

数学概論 D ・ 期末試験問題 (2019.07.29)

- 教科書・参考書・ノート等の持ち込み不可
- 電卓は使用可
- 通信機能のついている時計・計算機等は使用禁止（カバンにしまう）
- 問題 [1]–[7] は答だけを記せ.
- 問題 [8]–[10] は解答に至るプロセスも記せ. なお, 解答欄が不足すれば裏面を用いよ.

[1] 次の問に答えよ.

- (1) 52 枚のトランプから 4 枚のカードを抜き取ったとき, スペードとハートのカードがちょうど 1 枚ずつ含まれている確率を求めよ.
- (2) 半径 $6R$ の円板から 1 点をランダムに選ぶとき, その点と円板の中心との距離を X とする. 条件付確率 $P(X > 2R | X \leq 3R)$ を求めよ.

[2] 確率変数 X が $[2, 7]$ 上の一様分布に従うものとする.

- (1) $P(3 \leq X \leq 6)$ を求めよ.
- (2) X の平均値 $E(X)$ を求めよ.

[3] 確率変数 X, Y は独立で, それらの平均値と分散は

$$E(X) = \mu, \quad E(Y) = 3\mu, \quad V(X) = \sigma^2, \quad V(Y) = 2\sigma^2,$$

で与えられている.

- (1) $E(X - Y)$ を求めよ.
- (2) $V(X - Y)$ を求めよ.

[4] 必要なら付録の数表を用いて, 次の問に答えよ.

- (1) $X \sim N(5, 3^2)$ のとき, $P(X \geq 3.47)$ を求めよ.
- (2) $Y \sim t_8$ のとき, $P(Y \leq a) = 0.01$ を満たす a を求めよ.

[5] ある地区の住民 1 万人から 250 名を無作為に抽出して調べたところ, 候補者 A の支持率は 32 %であった.

- (1) この地区の支持率の 90% 信頼区間を求めよ.
- (2) この地区の人口が 10 万人であれば, 90% 信頼区間はどのように変化するか.

[6] ある製品に対して抜き取り検査を行い, 6 個の無作為標本について,

12.6 14.2 11.4 13.3 12.2 12.8

を得た. (1) 平均値 と (2) 不偏分散を求めよ.

[7] 正規母集団から 9 個の無作為標本を取り出して調べたところ, 標本平均 $\bar{x} = 12.3$ が得られた.

(1) 母分散 $\sigma^2 = 2.6^2$ が既知であるとき, 母平均の 95% 信頼区間を求めよ.

(2) 母分散 σ^2 が未知であり, 標本から求めた不偏分散が $u^2 = 2.8^2$ であるとき, 母平均の 95% 信頼区間を求めよ.

[8] 2つの壺 U_1, U_2 があって, U_1 には赤玉 5 個, 白玉 3 個, 黒玉 2 個, U_2 には赤玉 3 個, 白玉 2 個, 黒玉 5 個が入っている. いま, U_1 から 1 個の玉を取り出して U_2 に入れ, U_2 から 1 個の玉を取り出したところ黒玉であった. はじめに U_1 から取り出した玉が黒玉である確率を求めよ.

[9] 確率変数 X, Y は独立で, それらの平均値と分散は

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = \mu, \quad \mathbf{V}(X) = \sigma^2, \quad \mathbf{V}(Y) = 2\sigma^2,$$

とする. ただし, $\sigma^2 \neq 0$ である. さらに, a, b, c を 0 でない定数として,

$$S = aX + bY, \quad T = bX + cY$$

とおく. このとき, $\mathbf{E}(ST) = \mathbf{E}(S)\mathbf{E}(T)$ が成り立つための a, b, c の条件を求めよ.

[10] 母分散 $\sigma^2 = 15$ の正規分布に従うといわれる母集団から, 標本数 25 の無作為標本を抽出し, 標本平均 $\bar{x} = 58.15$ を得た. 母平均を $\mu = 60$ とみなしてよいか? 仮説検定を用いて判定せよ.

[1] (1) $\frac{169}{833} = 0.203$	(2) $\frac{5}{9} = 0.556$	[2] (1) $\frac{3}{5}$	(2) $\frac{9}{2}$
[3] (1) -2μ	(2) $3\sigma^2$	[4] (1) 0.695	(2) -2.896
[5] (1) 0.32 ± 0.048	(2) 変わらない	[6] (1) 12.75	(2) 0.911
[7] (1) 12.3 ± 1.70	(2) 12.3 ± 2.15		

[8] π_1 から取り出した王の「色」である事象を A_1
 白 " A_2
 黒 " A_3
 π_2 から取り出した王の「色」である事象を B
 とする。求めるのは $P(A_3|B)$

ベイズの公式を用いて

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)}$$

$$= \frac{\frac{6}{11} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{5}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{10}}$$

$$= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

[9] まず $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$
 $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 2\sigma^2 + \mu^2$
 $E(XY) = E(X)E(Y) = \mu^2$ 注意して、
 $E(ST) = (ab + b^2 + ac + bc)\mu^2 + (ab + 2bc)\sigma^2$
 $E(S)E(T) = (a+b)(b+c)\mu^2$
 かつ $E(ST) = E(S)E(T)$ は
 $(ab + 2bc)\sigma^2 = 0$ と同値 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 \neq 0, b \neq 0$
 であるから、求める
 条件は
 $a + 2c = 0$

[10] $H_0: \mu = 60$
 $H_1: \mu \neq 60$
 $\alpha = 0.05$ とする

母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から取り出した
 n 個の標本平均 $\bar{X}$ の分布は
 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

[これは一般論]

今の場合, $\mu = 60, \sigma^2 = 15, n = 25$ とき
 $\bar{X} \sim N(60, 0.775^2)$
 よって $Z = \frac{\bar{X} - 60}{0.775} \sim N(0, 1)$

H_1 の形から両側検定であり
 棄却域は $|Z| > 1.96$ とする
 実現値 $Z = \frac{58.15 - 60}{0.775} = -2.387$
 は棄却域に落ちて、 H_0 は棄却する