

## 数理統計学・中間試験問題 (2019.06.04)

- 教科書・参考書・ノート等の持ち込み不可
- 電卓は使用可
- 通信機能のついている時計・計算機等は使用禁止 (カバンにしまう)
- 問題 [1]–[6] は答だけを記せ.
- 問題 [7]–[10] は解答欄が不足すれば裏面を用いよ.

[1] 10 本のうち, 3 本が当たりであるクジがあり, A, B の 2 人が 1 本ずつクジを引くものとする.

- (1) A が引いたクジをもとに戻し, よくかきまぜて次に B が引くとき (復元抽出), 2 人とも当たりである確率はいくらか.
- (2) A が引いたクジをもとに戻さず, 次に B が引くとき (非復元抽出), 2 人ともはずれである確率はいくらか.

[2] 半径  $R$  の円板から 1 点をランダムに選ぶとき, その点と円板の中心との距離を  $X$  とする. 次の確率を求めよ.

$$(1) P\left(X \leq \frac{R}{2}\right) \quad (2) P\left(X > \frac{R}{3} \mid X \leq \frac{R}{2}\right)$$

[3] ある国では, 病気 A の感染者が 4% あるという. 検査 B は, 感染者の 90% に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう.

- (1) この検査を受けて陽性反応が出た人が感染者である確率を求めよ.
- (2) この検査を受けて陰性反応が出た人が非感染者である確率を求めよ.

[4] 標準正規分布表を用いて, 次の問いに答えよ.

- (1)  $X \sim N(4, 3^2)$  のとき,  $P(X \geq 2.47)$  を求めよ.
- (2)  $Y$  が  $N(50, 10^2)$  に従う確率変数のとき,  $P(Y \leq a) = 0.33$  を満たす  $a$  を求めよ.

[5] 確率変数  $X$  が  $[1, 4]$  上の一様分布に従うものとする.

- (1)  $X$  の平均値  $E(X)$  を求めよ.
- (2)  $X$  の分散  $V(E)$  を求めよ.

[6] 2 個のサイコロを振って出た目の差を調べて, 次のようなデータを得た. (1) 平均値 と (2) 標準偏差を求めよ. 分数または四捨五入によって小数第 2 位まで求めよ.

差	0	1	2	3	4	5
度数	12	30	24	15	12	3

[7] 2つの事象  $A, B$  が独立であるとき,

$$P(A|B^c) = P(A)$$

が成り立つことを条件付確率の定義に基づいて証明せよ. ただし,  $B^c$  は  $B$  の余事象である.

[8] 「確率変数  $X$  が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従う」つまり「確率変数  $X$  の分布が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  になる」とは何を意味しているか? 知るところを述べよ.

[9] 母平均  $\mu$ , 母分散  $\sigma^2$  の母集団から取り出された  $n$  個の無作為標本を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする. 標本平均について大数の法則を述べよ.

[10] 母平均  $\mu$ , 母分散  $\sigma^2$  の母集団から取り出された  $n$  個の無作為標本を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする. 標本数  $n$  が大きいとき,  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  はどのような分布に従うか? 中心極限定理を用いて説明せよ.

付録：標準正規分布表  $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} dx$

$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学・中間試験問題 解答用紙 (2019.06.04)

[1] (1)	(2)	[2] (1)	(2)
[3] (1)	(2)	[4] (1)	(2)
[5] (1)	(2)	[6] (1)	(2)
[7]			
[8]			
[9]			
[10]			

学籍番号:

氏名:

[1] (1) 1回目と2回目のくじ引きは独立であり、同じ状況であるから

$$\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

(2) A が外れるのは10本中7本のはずれくじを引いた場合、引き続き B が外れるのは、9本中6本のはずれを引くときなので

$$\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

[2] 確率は面積比で与える。(1)

$$P\left(X \leq \frac{R}{2}\right) = \frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$P\left(X > \frac{R}{3} \mid X \leq \frac{R}{2}\right) = \frac{P\left(X > \frac{R}{3}, X \leq \frac{R}{2}\right)}{P\left(X \leq \frac{R}{2}\right)} = \frac{\pi(R/2)^2 - \pi(R/3)^2}{\pi R^2} \bigg/ \frac{1}{4} = \frac{5/36}{1/4} = \frac{5}{9}$$

[3]  $P(A) = 0.04$ ,  $P(B|A) = 0.9$ ,  $P(B|A^c) = 0.05$  としてベイズの公式を用いる。(1)

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} = \frac{0.04 \times 0.9}{0.04 \times 0.9 + 0.96 \times 0.05} = \frac{36}{36 + 48} = \frac{3}{7} = 0.429$$

(2)

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(A^c)P(B^c|A^c) + P(A)P(B^c|A)} = \frac{0.96 \times 0.95}{0.96 \times 0.95 + 0.04 \times 0.1} = \frac{912}{912 + 4} = \frac{228}{229} = 0.996$$

[4] (1)  $X \sim N(4, 3^2)$  から

$$P(X \geq 2.47) = P\left(\frac{X-4}{3} \geq \frac{2.47-4}{3}\right) = P(Z \geq -0.51) = 0.5 + 0.1950 = 0.695$$

(2)  $Y \sim N(50, 10^2)$  なので

$$0.33 = P(Y \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-50}{10}\right)$$

したがって、 $\frac{a-50}{10} < 0$  であって、

$$P\left(\frac{a-50}{10} \leq Z \leq 0\right) = 0.17.$$

一方、 $P(0 \leq Z \leq 0.44) = 0.17$  を表から読み取って、

$$\frac{a-50}{10} = -0.44$$

これを解いて  $a = 45.6$ .

[5] 確率変数  $X$  が  $[1, 4]$  上の一様分布に従うので、その密度関数は  $[1, 4]$  上で定数で  $f(x) = 1/3$  となる。

(1)

$$E(X) = \int_1^4 x \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \frac{5}{2}.$$

(2) まず、2乗の平均値を求めると、

$$E(X^2) = \int_1^4 x^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^4 = 7.$$

したがって、

$$V(E) = E(X^2) - E(X)^2 = 7 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

[6]

差 ( $d$ )	0	1	2	3	4	5	合計
度数 ( $f$ )	12	30	24	15	12	3	96
$df$	0	30	48	45	48	15	186
$d^2$	0	1	4	9	16	25	—
$d^2f$	0	30	96	135	192	75	528

$$\bar{d} = \frac{186}{96} = \frac{31}{16} = 1.9375, \quad \bar{d^2} = \frac{528}{96} = \frac{11}{2} = 5.5$$

したがって、分散は

$$\sigma^2 = 5.5 - \left(\frac{31}{16}\right)^2 = \frac{447}{256} = 1.7461$$

標準偏差は

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{447}{256}} = \frac{\sqrt{447}}{16} = 1.3214$$

[7] 条件付き確率の定義から

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

ここで、ベン図などから

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

であり、独立性から

$$= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

となる。したがって、

$$P(A|B^c) = \frac{P(A)P(B^c)}{P(B^c)} = P(A)$$

が成り立つ。

[8] 略

[9] 略

[10] 略