

Lecture 3

確率の基本

確率とは

- 生起が決定論的に確定できない**事象**に対する確からしさの指標
- 0 (= 0%) から 1 (= 100%) までの数値で表現

$P(A)$ 事象 A の起こる確率 (Probability)

カルダーノ (16c) 、フェルマ、パスカル、ベルヌーイ (17c) 、ラプラス (18-19c)

➡ コルモゴロフ (20c) の公理的確率

- 数学的に厳密な理論として出発する.
- 現代統計学の基礎になる.
- 確率モデルとして, 自然科学・生命科学・社会科学などあらゆる分野に波及している.



A. N. Kolmogorov (1903-1987)

確率とは

- 生起が決定論的に確定できない**事象**に対する確からしさの指標
- 0 (= 0%) から 1 (= 100%) までの数値で表現

$P(A)$ 事象 A の起こる確率 (Probability)

- 確率計算の原理

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

問題の事象の大きさ

起こりうるすべての事象
を網羅したものの大きさ

確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω : 全事象または標本空間

- 根元事象を集めた集合

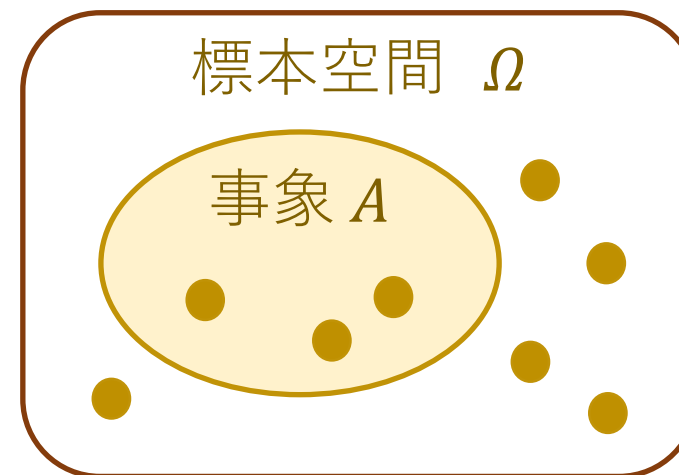
$\mathcal{A}$: 事象

- 有限または無限個の根元事象からなり, 確率を与える対象となる
- 標本空間の部分集合

$\mathcal{A}$: 事象族

- 扱う事象を限定する (数学的理由)

$P(A)$: 事象 A の起こる確率



計算の原理

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

各根元事象が
等確率で起こる



$$P(E) = \frac{3}{6}$$

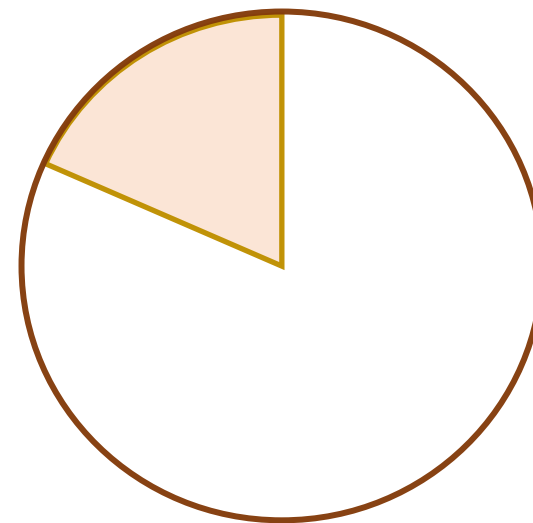
例 ダーツの確率モデル



- 根元事象 = 円板上の各点
- 標本空間 = 円板そのもの

Ω : 半径 R の円板

A :  に命中する事象



- 確率 $P(A)$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

面積比

前提：どの点にも偏りなく命中する

標本空間が有限または可算集合の場合

- 根元事象に番号を付けることができる

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$$

- 各根元事象の確率を考えることができる

$$p_k = P(\{\omega_k\}) = P(\omega_k)$$

2重かっこはうっとうしい

- 確率

$$P(A) = \sum_{k: \omega_k \in A} p_k$$

特に, 組合せ確率

- Ω が有限集合
- $p_k = P(\omega_k)$ が一定

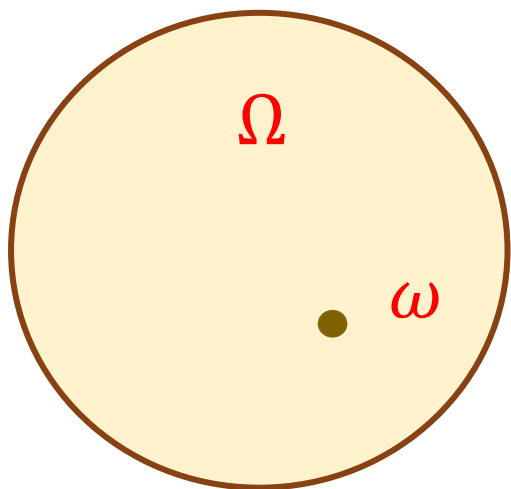


$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ω と A の要素の個数の比

標本空間が連続無限集合の場合

- ✓ 各根元事象に確率を与えることでは先に進めない



$$P(\{\omega\}) = p \quad (\text{一定}) \quad 0 \leq p \leq 1$$

Ω から n 個の点 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ を選ぶ

$$E_n = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

点 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ のいずれかが選ばれる事象

$$P(E_n) = np$$

n は任意

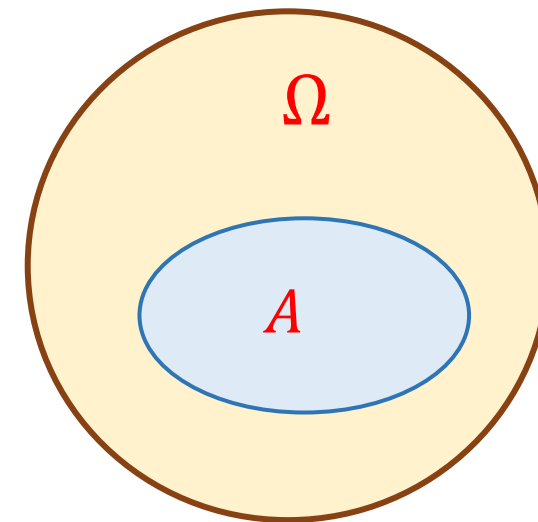
$$\text{明らかに, } 0 \leq P(E_n) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq p \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

円板からランダムに1点選ぶ

事象 A :  から点が選ばれること

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ω と A の面積比

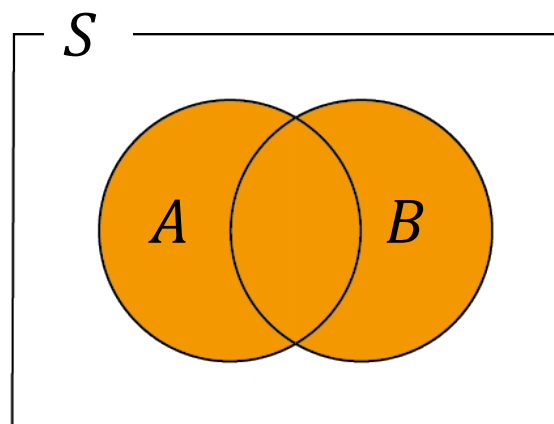


どの点にも偏りなくランダムに選ばれることをモデル化

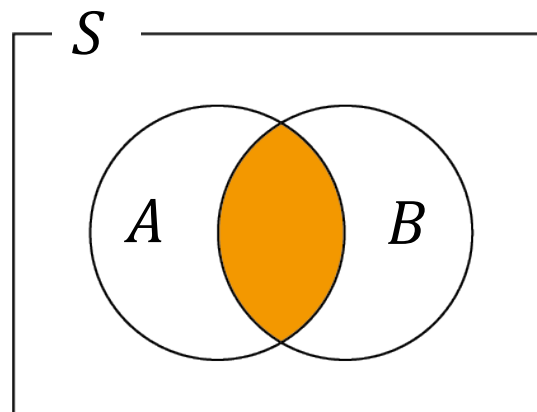
- ✓ 面積が同じならば、形や位置によらない
- ✓ 面積が2倍になれば、確率も2倍になる

幾何学的確率：面積比以外に、長さの比や体積比も使える

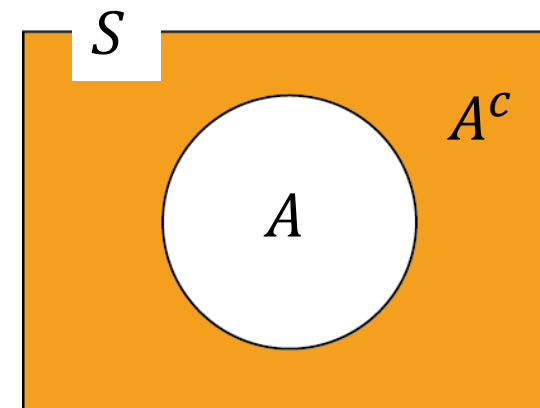
和事象 $A \cup B$



積事象 $A \cap B$



余事象 A^c または $\bar{A}$



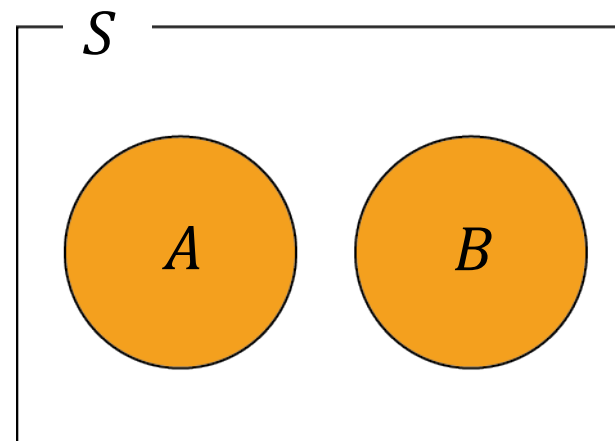
$\emptyset$: 空事象 (起こりえない)

$$P(\emptyset) = 0$$

S : 全事象 (必ず起こる事象)

$$P(S) = 1$$

排反な事象 $A \cap B = \emptyset$



確率の公理

裏に高度な数学あり

(0) 事象族 $\mathcal{A}$ は **可算加法族** をなす.

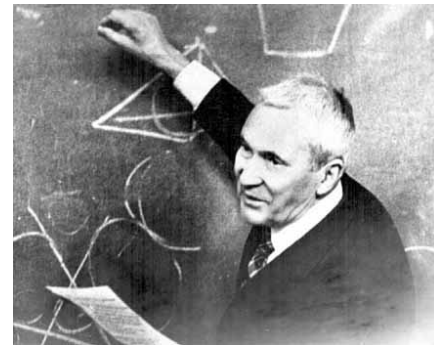
$$(1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(2) \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$$

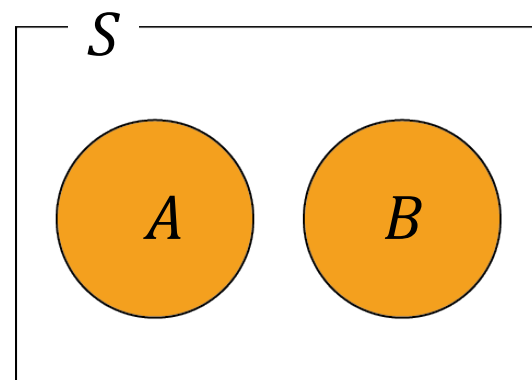
(3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ が互いに排反であれば,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

事象の無限列を扱う
裏に高度な数学あり



A. N. Kolmogorov (1903-1987)



(3') A と B が排反 ($A \cap B = \emptyset$) ならば,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

事象の有限列はカバーされるが
無限列を扱えない

定理

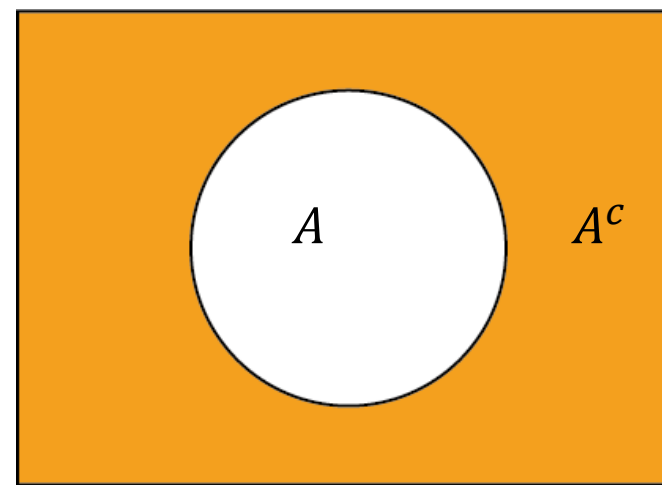
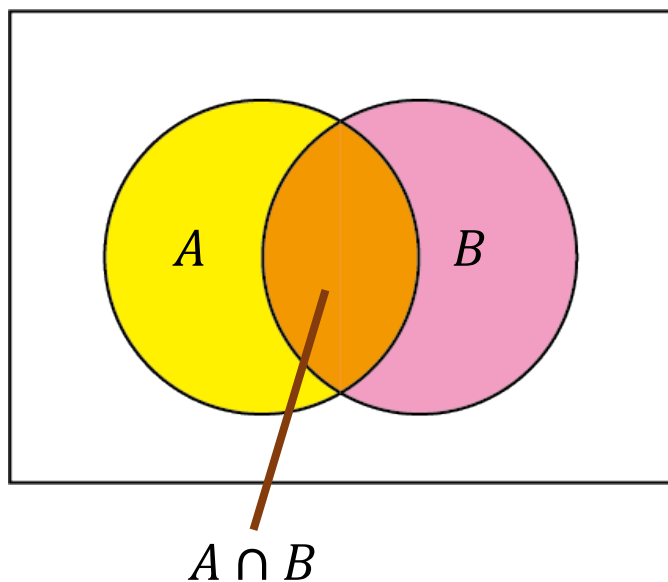
(1) 事象 A, B があるとき, A または B の事象の起こる確率 について

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(2) 事象 A の余事象が起こる確率 について

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

ポイント：
公理だけを用いて証明する



例題 3.1 2つのサイコロを投げ, 出た目の差を D とする.
 D が $0, 1, 2, 3, 4, 5$ の場合についてその確率を求めよ.

例題 3.1 2つのサイコロを投げ, 出た目の差を D とする.
 D が 0, 1, 2, 3, 4, 5 の場合についてその確率を求めよ.

考え方

➤ 起こりうるすべての場合を考える

サイコロの目は 6 通りの出方がある.
したがって, 2つのサイコロでは 36 通りの出方がある

➤ 記号を準備する

2つのサイコロの目を X, Y とする. 試行の結果は (X, Y) となる.
したがって, その差は $D = |X - Y|$ となる.

➤ 起こりうるそれぞれの場合の確率を考える

➤ 起こりうるすべての場合を考える

2つのサイコロの出目をそれぞれ X, Y とする

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

根元事象

確率の決め方

公平なサイコロの

各根元事象は等確率

➤ 起こりうるすべての場合を考える

2つのサイコロの出目をそれぞれ X, Y とする

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

記号の使い方

$$P(X = 2, Y = 4) = \frac{1}{36}$$

$$P((X, Y) = (2, 4)) = \frac{1}{36}$$

起こりうるすべての場合を考える

2つのサイコロの出目をそれぞれ X, Y とする

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

記号の使い方

$$P(X = 2, Y = 4) = \frac{1}{36}$$

$$P((X, Y) = (2, 4)) = \frac{1}{36}$$

$$P(X + Y = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

各根元事象は等確率

➤ 起こりうるすべての場合を考える

2つのサイコロの出目をそれぞれ X, Y とする

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- 2個のサイコロの目の差

$$D = |X - Y|$$

- D の取りうる値は

$$0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P(D = 0) = \frac{6}{36}$$

➤ 起こりうるすべての場合を考える

2つのサイコロの出目をそれぞれ X, Y とする

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- 2個のサイコロの目の差

$$D = |X - Y|$$

- D の取りうる値は

$$0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P(D = 0) = \frac{6}{36}$$

$$P(D = 1) = \frac{10}{36}$$

表にまとめるのがよい

➤ 起こりうるすべての場合を考える

2つのサイコロの出目をそれぞれ X, Y とする

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

サイコロの目の差

$$D = |X - Y|$$

d	0	1	2	3	4	5
$P(D = d)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

この表を D の確率分布という

独立性

定義 事象 A, B が独立であるとは, 事象 A, B について

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つことをいう. 独立でないとき従属であるという.

例 サイコロを 2 回投げる.

X : 1 回目に出る目, Y : 2 回目が出る目

2 つの事象 $A = \{X = 2\}$ と $B = \{Y = 5\}$ は独立である

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} \quad P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

ゆえに $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立ち, A と B は独立.

例題 3.2 52 枚のトランプから 1 枚をランダムに抜き取る時, そのカードの
スートを X , 数字を Y とする. X と Y は独立である.

例題 3.2 52 枚のトランプから 1 枚をランダムに抜き取る時, そのカードの
スートを X , 数字を Y とする. X と Y は独立である.

考え方

(1) 起こりうるすべての場合を考える

52枚のカードのうちの1枚なので 52 通りの起こり方がある

(2) 記号を用いて適切に表示する

(3) 起こりうるそれぞれの場合の確率を考える

例題 3.2 52 枚のトランプから 1 枚をランダムに抜き取るとき, そのカードの
スートを X , 数字を Y とする. X と Y は独立である.

起こりうるすべての場合を書き下す

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	1	2		11	12	13
1	 A	 2	...	 J	 Q	 K
2	 A	 2	...	 J	 Q	 K
3	 A	 2	...	 J	 Q	 K
4	 A	 2	...	 J	 Q	 K

例題 3.2 52 枚のトランプから 1 枚をランダムに抜き取るとき, そのカードの
スートを X , 数字を Y とする. X と Y は独立である.

起こりうるすべての場合を書き下す

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	1	2		11	12	13
1	 A	 2	...	 J	 Q	 K
2	 A	 2	...	 J	 Q	 K
3	 A	 2	...	 J	 Q	 K
4	 A	 2	...	 J	 Q	 K



を引く確率

$$P(X = 2, Y = 12) = \frac{1}{52}$$

一方,

$$P(X = 2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 12) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ゆえに,

$$P(X = 2, Y = 12) = P(X = 2)P(Y = 12)$$

事象 $\{X = 2\}$ と $\{Y = 12\}$ は独立である

例題 3.2 52 枚のトランプから 1 枚をランダムに抜き取るとき, そのカードの
スートを X , 数字を Y とする. X と Y は独立である.

起こりうるすべての場合を書き下す

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	1	2		11	12	13
1	 A	 2	...	 J	 Q	 K
2	 A	 2	...	 J	 Q	 K
3	 A	 2	...	 J	 Q	 K
4	 A	 2	...	 J	 Q	 K

$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$

を引く確率

$$P(X = a, Y = b) = \frac{1}{52}$$

一方,

$$P(X = a) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = b) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

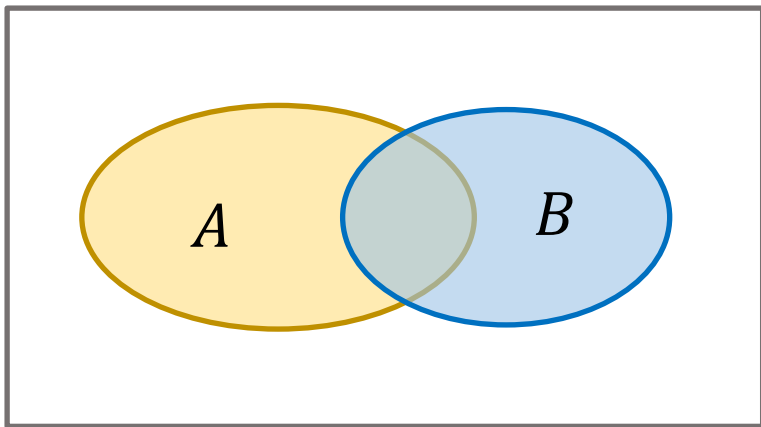
ゆえに,

$$P(X = a, Y = b) = P(X = a)P(Y = b)$$

確率変数 X, Y は独立である

条件付き確率

A, B : 事象



A の下での B の条件付確率

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ただし, $P(A) > 0$

乗法定理

2つの事象 A, B が同時に起こる確率

$P(A \cap B)$ は, 条件付き確率を使って, 次のように表される.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

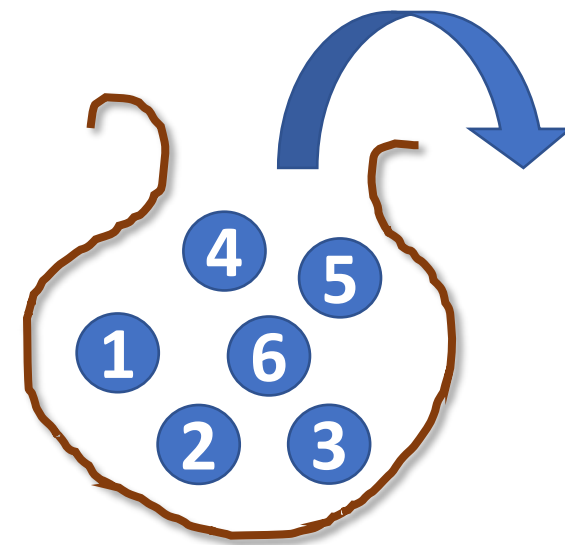
解釈

$P(B|A)$ は事象 A が起こったことを知った上で, 事象 B の起こる確率

例題 3.3

袋の中に球が 6 個が入っていて, それぞれに 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字が書いてあるとする. 袋の中から 2 回続けて 1 個の球を取り出す. 球の数字が順に i, j ($i, j = 1, \dots, 6$) となる確率を求めよ.

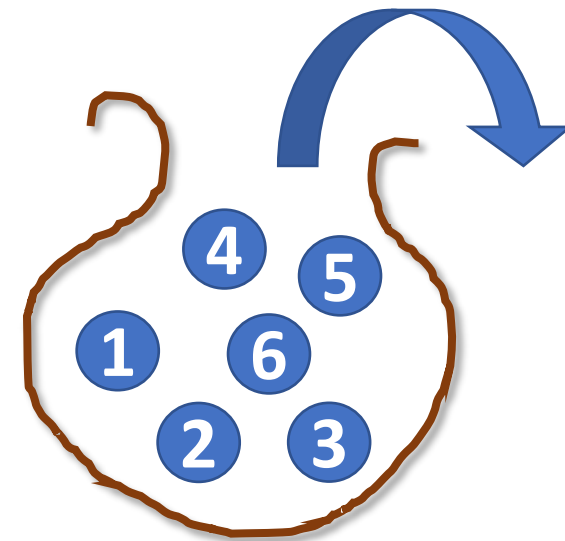
- (1) 【復元抽出】 1 回目に取り出した球を袋に戻し, よくかきまぜて, 改めて袋の中から球を 1 個取り出す.
- (2) 【非復元抽出】 1 回目に取り出した球をもとに戻さず, 続けて球を取り出す.



例題 3.3

袋の中に球が 6 個が入っていて、それぞれに 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字が書いてあるとする. 袋の中から 2 回続けて 1 個の球を取り出す. 球の数字が順に i, j ($i, j = 1, \dots, 6$) となる確率を求めよ.

- (1) 【復元抽出】 1 回目に取り出した球を袋に戻し、よくかきまぜて、改めて袋の中から球を 1 個取り出す.
- (2) 【非復元抽出】 1 回目に取り出した球をもとに戻さず、続けて球を取り出す.



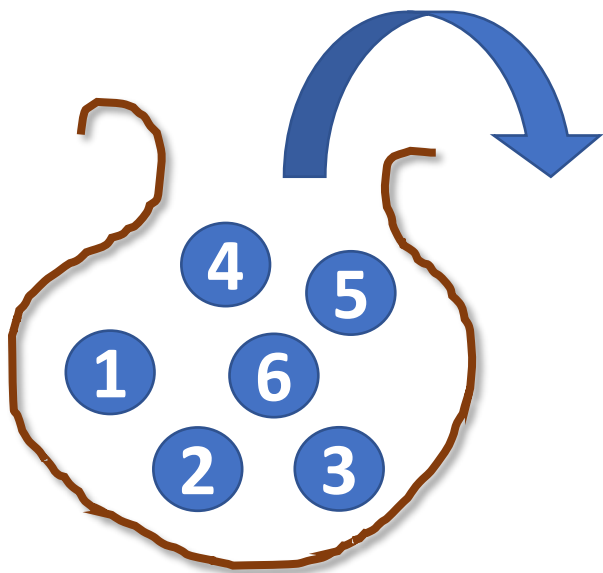
記号の準備

A_i : 1 回目の球の数字が i となる事象

B_j : 2 回目の球の数字が j となる事象

求める確率 = $P(A_i \cap B_j)$

(1) 【復元抽出】



6個の球は等確率で選ばれるから $P(A_i) = \frac{1}{6}$

2回目の試行では, 袋の中や取り出し方は1回目と同じである. したがって,

$$P(B_j) = \frac{1}{6}$$

1回目と2回目の試行は独立であるから

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j) = \frac{1}{36}$$

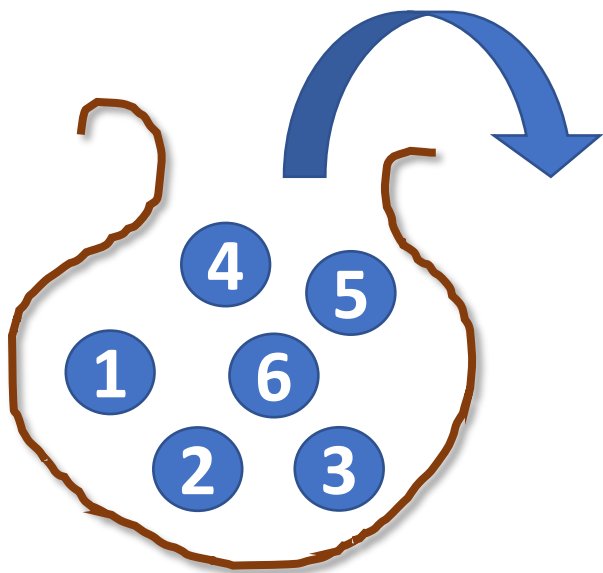
別解

1回目が2回目に影響しないので $P(B_j) = P(B_j|A_i)$

乗法定理によって

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j|A_i) = P(A_i)P(B_j) = \frac{1}{36}$$

(2) 【非復元抽出】



乗法定理によって $P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j|A_i)$

題意から

$$P(B_j|A_i) = \begin{cases} 0, & i = j \\ \frac{1}{5}, & i \neq j \end{cases}$$

$i = j$ のとき,

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j|A_i) = 0$$

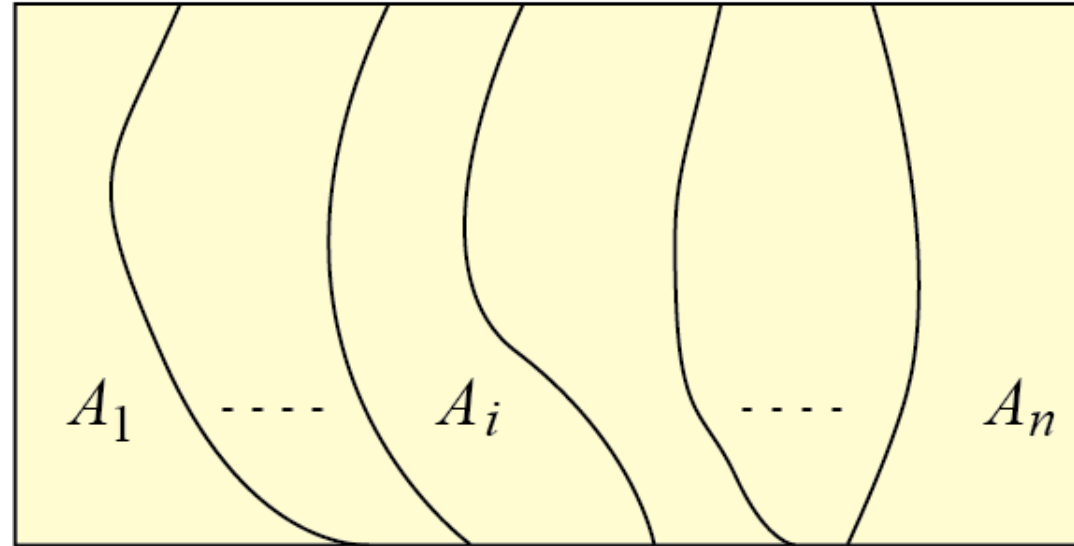
$i \neq j$ のとき,

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j|A_i) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

注意 A_i と B_j は独立ではない. なぜなら $P(B_j) = \frac{1}{6}$ であるから (確認せよ)

ベイズの定理

全事象 S の層別 (stratification)



$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$$

例 全人口を「10 代以下, 20 代, ..., 60 代, 70 代以上」と年代別に考える.

全確率の公式 全事象が A_i ($i = 1, \dots, n$) に層別されているとき, 事象 B の確率 $P(B)$ は, A_i の事前確率 $P(A_i)$ と条件付き確率 $P(B|A_i)$ を使って表される.

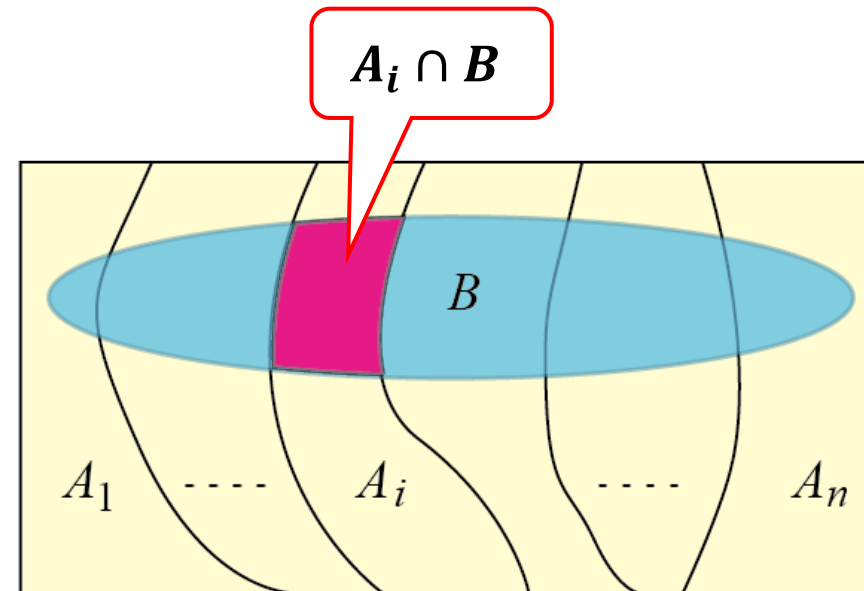
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

証明

$$B = \bigcup_{i=1}^n A_i \cap B \quad (\text{互いに排反})$$

$$\therefore P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)$$

一方, $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$ なので,
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

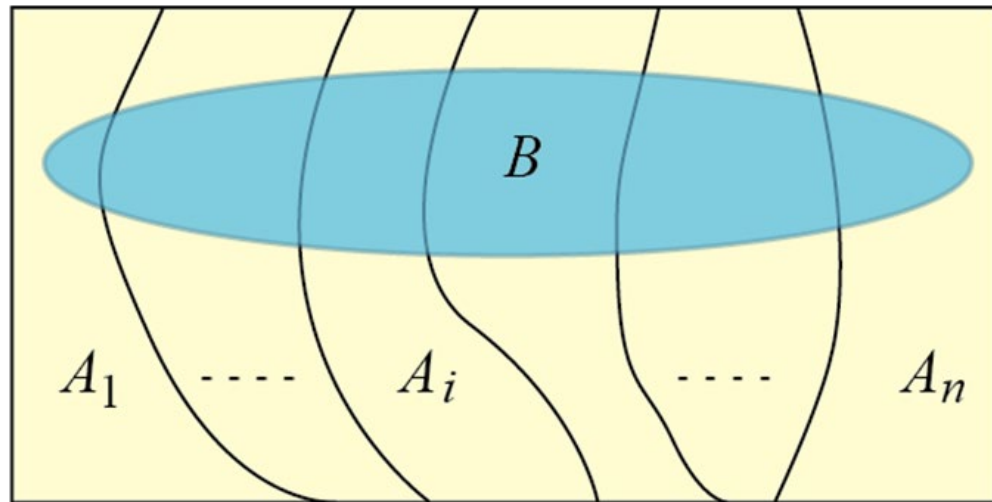


ベイズの定理

全事象が A_i ($i = 1, \dots, n$) に層別されているとき, 事象 B が起こったときの各層の条件付き確率 $P(A_i|B)$ を事後確率といい, 事前確率 $P(A_i)$ と条件付き確率 $P(B|A_i)$ を使って表される.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

証明



定義から $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

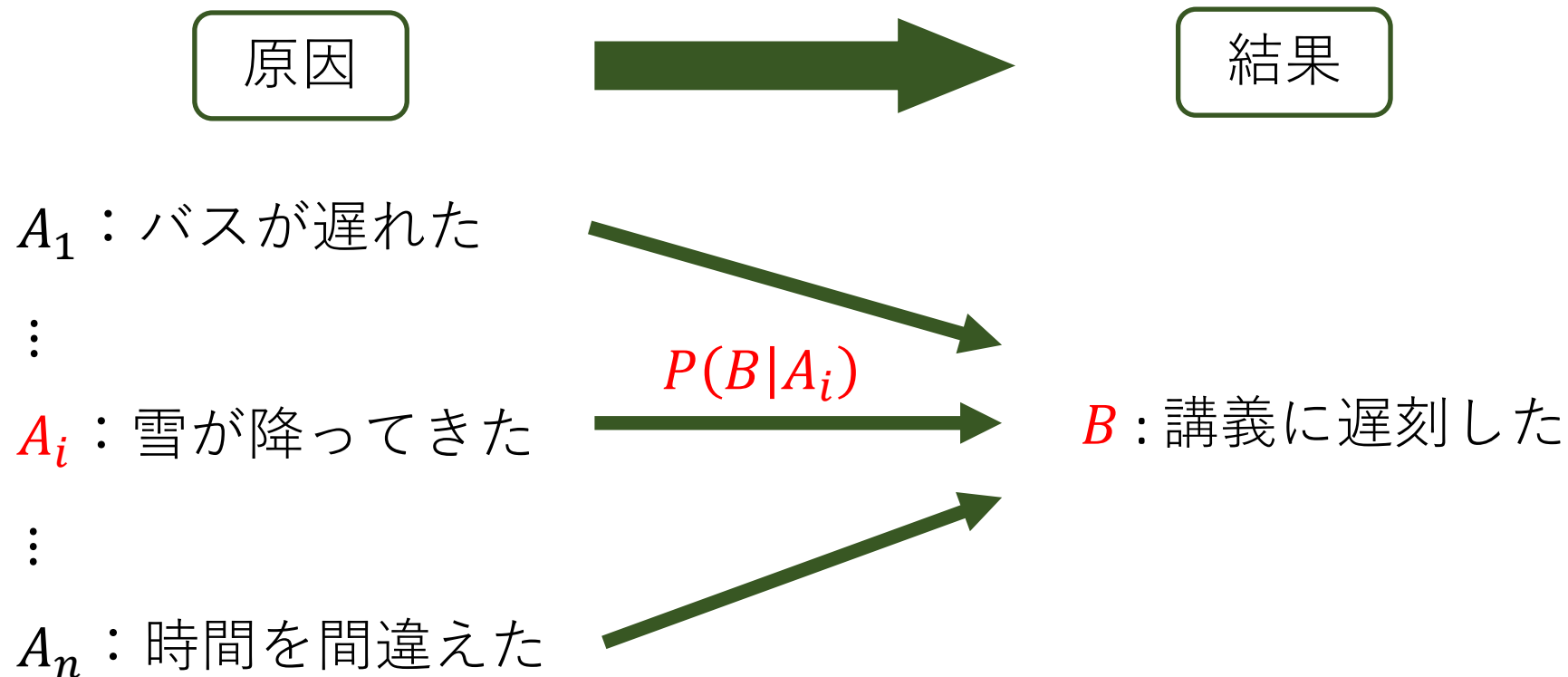
分子 = $P(A_i \cap B) = P(A_i) P(B|A_i)$

分母 = $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$

これは全確率の公式

ベイズの公式 = 結果から原因を知る公式

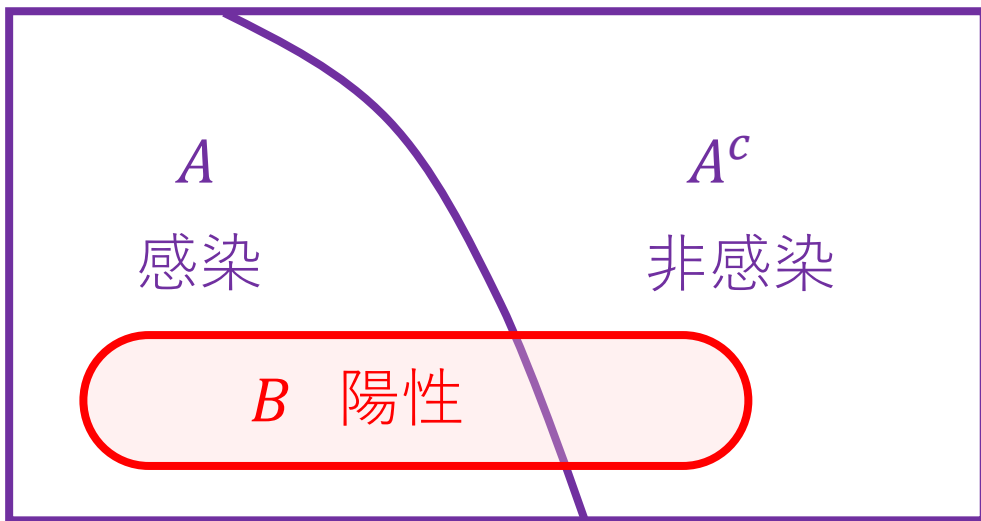
$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$



例題 3.4 (擬陽性の問題)

- 病気 A の感染者は 500 人に 2 人の割合であるという.
- 検査 B は, 感染者の 95% に陽性反応を示すが,
非感染者の 2% にも陽性反応が出てしまう.

- (1) 陽性反応が出れば感染しているか?
- (2) 陰性反応なら非感染か?



$$P(A) = \frac{2}{500}$$

$$P(B|A) = 0.95$$

$$P(B|A^c) = 0.02$$

(1) 陽性反応なら感染か？

$$\begin{aligned}
 P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \\
 &= \frac{\frac{2}{500} \times 0.95}{\frac{2}{500} \times 0.95 + \frac{498}{500} \times 0.02} \\
 &= \frac{1.9}{1.9 + 9.96} = 0.160
 \end{aligned}$$

(2) 陰性反応なら非感染か？

$$\begin{aligned}
 P(A^c|B^c) &= \frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(A^c)P(B^c|A^c) + P(A)P(B^c|A)} \\
 &= \frac{\frac{498}{500} \times 0.98}{\frac{498}{500} \times 0.98 + \frac{2}{500} \times 0.05} \\
 &= \frac{488.04}{488.04 + 0.1} = 0.999795
 \end{aligned}$$

Lecture 3

確率の基本

おわり