平均年齢は44.5歳, 標準偏差は 23.5 歳である (2010年). あるサークルのメンバー 25 名の平均年齢は 34 歳である. このサークルは日本人の無作為標本といえるだろうか, 仮説検定によって判定せよ.

追加問題

従来部品の寿命は 120 時間であるが, 新製法では部品の寿命が長くなることが期待される. 実際, 25個のサンプルで寿命を調べたところ, 平均寿命は 120.8 時間であった. 部品の製造工程の管理状況から, 新製法での部品の寿命は標準偏差 2.2 時間の正規分布にしたがっているとしてよい. 新製法は期待通りであろうか. 仮説検定で判断せよ.

問題 8.2

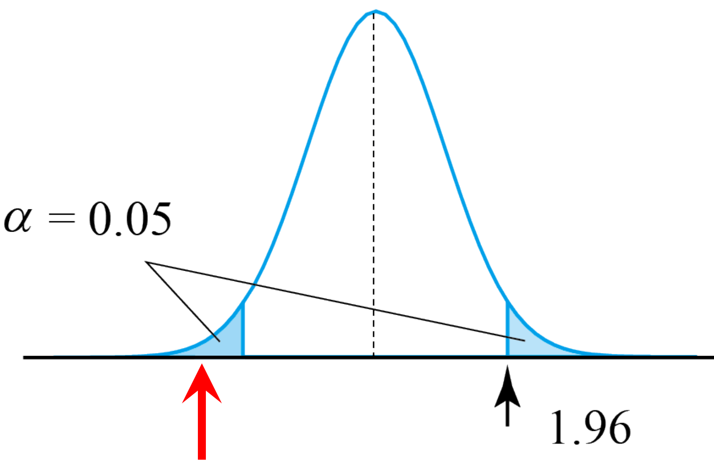
日本人の平均年齢は44.5歳, 標準偏差は 23.5 歳である(2010年). あるサークルのメンバー 25 名の平均年齢は34 歳である. このサークルは日本人の無作為標本といえるだろうか, 仮説検定によって判定せよ.

帰無仮説と対立仮説　$H_0: m = 44.5 \quad H_1: m \neq 44.5$

有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　H_0 の下で,

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

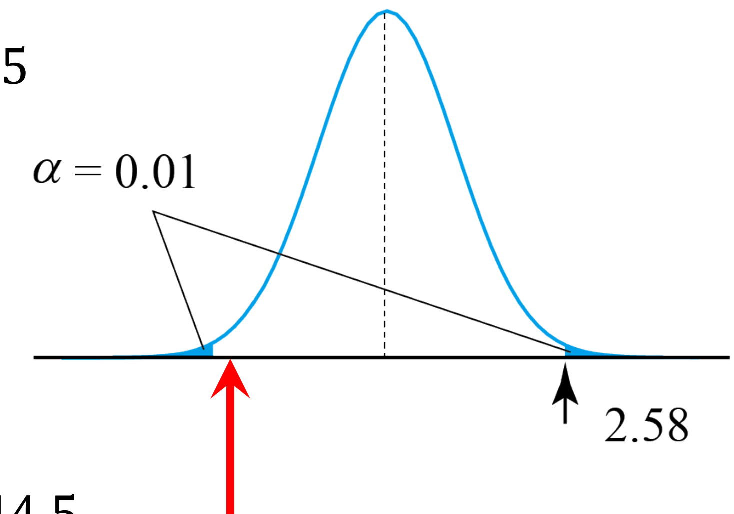


実現値　$z = \dfrac{34 - 44.5}{23.5/\sqrt{25}} = -2.23$

結論　有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定によって H_0 は棄却される.

問題 8.2

日本人の平均年齢は44.5歳, 標準偏差は 23.5 歳である(2010年). あるサークルのメンバー 25 名の平均年齢は34 歳である. このサークルは日本人の無作為標本といえるだろうか, 仮説検定によって判定せよ.



帰無仮説と対立仮説 $H_0 : m = 44.5 \quad H_1 : m \neq 44.5$

有意水準 $\alpha = 0.01$

検定統計量 H_0 の下で,

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

実現値 $z = \dfrac{34 - 44.5}{23.5/\sqrt{25}} = -2.23$

結論 有意水準 $\alpha = 0.01$ の両側検定によって H_0 は棄却されない
（高度に有意ではない）

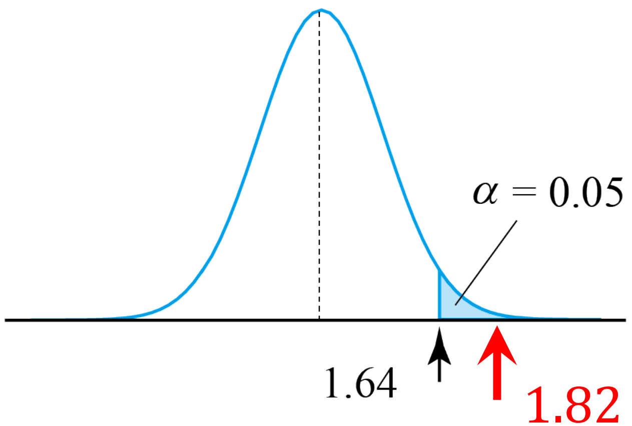
追加問題

従来部品の寿命は 120 時間であるが, 新製法では部品の寿命が長くなることが期待される. 実際, 25個のサンプルで寿命を調べたところ, 平均寿命は 120.8 時間であった. 部品の製造工程の管理状況から, 新製法での部品の寿命は標準偏差 2.2 時間の正規分布にしたがっているとしてよい. 新製法は期待通りであろうか. 仮説検定で判断せよ.

$H_0: m = 120$　　$H_1: m > 120$

$\alpha = 0.05$

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



実現値

$$z = \frac{120.8 - 120}{2.2/\sqrt{25}} = 1.82$$

結論

有意水準 $\alpha = 0.05$ の片側検定によって H_0 は棄却される

P-値

伝統的な仮説検定

有意水準 α と実現値から

$\Rightarrow$ H_0 の棄却・採択を述べる.

実現値が帰無仮説 H_0 の下で, どのくらい外れているか（有意性の度合い）を知りたいことも多い.

P-値

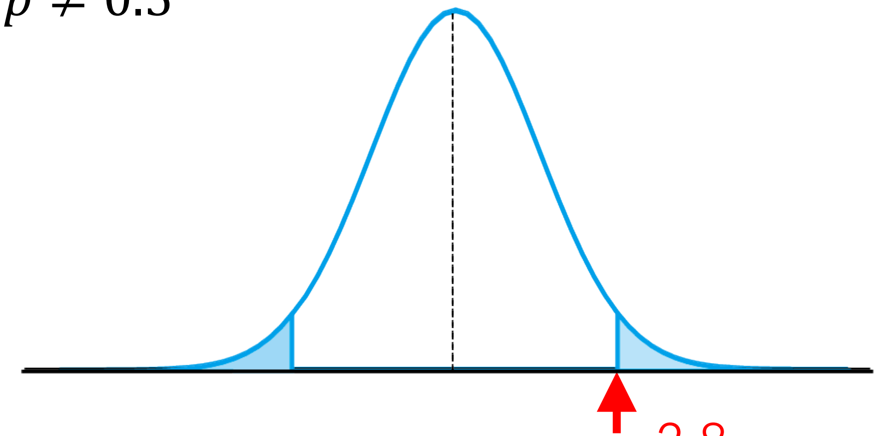
実現値 t を含めて, それ以上に起こりにくい実現値が得られる確率

例（P 値の計算）

公平なコインかどうか確認のため 100 回振ったところ表が 64 回出た.

帰無仮説と対立仮説　$H_0: p = 0.5 \quad H_1: p \neq 0.5$

~~有意水準~~　$\cancel{\alpha = 0.05}$



検定統計量

H_0 の下で，表の回数を X とすれば

$$X \sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$$

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$

実現値

$$z = \frac{64 - 50}{5} = 2.8$$

P–値

$$P = 2P(Z \geq 2.8) = 0.0052$$

$\alpha = 0.01$ より小さいので高度に有意

問題 8.1 ＊ 分散 10^2 の正規母集団から取り出された 8 個の標本が,

52 65 43 67 49 59 35 64

となった. この標本は正規母集団 $N(50,10^2)$ から取り出された無作為標本と言えるか検定せよ.

問題 8.2 本人の平均年齢は44.5歳, 標準偏差は 23.5 歳である(2010年). あるサークルのメンバー25名の平均年齢は34歳である. このサークルは日本人の無作為標本といえるだろうか, 仮説検定によって判定せよ.

問題 8.3 ある工程で作られる材料の重量(g)の規定値は 400 であるが, 規定値に達していない疑いがある. 製品の抜取検査を行い, 大きさ 16 の標本について標本平均 396, 不偏分散 6^2 を得た. この製品は規定どおりであるか検定せよ.

問題 8.4 ある商品の市場占有率は 34.5% であることが知られている. 商品のキャンペーンを行ったため, 占有率の上昇が期待できる状況にある. 消費者200人を無作為に選んで調査したところ, そのうち79人が商品を購入していた. はたして, キャンペーンの効果はあったのだろうか.

問題 8.5 定説では生まれてくる子供の男女比は 51:49 であるという. ある人口集団に対して調査した結果, 出生数が男 5383人, 女 5125人であった. この調査結果は定説を支持すると言えるだろうか?

問題 8.7＊ ある英語の資格試験の全国平均は 69 点であった. A塾から6名が受験した. 結果は

82　64　84　67　79　86

であり, その平均点 77 点が 69 点を大きく上回るとA塾は主張している. 受験生の得点分布は正規分布であると仮定して, A塾の主張を受け入れることはできるか.

Lecture 11

母平均の検定

【教科書】

第 8 章 検 定

8.2 母平均の検定（続き）

8.3 二種類の過誤

母平均の検定（復習）

母集団
母平均 m 母分散 σ^2

→ 無作為復元抽出 →

標本
$X_1, X_2, \ldots, X_n$

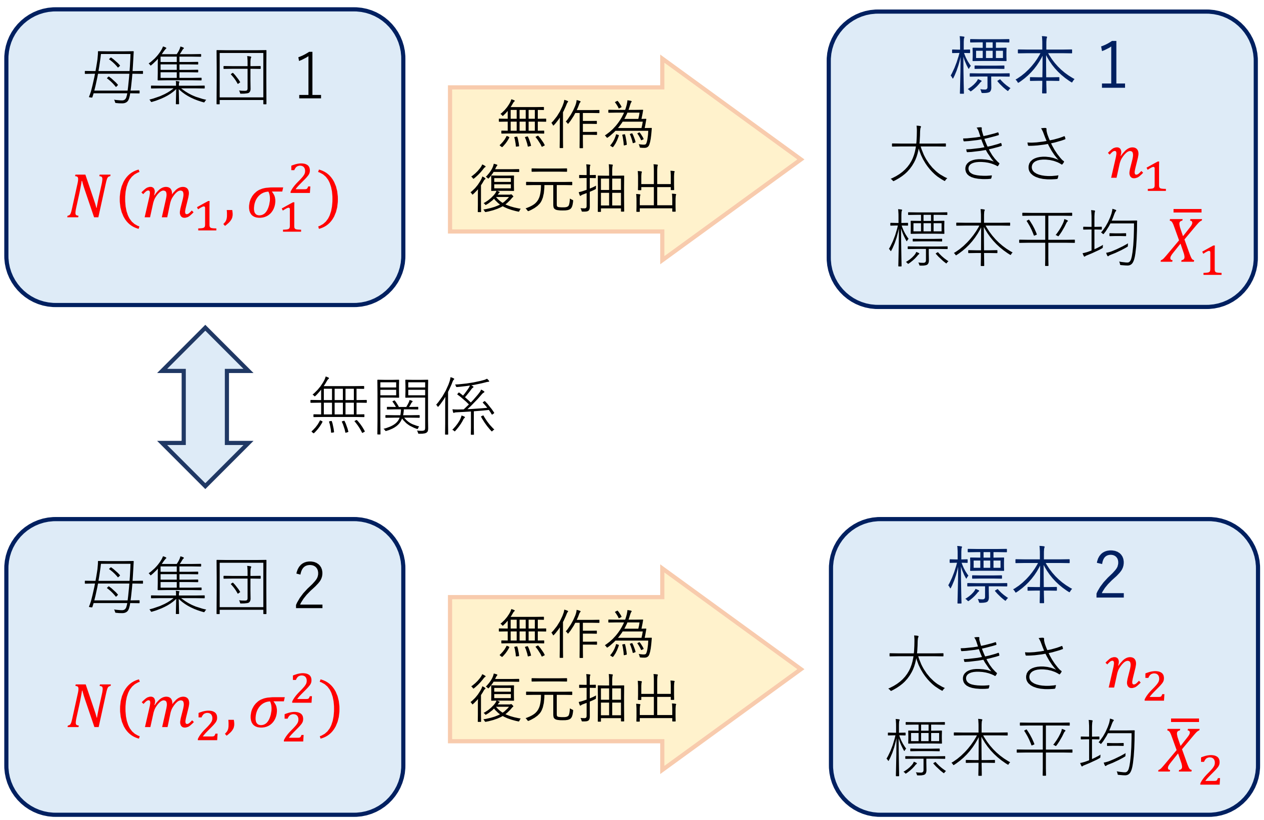
標本平均： $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

不偏分散： $U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

母集団	基本定理	使う確率分布	参照
正規母集団	$\frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	標準正規分布	定理 7.5
正規母集団	$\frac{\bar{X}-m}{U/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	自由度 $n-1$ の t-分布	定理 7.33
一般の母集団 n：大きい	$\frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 近似的に成立	標準正規分布	定理 6.8 中心極限定理

母平均の差の検定

※ 2つの母集団の母平均に差があるかを検定する



$$\bar{X}_1 \sim N\left(m_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{X}_2 \sim N\left(m_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

確率変数の和（復習）

- 一般の確率変数 $X,\ Y$ と定数 a, b に対して

  （1）[平均値の線形性] $E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$

  （2）分散は線形性をもたないが $V[aX]=a^2V[X]$

- 確率変数 $X,\ Y$ が独立ならば

  （3）[平均値の乗法性] $E[XY]=E[X]E[Y]$

  （4）[分散の加法性] $V[X+Y]=V[X]+V[Y]$

- 確率変数 $X \sim N(m_1, \sigma_1^2),\ Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ が独立ならば

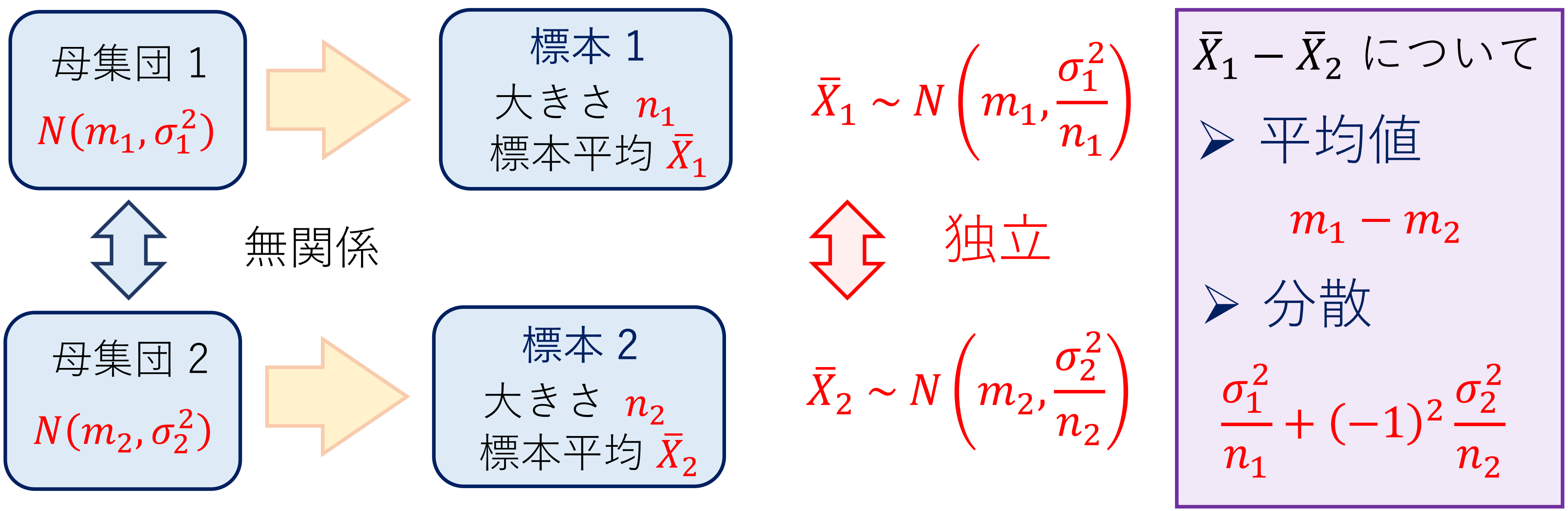
  （5）線形結合 $aX+bY$ も正規分布に従い，

$$aX+bY \sim N(am_1+bm_2, a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$$

定理　（標本平均の差の分布）

正規母集団 $N(m_1,\sigma_1^2)$ から取り出した n_1 個の無作為標本の標本平均を $\bar{X}_1$，別の正規母集団 $N(m_2,\sigma_2^2)$ から取り出した n_2 個の無作為標本の標本平均を $\bar{X}_2$ とするとき，

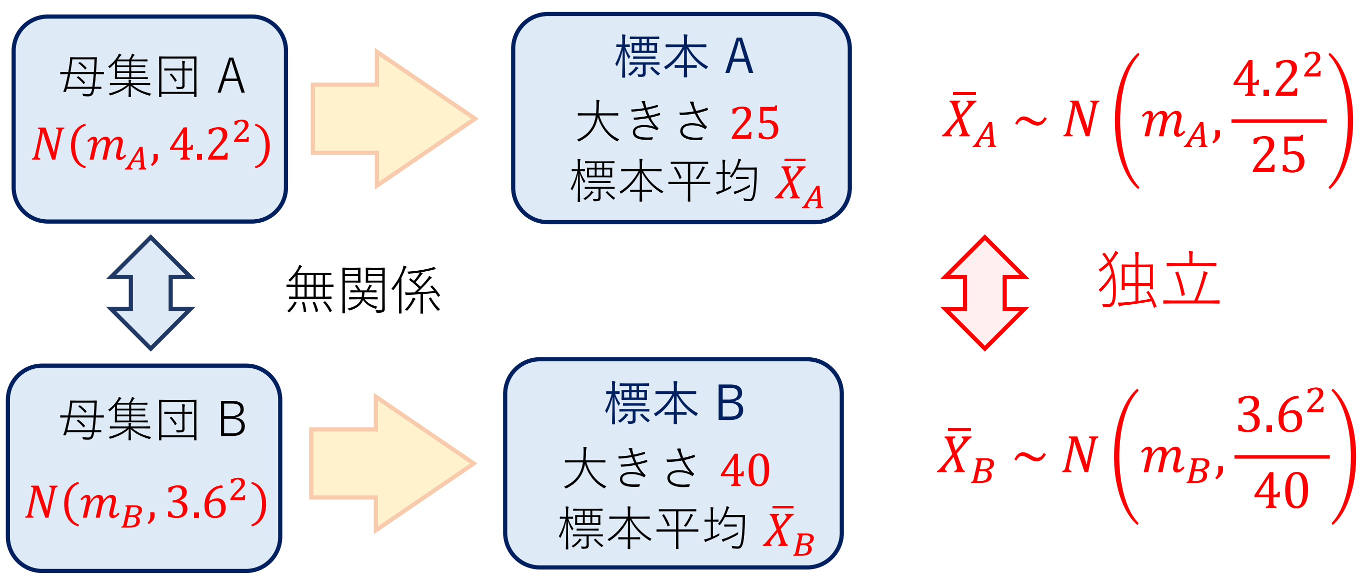
$$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \sim N\left(m_1-m_2\ ,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$



例題 8.7

A社製, B社製の電池の寿命(時間)に違いがあるかを調べたい．A社製の電池の寿命は標準偏差 4.2 の正規分布に従い，B社製のものは標準偏差 3.6 の正規分布に従うことがわかっている．抜取検査によって, A社製の電池 25 個の平均寿命は 86.2，B社製の電池 40 個の平均寿命は 88.4 であった.

A社製, B社製の電池の寿命の平均値をそれぞれ m_A, m_B とおく.



例題 8.7

A社製, B社製の電池の寿命(時間)に違いがあるかを調べたい．A社製の電池の寿命は標準偏差 4.2 の正規分布に従い，B社製のものは標準偏差 3.6 の正規分布に従うことがわかっている．抜取検査によって, A社製の電池 25 個の平均寿命は 86.2，B社製の電池 40 個の平均寿命は 88.4 であった.

A社製, B社製の電池の寿命の平均値をそれぞれ m_A, m_B とおく.

帰無仮説と対立仮説 $H_0\colon m_A = m_B \qquad H_1\colon m_A \neq m_B$

有意水準 $\alpha = 0.05$

検定統計量 $\bar{X}_A \sim N\left(m_A, \dfrac{4.2^2}{25}\right) \qquad \bar{X}_B \sim N\left(m_B, \dfrac{3.6^2}{40}\right)$

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N\left(m_A - m_B\ , \frac{4.2^2}{25} + \frac{3.6^2}{40}\right) = N(0, 1.015^2)$$

例題 8.7

A社製, B社製の電池の寿命(時間)に違いがあるかを調べたい．A社製の電池の寿命は標準偏差 4.2 の正規分布に従い，B社製のものは標準偏差 3.6 の正規分布に従うことがわかっている．抜取検査によって, A社製の電池 25 個の平均寿命は 86.2，B社製の電池 40 個の平均寿命は 88.4 であった.

帰無仮説と対立仮説　$H_0\colon m_A = m_B$　　$H_1\colon m_A \neq m_B$

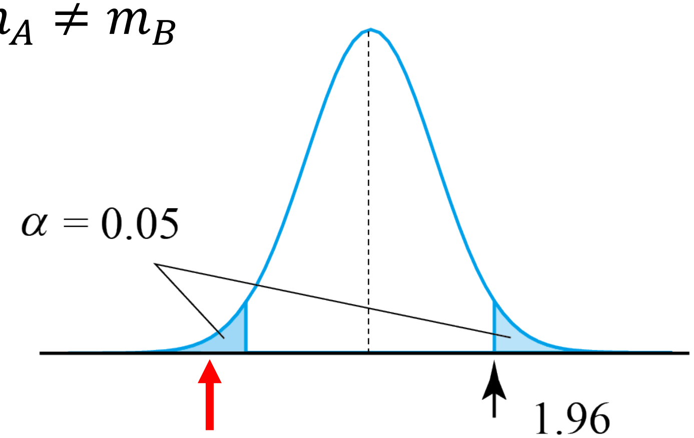
有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　$\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N(0, 1.015^2)$

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{1.015} \sim N(0,1)$$

実現値

$$z = \frac{86.2 - 88.4}{1.015} = -2.17$$



結論

有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定によって H_0 は棄却される

2 種類の過誤

帰無仮説 H_0 をめぐって

採否\真偽	H_0 は真	H_0 は偽
H_0 を採択		
H_0 を棄却		

2 種類の過誤

帰無仮説 H_0 をめぐって

採否\真偽	H_0 は真	H_0 は偽
H_0 を採択	○	
H_0 を棄却		○

2 種類の過誤

帰無仮説 H_0 をめぐって

採否\真偽	H_0 は真	H_0 は偽
H_0 を採択	○	第 2 種の誤り β
H_0 を棄却	第 1 種の誤り α	○

第1種の誤り＝ 生産者危険 ＝ あわて者の間違い

第2種の誤り＝ 消費者危険 ＝ ぼんやり者の間違い

第1種の誤り確率 ＝ 有意水準 α

第 2 種誤り確率 β は一般には不明

例　コインを100回投げて表が58回出た. コインは公平といえるか?

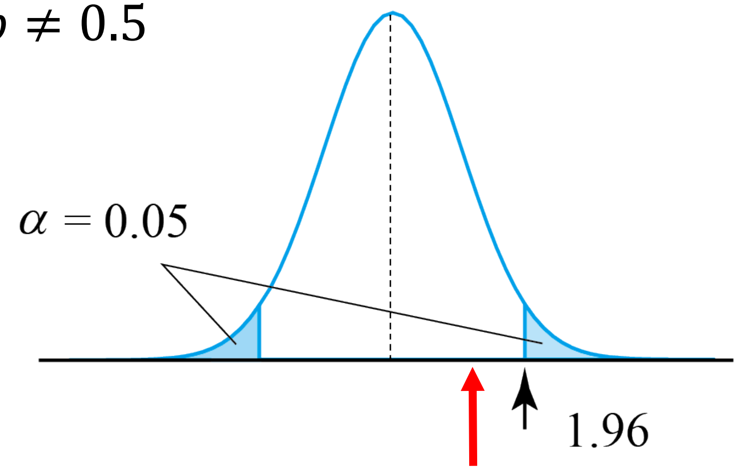
帰無仮説と対立仮説　H_0: $p = 0.5$　H_1: $p \neq 0.5$

有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　H_0 の下, 表に回数 X

$$X \sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$$

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$



実現値　$z = \dfrac{58 - 50}{5} = 1.6$

結論

有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定によって
H_0 は棄却されない＝採択される

この採択の結論を誤る確率
＝第 2 種誤り確率 β

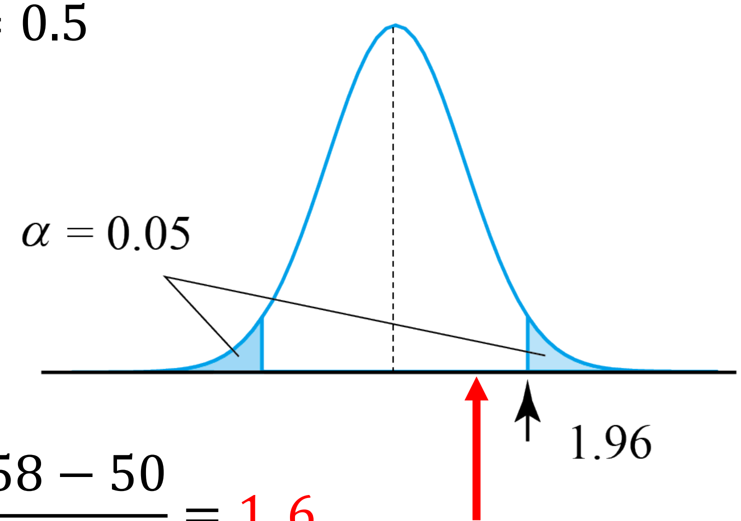
例　コインを100回投げて表が58回出た. コインは公平といえるか?

帰無仮説と対立仮説　$H_0\colon p = 0.5 \quad H_1\colon p \neq 0.5$

有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　$X \sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$



実現値　$z = \dfrac{58 - 50}{5} = 1.6$

結論

有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定によって
H_0 は棄却されない＝採択される

この採択の結論を誤る確率
＝第 2 種誤り確率 β

β の評価は困難

「$H_0\colon p = 0.5$」でないとすると, 可能な p は
無限にあって特定できないから

例　コインを100回投げて表が58回出た. コインは公平といえるか?

$H_0 : p = 0.5$ の下で表の回数 X

$$X \sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$$

有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定

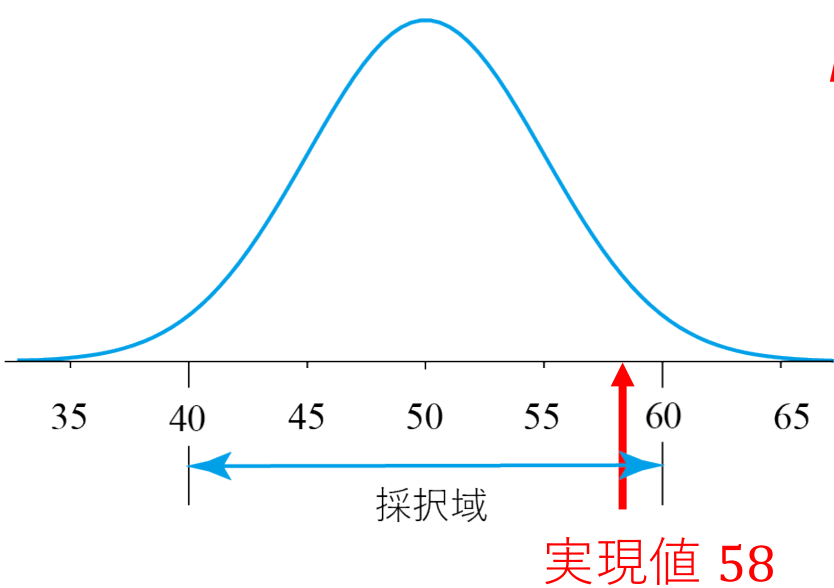
採択域 $50 \pm 1.96 \times 5 \approx 50 \pm 10$

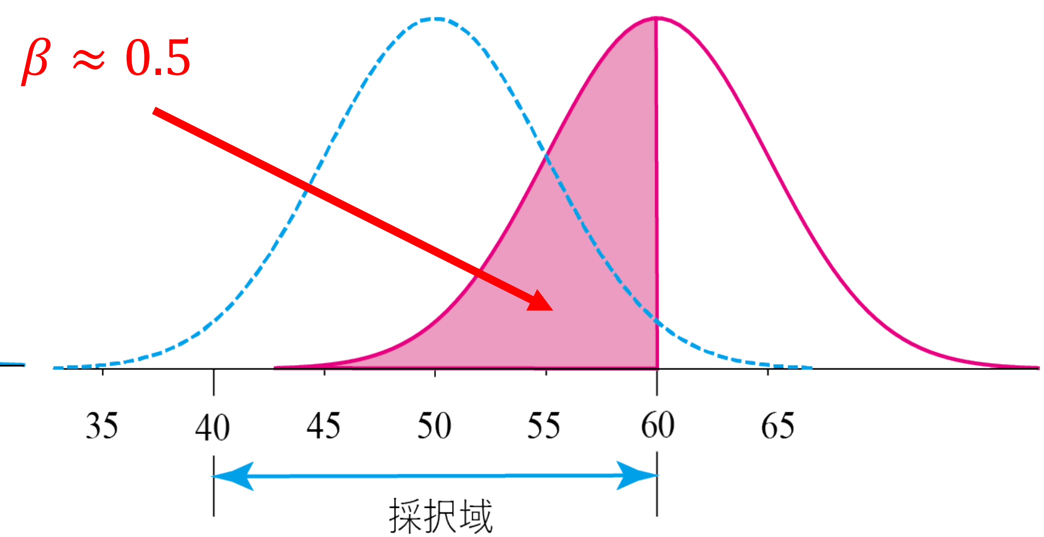
「H_0: $p = 0.5$」でないとすると, 可能な p は無限にあって特定できない

仮に $p = 0.6$ としてみる

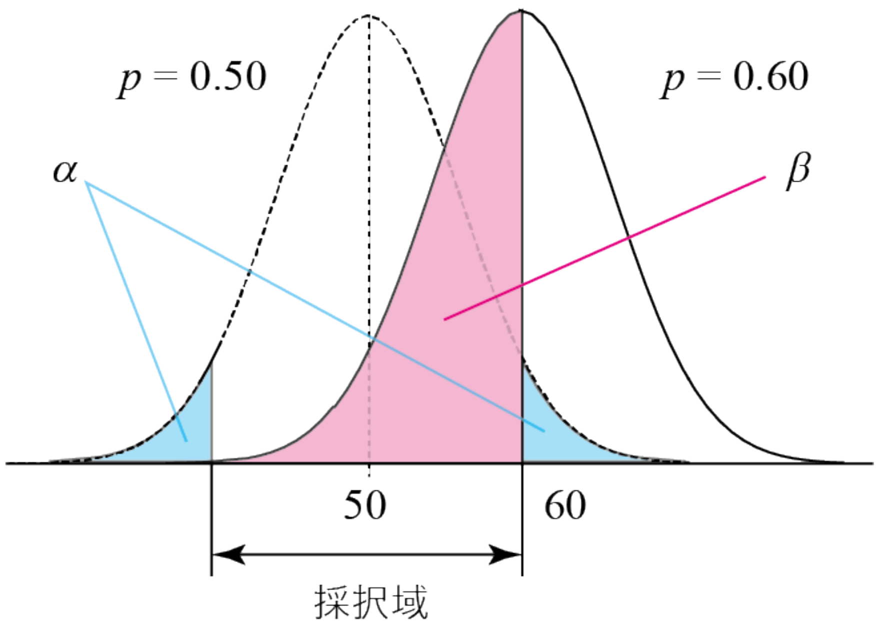
$p = 0.6$ の下で表の回数 Y

$$Y \sim B(100,0.6) \approx N(60, 4.9^2)$$





α と β はトレードオフの関係



(1) α 小 ⇔ 採択域が大 ⇔ β 大

(2) α, β ともに小さくするためには，
標本数 n を大きくする.

(3)「H_0 を採択」という判断を誤る場合，真の母数が H_0 で仮定した母数に近いほど β は大きい

- 「H_0 を採択する」は消極的な採択.
  はっきり否定するだけの状況ではないという意味.
  そこで「H_0 を棄却できない」ということが多い.

問題 8.6＊ A組36名, B組40名に同じ試験をしたところ,

A 組の平均点は $\bar{x}_A = 64.5$,

B 組の平均点は $\bar{x}_B = 61.2$

であった. A組はB組よりも成績がよいといえるか. ただし, 成績は両組とも母分散 11^2 の正規分布に従うものとする.

問題 8.9＊ 公平なコインAと表が出る確率が 60% のイカサマコインBの区別ができなくなってしまったため, 試しに一方を150回振って表の回数を調べて判断することにした. 帰無仮説 $H_0 : p = 0.5$ を対立仮説 $H_1 : p = 0.6$ に対して有意水準 5% で検定するときの第2種誤り確率を求めよ.

Lecture 12

カイ2乗検定

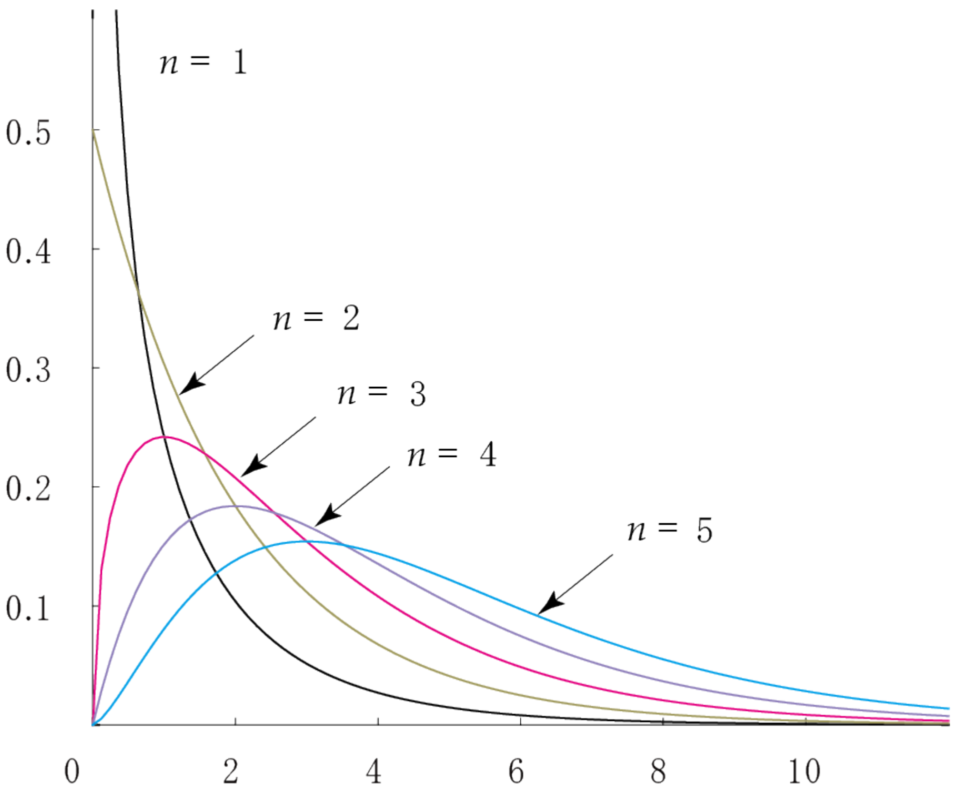
【教科書】

第 8 章 検 定

8.5 カイ2乗検定

χ^2-分布

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad (x \geq 0)$$



定理

$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ が独立同分布な確率変数で，標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

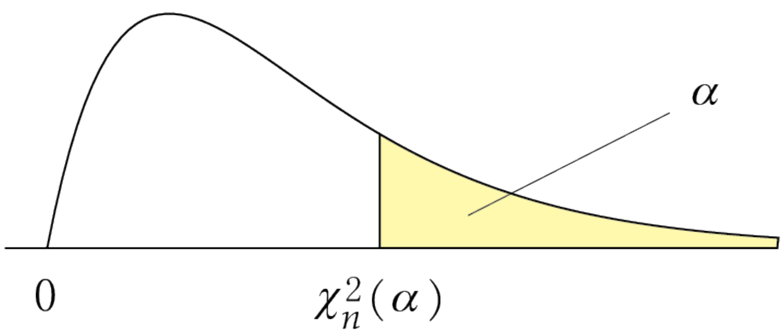
は自由度 n の χ^2-分布に従う

自由度 n の χ_n^2 -分布の

平均値　$m = n$

分散　$\sigma^2 = 2n$

上側 α 点



χ^2-値が大きい

⇔ 想定からのずれが大きい

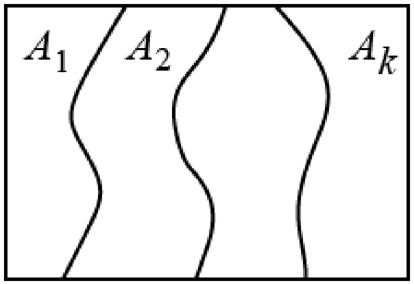
⇔ 有意差が認められる

$n \backslash \alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$\chi_5^2(0.05) = 11.070$$

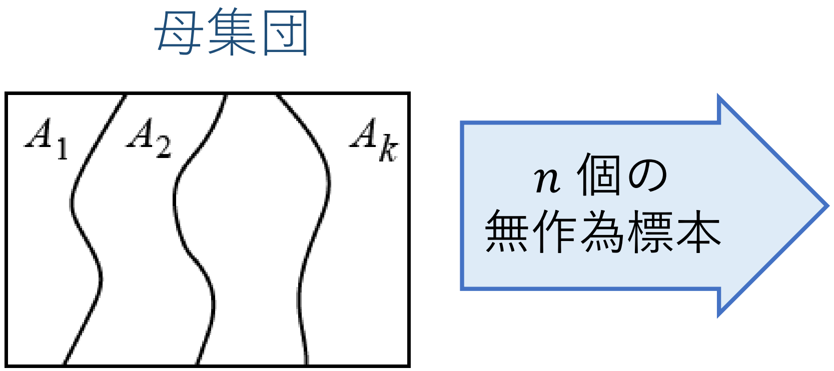
分布の適合度検定

母集団



属性	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	合計
観測度数	X_1	X_2	$\cdots$	X_k	n

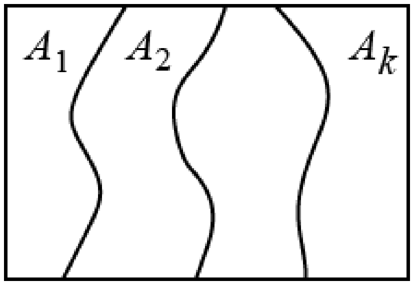
分布の適合度検定



属性	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	合計
観測度数	X_1	X_2	$\cdots$	X_k	n
理論分布	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1

分布の適合度検定

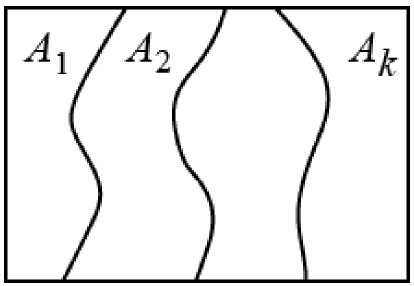
母集団



属性	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	合計
観測度数	X_1	X_2	$\cdots$	X_k	n
理論分布	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1
理論度数	np_1	np_2	$\cdots$	np_k	n

分布の適合度検定

母集団



n 個の
無作為標本

属性	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	合計
観測度数	X_1	X_2	$\cdots$	X_k	n
理論分布	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1
理論度数	np_1	np_2	$\cdots$	np_k	n

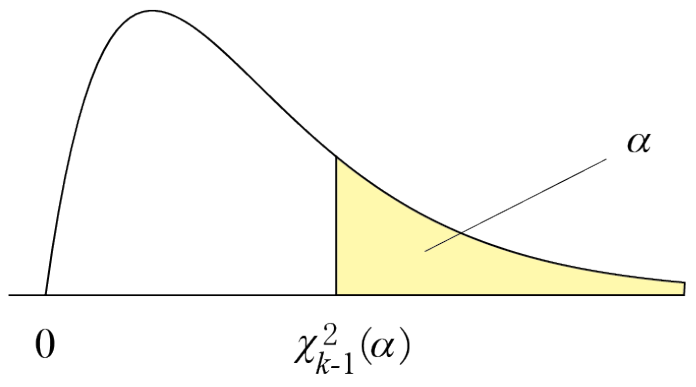
問題　観測度数をもとに, 理論分布が妥当かどうかを検定する.

例としてサイコロ振り

目	1	2	3	4	5	6	合計
度数 X_i	24	18	16	22	23	17	120
理論度数 m_i	20	20	20	20	20	20	120

χ^2-検定

属性	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	合計
観測度数	X_1	X_2	$\cdots$	X_k	n
理論分布	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1
理論予想	m_1	m_2	$\cdots$	m_k	n



定理

ピアソンの χ^2-値

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - m_i)^2}{m_i}$$

は, m_i が大きいとき(実用上, $m_i \geq 5$), 自由度 $k-1$ の χ^2-分布に近似的に従う.

検定の手順

1. データから χ^2-値を計算
2. 自由度 $k-1$ の χ^2_{k-1}-分布と比較
3. 上側 α 点を超えれば, 有意差を認める

例 8.20

サイコロを120回投げて出た目を記録した. このサイコロは公平と言えるだろうか?

目	1	2	3	4	5	6	合計
回数 X_i	24	18	16	22	23	17	120
理論予想 m_i	20	20	20	20	20	20	120

$$\chi^2 = \sum \frac{(X_i - m_i)^2}{m_i} = 2.9$$

自由度 $6 - 1 = 5$ の χ_5^2 -分布を用いる

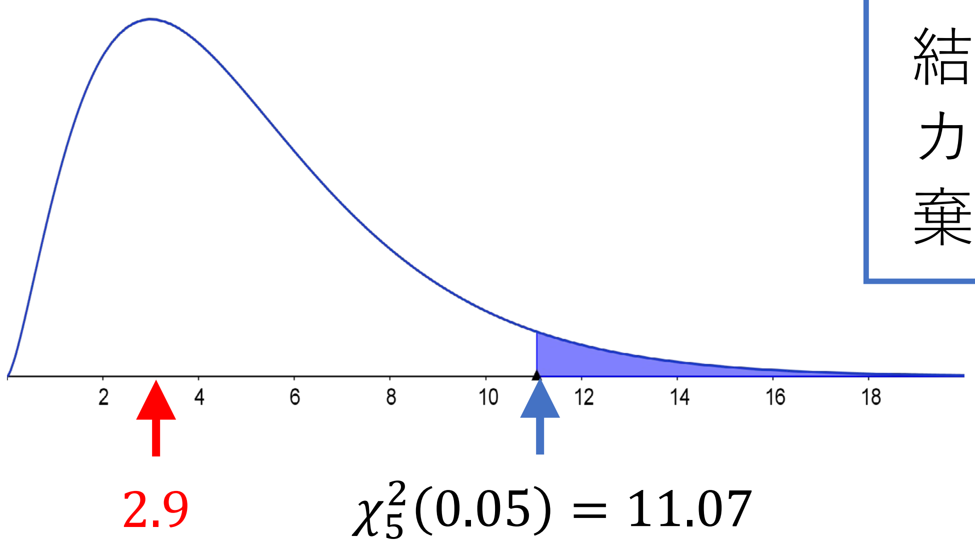
例 8.20

H_0 ：サイコロは公平である　H_1 ：サイコロは不公平である

$\alpha = 0.05$ （有意水準 5%）

実現値 $\chi^2 = 2.9$

χ^2-値は自由度 5 のχ^2_5-分布に従う



結論：有意水準 $\alpha = 0.05$ のカイ2乗検定によって, H_0 は棄却できない（採択）

ちなみに, $P = 0.7154$

例 8.22　（サッカーのゴール数）

1試合1チーム当たりのゴール数を調べた.

ゴール数	0	1	2	3	4	5	6	7	合計
試合数	132	227	154	66	23	6	4	0	612
割合	0.22	0.37	0.25	0.11	0.04	0.01	0.01	0.00	1.00

2013 年Jリーグ・ディビジョン１・第34 節 18 チーム総当たり全306試合

平均値 = 1.436

分散 = 1.367

⇒ ポアソン分布？

パラメータ $\lambda = 1.436$ のポアソン分布と比較

$$P(X = k) = \frac{1.436^k}{k!} e^{-1.436} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

ゴール数	0	1	2	3	4	5	6	7	合計
試合数	132	227	154	66	23	6	4	0	612
割合	0.22	0.37	0.25	0.11	0.04	0.01	0.01	0.00	1.00
ポアソン									

パラメータ $\lambda = 1.436$ のポアソン分布と比較

$$P(X = k) = \frac{1.436^k}{k!} e^{-1.436} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

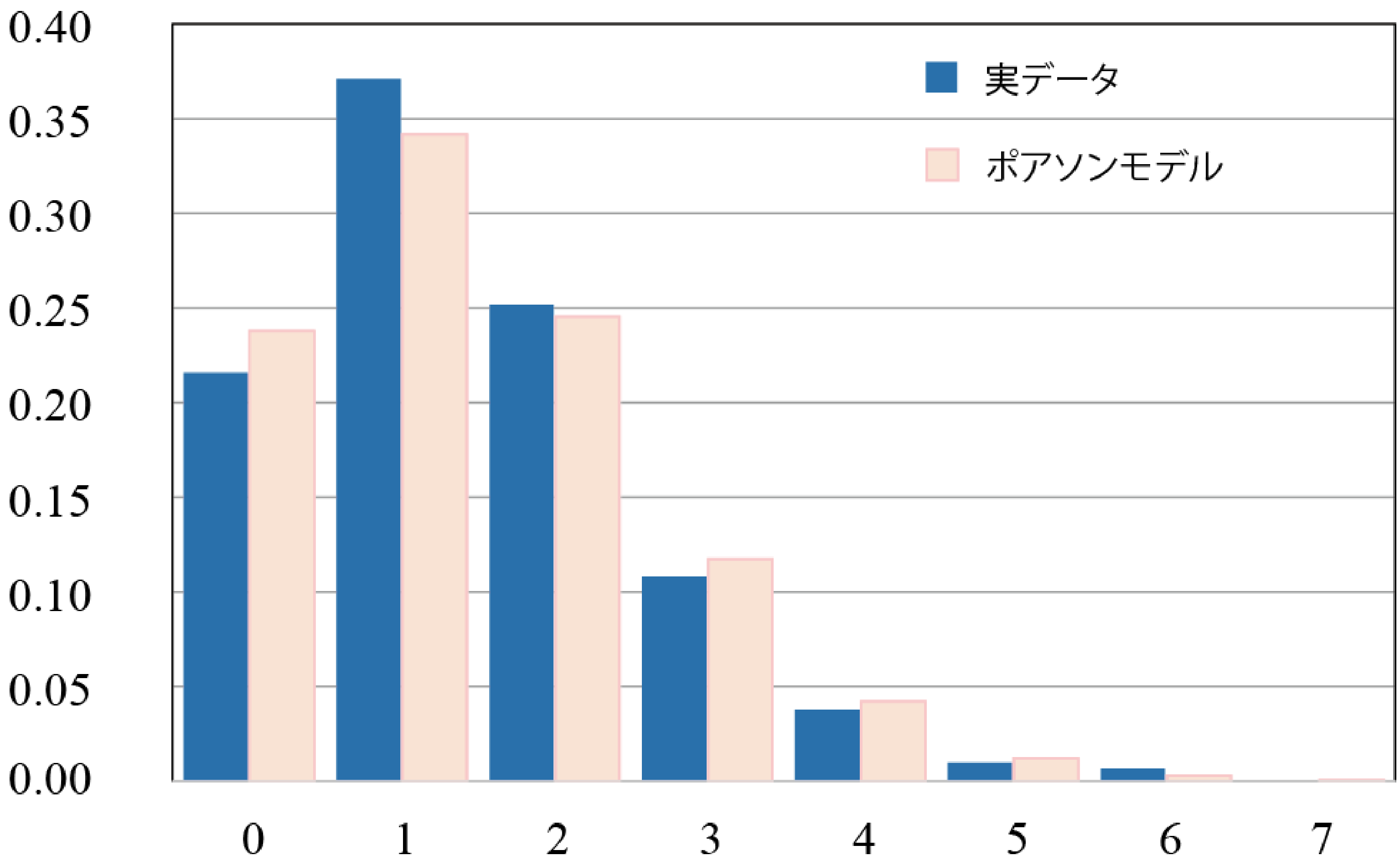
ゴール数	0	1	2	3	4	5	6	7	合計
試合数	132	227	154	66	23	6	4	0	612
割合	0.22	0.37	0.25	0.11	0.04	0.01	0.01	0.00	1.00
ポアソン	0.2378	0.3416	0.2453	0.1174	0.0422	0.0121	0.0029	0.0006	0.9999

パラメータ $\lambda = 1.436$ のポアソン分布と比較

$$P(X = k) = \frac{1.436^k}{k!} e^{-1.436} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

ゴール数	0	1	2	3	4	5	6	7	合計
試合数	132	227	154	66	23	6	4	0	612
割合	0.22	0.37	0.25	0.11	0.04	0.01	0.01	0.00	1.00
ポアソン	0.2378	0.3416	0.2453	0.1174	0.0422	0.0121	0.0029	0.0006	0.9999
理論度数	145.54	209.04	150.12	71.87	25.81	7.41	1.77	0.36	611.92

2013年 Ｊリーグディビジョン１ 第34節 得点分布（全306試合）



χ^2- 検定

ゴール数	0	1	2	3	4	5	6	7	合計
試合数	132	227	154	66	23	6	4	0	612
理論度数	145.54	209.04	150.12	71.87	25.81	7.41	1.77	0.36	611.92

理論度数 ≥ 5 となるように度数分布表を調整する

ゴール数	0	1	2	3	4	5以上	合計
試合数 X_i	132	227	154	66	23	10	612
理論度数 m_i	145.54	209.04	150.12	71.87	25.81	9.55	611.92

$$\chi^2 = \sum \frac{(X_i - m_i)^2}{m_i} = 3.71$$

χ^2- 検定

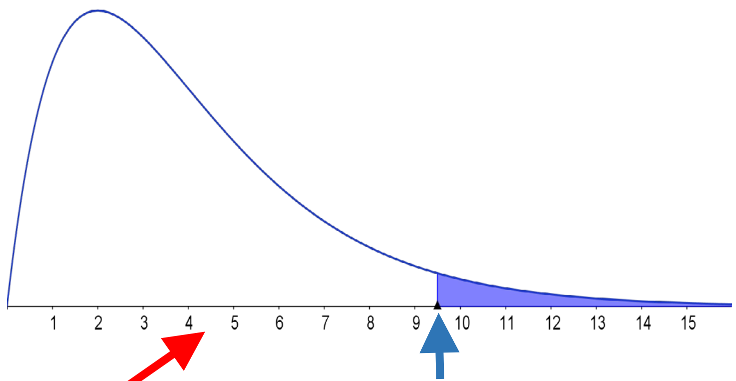
ゴール数	0	1	2	3	4	5以上	合計
試合数 X_i	132	227	154	66	23	10	612
理論度数 m_i	145.54	209.04	150.12	71.87	25.81	9.55	611.92

H_0 : ポアソン分布に従う

H_1 : ポアソン分布に従わない

有意水準 $\alpha = 0.05$

※ ポアソン分布の特殊性から，
自由度 $6 - 1 - 1 = 4$ の
カイ2乗分布 χ_4^2 -分布を用いる



$\chi_4^2(0.05) = 9.488$

実現値

$$\chi^2 = \sum \frac{(X_i - m_i)^2}{m_i} = 3.71$$

結論：有意水準 $\alpha = 0.05$ の
カイ2乗検定によって, H_0 は
棄却されない.

ちなみに, $P = 0.4467$

例　野球のホームラン数

1試合当たりのホームラン数（両チーム合わせて）

(2016年プロ野球公式戦 楽天戦 全143試合)

HR数	0	1	2	3	4	5	6	7	合計
試合数	40	42	36	14	6	3	2	0	143
割合	0.280	0.294	0.252	0.098	0.042	0.021	0.014	0.000	1.000

平均値 = 1.448　分散 = 1.786

ポアソン分布による理論予測

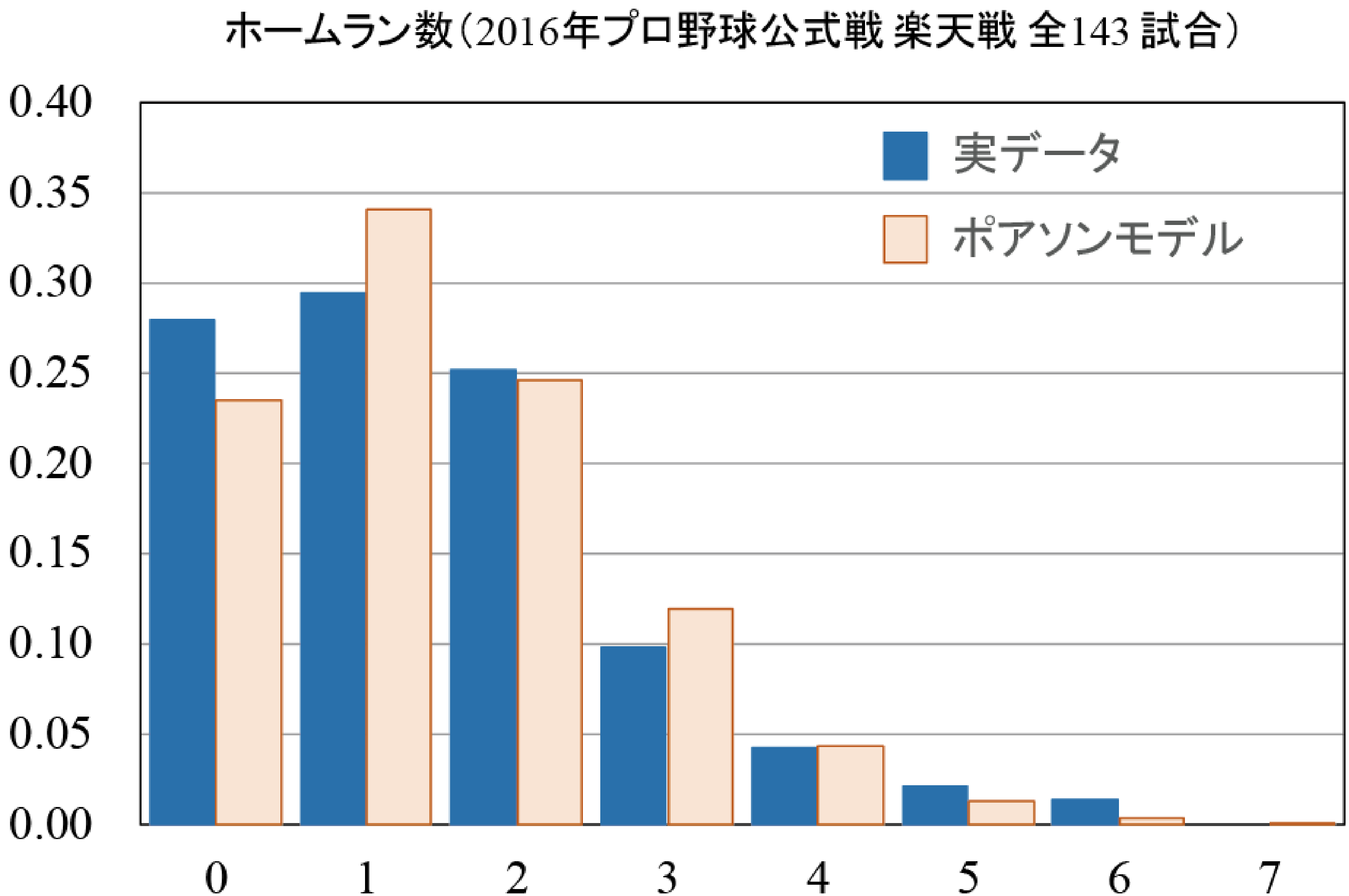
パラメータ ＝ 1.448 のポアソン分布　$P(X=k)=\frac{1.448^k}{k!}e^{-1.448}$

HR数	0	1	2	3	4	5	6	7	合計
試合数	40	42	36	14	6	3	2	0	143
割合	0.280	0.294	0.252	0.098	0.042	0.021	0.014	0.000	1.000
ポアソン									
理論度数									

ポアソン分布による理論予測

パラメータ ＝ 1.448 のポアソン分布　　$P(X = k) = \frac{1.448^k}{k!} e^{-1.448}$

HR数	0	1	2	3	4	5	6	7	合計
試合数	40	42	36	14	6	3	2	0	143
割合	0.280	0.294	0.252	0.098	0.042	0.021	0.014	0.000	1.000
ポアソン	0.235	0.340	0.246	0.119	0.043	0.012	0.003	0.001	1.000
理論度数	33.61	48.67	35.24	17.01	6.16	1.78	0.43	0.09	142.98


ホームラン数（2016年プロ野球公式戦 楽天戦 全143 試合）
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
実データ
ポアソンモデル
0
1
2
3
4
5
6
7

χ^2- 検定

HR数	0	1	2	3	4以上	合計
試合数	40	42	36	14	11	143
理論度数	33.61	48.67	35.24	17.01	8.36	142.98

H_0 : ポアソン分布に従う

H_1 : ポアソン分布に従わない

有意水準 $\alpha = 0.05$

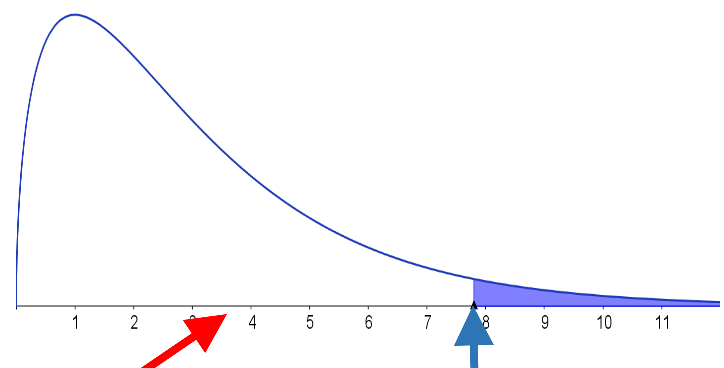
※ ポアソン分布の特殊性によって,

自由度 $5 - 1 - 1 = 3$ の

カイ2乗分布 χ_3^2 -分布を用いる

実現値

$$\chi^2 = \sum \frac{(X_i - m_i)^2}{m_i} = 3.50$$



$\chi_3^2(0.05) = 7.815$

結論：有意水準 $\alpha = 0.05$ の
カイ2乗検定によって, H_0 は
棄却されない.

ちなみに, $P = 0.3208$

独立性の検定

2種類の属性 A, B に関するデータ ⇨ A, B の関連性（独立性）を問う

生まれ月 →

血液型 ↓

	B_1	B_2	$\cdots$	B_s	合計
A_1	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1s}	$X_{1\cdot}$
A_2	X_{21}	X_{22}	$\cdots$	X_{2s}	$X_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_r	X_{r1}	X_{r2}	$\cdots$	X_{rs}	$X_{r\cdot}$
合計	$X_{\cdot 1}$	$X_{\cdot 2}$	$\cdots$	$X_{\cdot s}$	n

定義　確率変数 A, B が独立

$$P(A = a, B = b)$$
$$= P(A = a)P(B = b)$$

2つの属性 A, B が独立

⇕

$$\frac{X_{ij}}{n} = \frac{X_{i\cdot}}{n}\frac{X_{\cdot j}}{n}$$

ピアソンの χ^2- 値

	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_s	合計
A_1	X_{11}	$\cdots$	X_{1j}	$\cdots$	X_{1s}	$X_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_i	X_{i1}	$\cdots$	X_{ij}	$\cdots$	X_{is}	$X_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_r	X_{r1}	$\cdots$	X_{rj}	$\cdots$	X_{rs}	$X_{r\cdot}$
合計	$X_{\cdot 1}$	$\cdots$	$X_{\cdot j}$	$\cdots$	$X_{\cdot s}$	n

独立を仮定したとき，

$$P(A_i \cap B_j) = p_{ij} = \frac{X_{i\cdot}}{n}\frac{X_{\cdot j}}{n}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{X_{ij}}{n} - p_{ij} = \frac{X_{ij}}{n} - \frac{X_{i\cdot}}{n}\frac{X_{\cdot j}}{n}$$

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\varepsilon_{ij}^2}{p_{ij}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(nX_{ij} - X_{i\cdot}X_{\cdot j}\right)^2}{X_{i\cdot}X_{\cdot j}}$$

これが自由度 $(r-1)(s-1)$ のχ^2-分布に従う．

例 8.23（予防接種の有効性）

実測データ

	発病有	発病無	合計
予防接種有	22	102	124
予防接種無	29	47	76
合計	51	149	200

相対度数で表示

	発病有	発病無	合計
予防接種有	0.11	0.51	0.62
予防接種無	0.145	0.235	0.38
合計	0.255	0.745	1

実測データ

	発病有	発病無	合計
予防接種有	0.11	0.51	0.62
予防接種無	0.145	0.235	0.38
合計	0.255	0.745	1

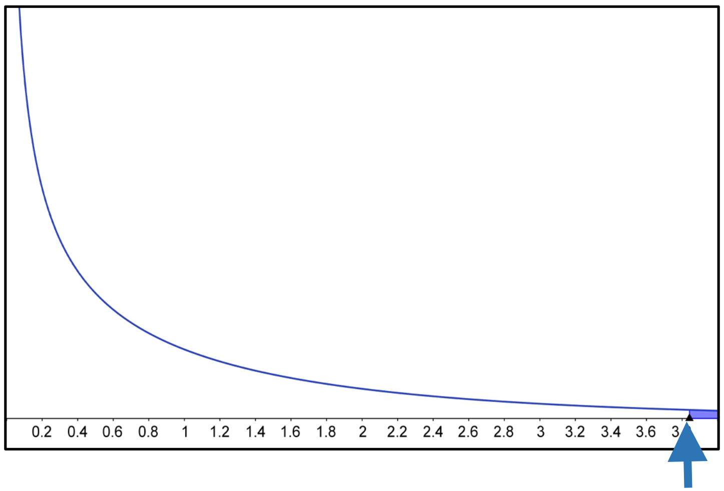
独立性を仮定した理論値 p_{ij}

	発病有	発病無	合計
予防接種有	0.1581	0.4619	0.62
予防接種無	0.0969	0.2831	0.38
合計	0.255	0.745	1

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\varepsilon_{ij}^2}{p_{ij}}$$

$$= 200\left\{\frac{(0.11-0.1581)^2}{0.1581}+\cdots\right\}$$

$$= 10.338$$



$\chi_1^2(0.05) = 3.841$

$\chi_1^2(0.01) = 6.635$

結論：有意水準 $\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ の
カイ2乗検定によって, H_0 は棄却される.

問題 8.10 次の表は, 5枚のコインを同時に投げる試行を250回行ったときの結果をまとめたものである．この結果から, コインの出方に偏りがあると言えるだろうか，二項分布と比較して判定せよ.

表：裏	0:5	1:4	2:3	3:2	4:1	5:0	合 計
度 数	6	25	71	89	46	13	250

問題 8.11 ある映画の客層に男女の違いはあるかを調べるために, 無作為に選んだ100名を調べたところ, 男性44人, 女性56人であった. (1) 二項母集団の母比率の検定 (2) 適合度検定, の2つの方法で検定せよ.

問題 8.12 無作為に選ばれる250人を対象として, ある事案の支持率調査を行っている．先月の支持率は 39.6 % であった．その後, キャンペーンを行い, 今月の支持率は 44.4 % となった．キャンペーンの効果はあっただろうか．調査対象が1000人ならどうか.