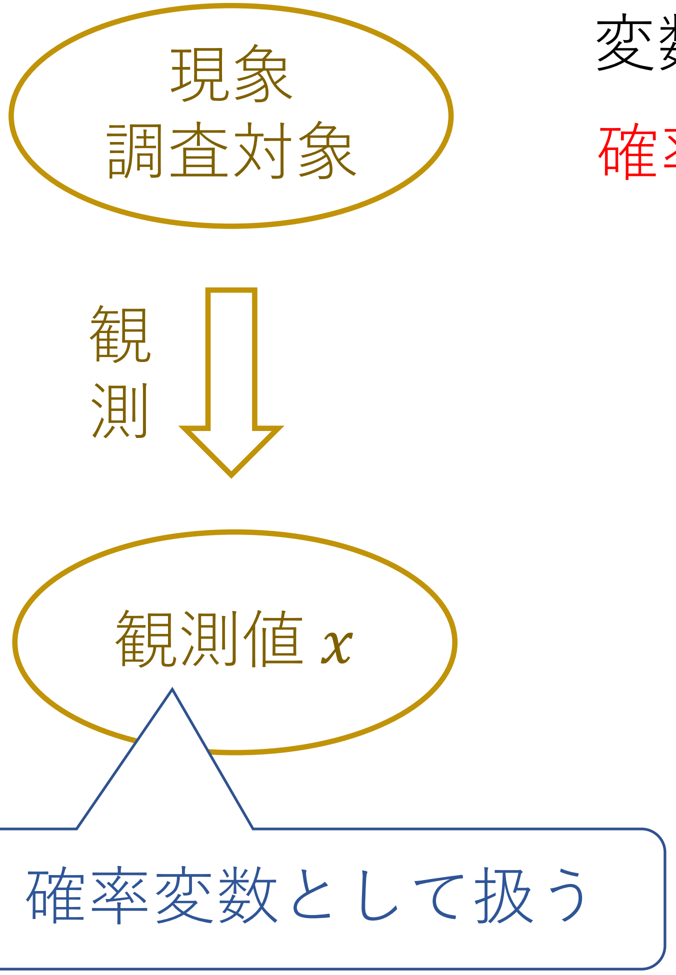
Lecture 4

離散型確率分布

確率変数(random variable)とは？



変数：ある範囲の値を代表する．$x, y, z, t, \ldots$

確率変数：確率を伴ってある範囲の値をとる．$X, Y, Z, T, \ldots$

- Discrete random variables (離散型確率変数)
  - (1) コインを3回投げるとき表の出る回数.
  - (2) 授業開始時の出席者数.

$\boxed{\text{数える}}$

- Continuous random variables (連続型確率変数)
  - (1) 円の内部から1点をランダムに選んだとき，その点と中心との距離.
  - (2) 新生児の体重.

$\boxed{\text{測る/量る}}$

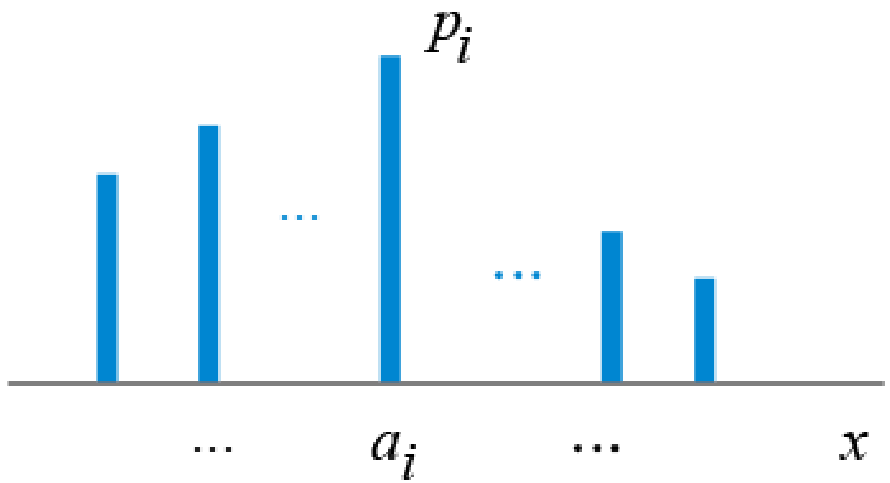
（注意）確率変数 X は特定の数を表すのではない．
その取りうる個別の値を X の実現値という．

離散型確率変数の分布(distribution)

取りうる値　$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$

その確率　$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$

x	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	合計
$P(X = x)$	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	1



数式による表記

$$P(X = a_i) = p_i$$

基本的な性質

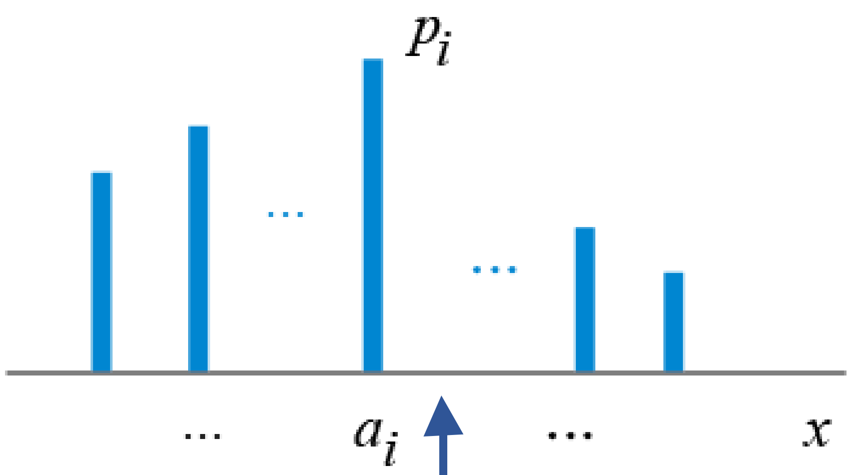
(1)　$p_i \geq 0$

(2)　$\sum p_i = 1$

離散型確率変数の平均値と分散

離散型確率変数 X の確率分布

x	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	合計
$P(X=x)$	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	1



- 平均値 $\mathbf{E}[X] = m_X = \sum a_i p_i = \sum a_i P(X = a_i)$ 　重心

- 分散 $\mathbf{V}[X] = \sigma_X^2 = \sum (a_i - m_X)^2 p_i = \sum a_i^2 p_i - m_X^2$

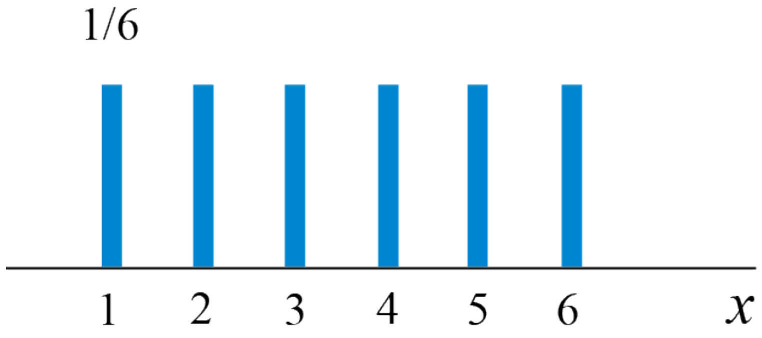
$$= \mathbf{E}[(X - m_X)^2] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$$ 【分散公式】

例 題 4.1　サイコロを1回振って, 出た目を X は $\{1,2,3,4,5,6\}$ の範囲を動く確率変数である. X の確率分布, 平均値, 分散を求めよ.

確率分布

$$P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1,2,\cdots,6$$

x	1	2	3	4	5	6	合計
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1



平均値

$$\mathbf{E}[X] = m_X = \sum a_i p_i = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \sum a_i^2 p_i = \sum_{k=1}^{6} k^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

分散

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

【分散公式】

名前の付いた重要な離散分布

- ✓ ベルヌイ分布　二項母集団の分布
- ✓ 二項分布　ベルヌイ試行列における成功回数の分布
- ✓ 幾何分布　ベルヌイ試行列における成功までの待ち時間
- ✓ ポアソン分布　二項分布の極限（少数の法則）

教科書等で見ておく

ベルヌイ分布　$B(1,p)$

2 値確率変数＝ベルヌイ型確率変数

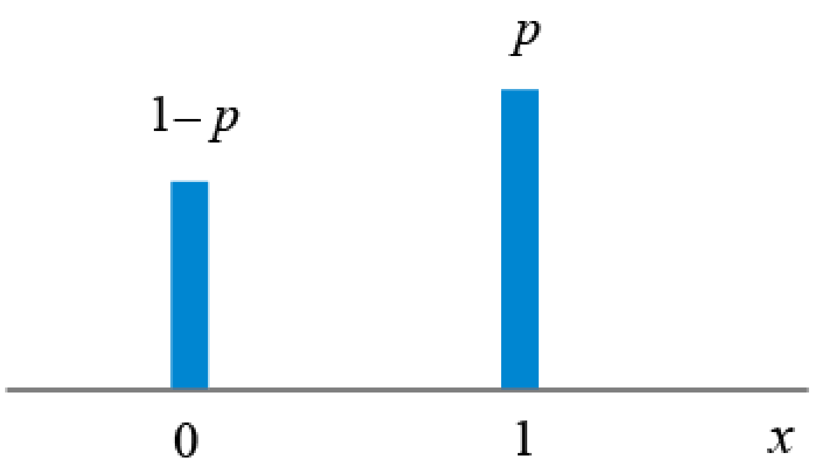
$$Z = \begin{cases} 1 & （確率\ p\ で） \\ 0 & （確率\ 1-p\ で） \end{cases}$$

x	0	1	計
$P(Z=x)$	$1-p$	p	1

数式だけで書くなら

$$P(Z=0) = 1-p$$

$$P(Z=1) = p$$



平均値　$\mathbf{E}[Z] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

$\mathbf{E}[Z^2] = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$

分散　$\mathbf{V}[Z] = \mathbf{E}[Z^2] - \mathbf{E}[Z]^2 = p - p^2 = p(1-p)$

平均値　$m = p$

分散　$\sigma^2 = p(1-p)$

二項分布　$B(n,p)$

X：表の出る確率 p のコインを n 回投げたときの表の回数

確率分布の計算

$P(X=k)$ ：○（表）が k 回，×（裏）が $n-k$ 回の確率

その一例　○×・・・○×・・・×○×

その確率　$p \ q \ \cdots \ p \ q \ \cdots \ q \ p \ q = p^k q^{n-k}$　（ただし, $q=1-p$）

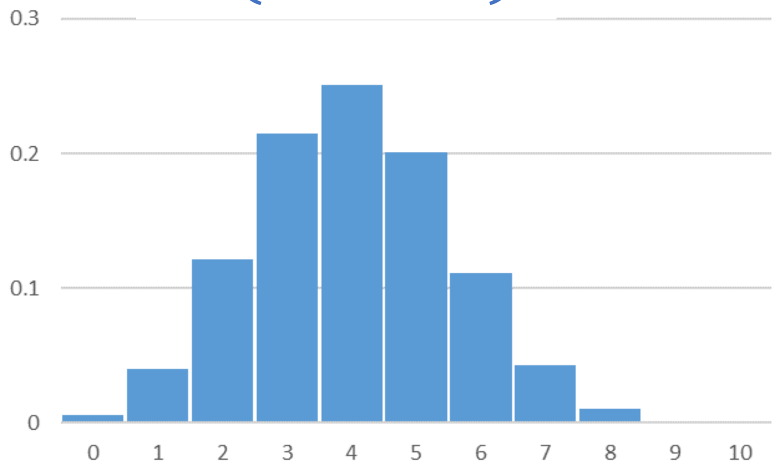
したがって,

二項係数

$$P(X=k)=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

二項分布の具体例

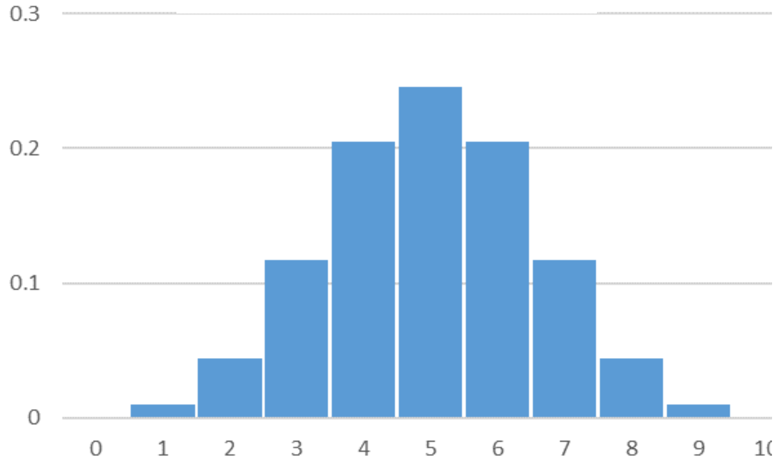
$B(10,0.4)$



$$m = 4$$

$$\sigma^2 = 2.4$$

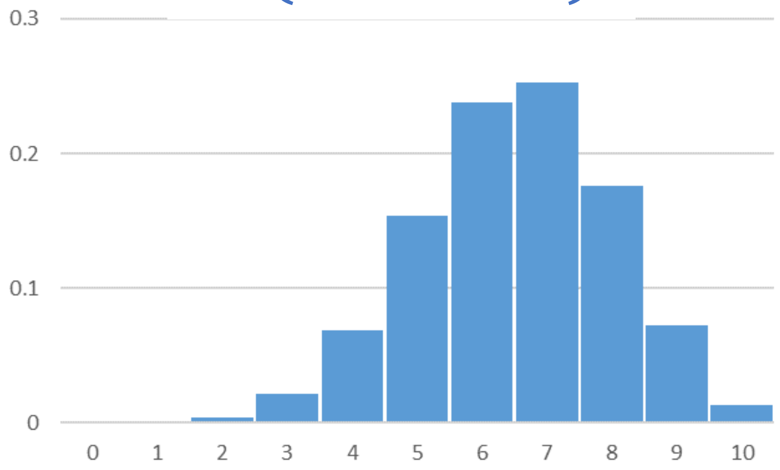
$B(10,0.5)$



$$m = 5$$

$$\sigma^2 = 2.5$$

$B(10,0.65)$

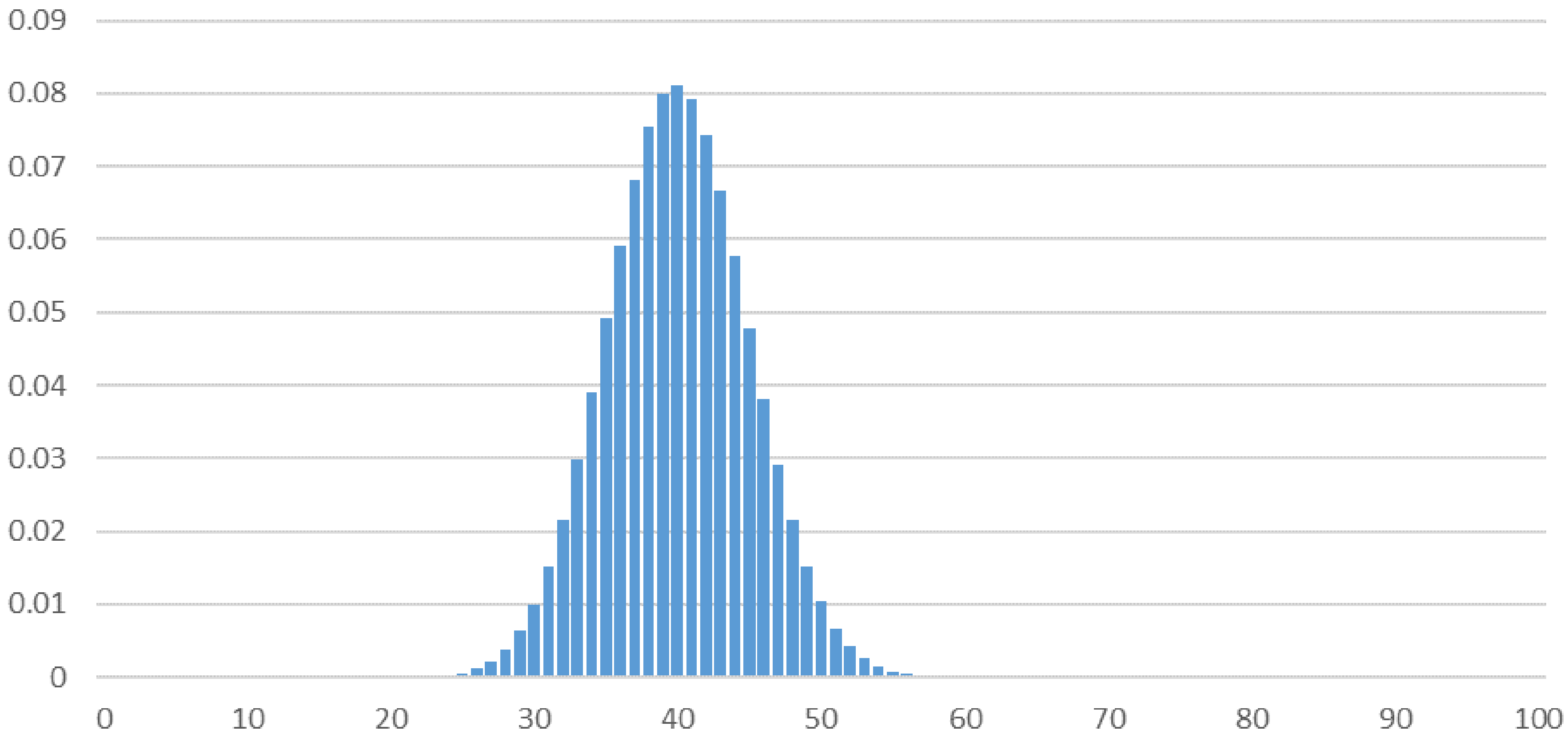


$$m = 6.5$$

$$\sigma^2 = 2.275$$

二項分布の具体例

$B(100, 0.4)$ $\quad m = 40, \ \sigma^2 = 24$



二項分布　$B(n, p)$

平均値　$m = np$

分散　$\sigma^2 = np(1-p)$

$X \sim B(n, p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \boldsymbol{E}[X]^2$$

※ $E[X^2]$ のかわりに

$$\mathbf{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

を計算する方が簡単

和の計算

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-(k+1))!} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$= np\big(p + (1-p)\big)^{n-1}$$

$$= np$$

和の計算

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!\,(n-2-k)!} p^k (1-p)^{n-2-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \big(p + (1-p)\big)^{n-2} = n(n-1)p^2$$

二項分布　$B(n,p)$

$X \sim B(n,p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathbf{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}[X]$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \boldsymbol{E}[X]^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= -np^2 + np$$

$$= np(1-p)$$

平均値　$m = np$

分散　$\sigma^2 = np(1-p)$

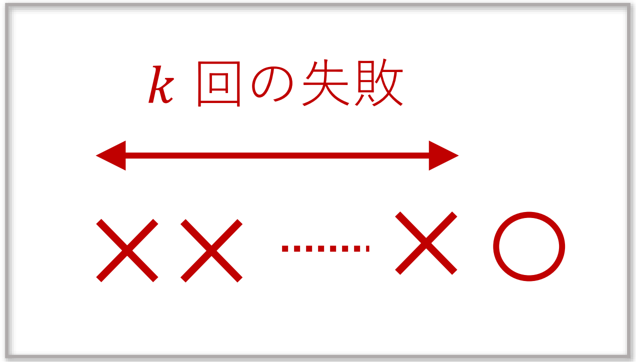
幾何分布

成功確率 p の試行を独立に繰り返す.
初めて成功するまでの失敗の回数を X とする.

$$P(X=k)=p(1-p)^k \qquad k=0,1,2,\ldots$$

この分布をパラメータ p の幾何分布という.

事象 $\{X=k\}$



（注意）$X+1$ は成功までの待ち時間

$$\mathbf{E}[X]=\sum_{k=0}^{\infty}kp(1-p)^k=\frac{1-p}{p}=\frac{1}{p}-1$$

$$\mathbf{E}[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty}k^2p(1-p)^k=\frac{(2-p)(1-p)}{p^2}$$

$$\mathbf{V}[X]=\mathbf{E}[X^2]-\mathbf{E}[X]^2=\frac{1-p}{p^2}$$

平均値　$m=\dfrac{1-p}{p}$

分散　$\sigma^2=\dfrac{1-p}{p^2}$

確率母関数 (Generating function)

$n = 0,1,2,\ldots$ に値をとる確率変数 X に対して $p_n = P(X = n)$ とおく

確率母関数　$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n x^{n-2}$$

$f'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = E[X]$　平均値

$$f''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$

$$= E[X^2] - f'(1)$$

$$E[X^2] = f''(1) + f'(1)$$

分散　$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$= f''(1) + f'(1) - f'(1)^2$$

二項分布の確率母関数

確率母関数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (px)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (px + 1 - p)^n$$

$$f'(x) = np(px + 1 - p)^{n-1}$$

$$f'(1) = np$$

$$f''(x) = n(n-1)p^2(px + 1 - p)^{n-2}$$

$$f''(1) = n(n-1)p^2$$

平均値　$E[X] = f'(1) = np$

分散　$V[X] = f''(1) + f'(1) - f'(1)^2$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np$$

ポアソン分布

$\lambda > 0$ を定数とする.

確率変数 X がパラメータ λ のポアソン分布に従うとは,

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

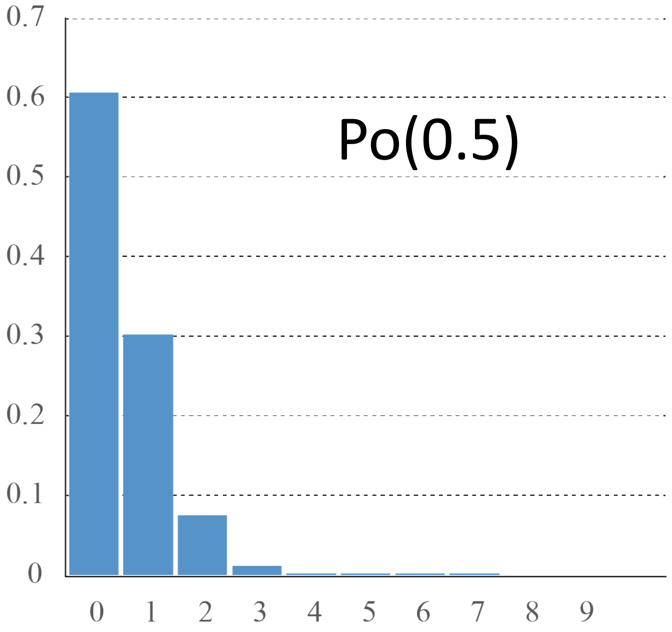
$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ と書く.

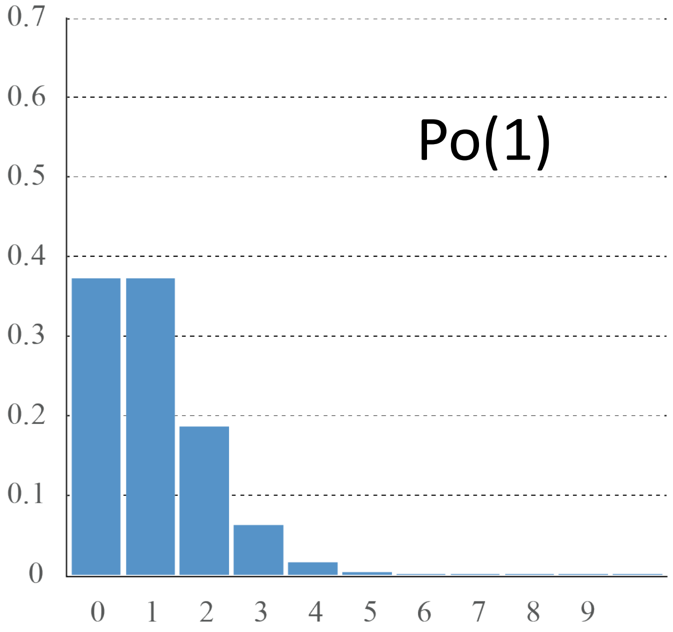
- 確かに確率分布になっている

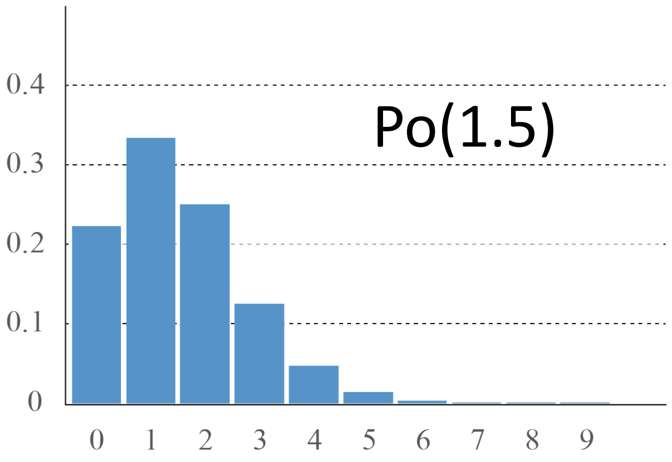
指数関数のテーラー展開

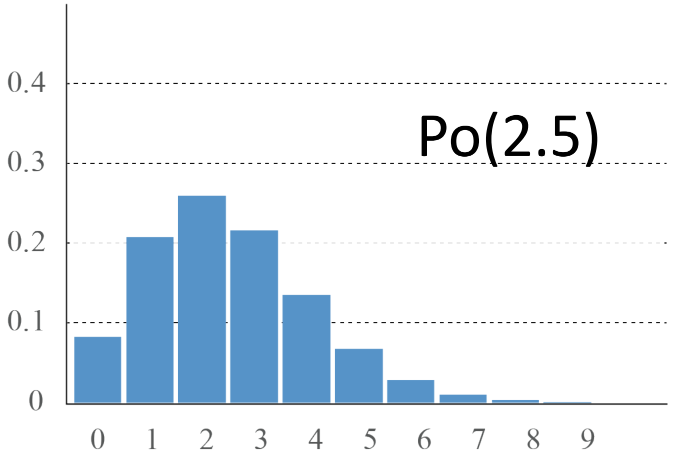
$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \Longrightarrow \quad 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Lecture 4　離散型確率分布　ポアソン分布









ポアソン分布の確率母関数

確率分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

確率母関数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}x^k$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda x}$$

$$f'(x)=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda x} \qquad f'(1)=\lambda$$

$$f''(x)=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda x} \qquad f''(1)=\lambda^2$$

平均値　$m=f'(1)=\lambda$

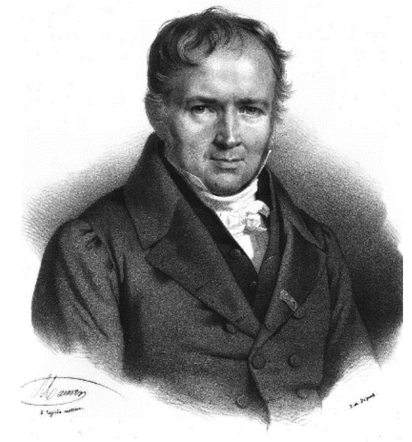
分散　$\sigma^2=f''(1)+f'(1)-f'(1)^2$

$$=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

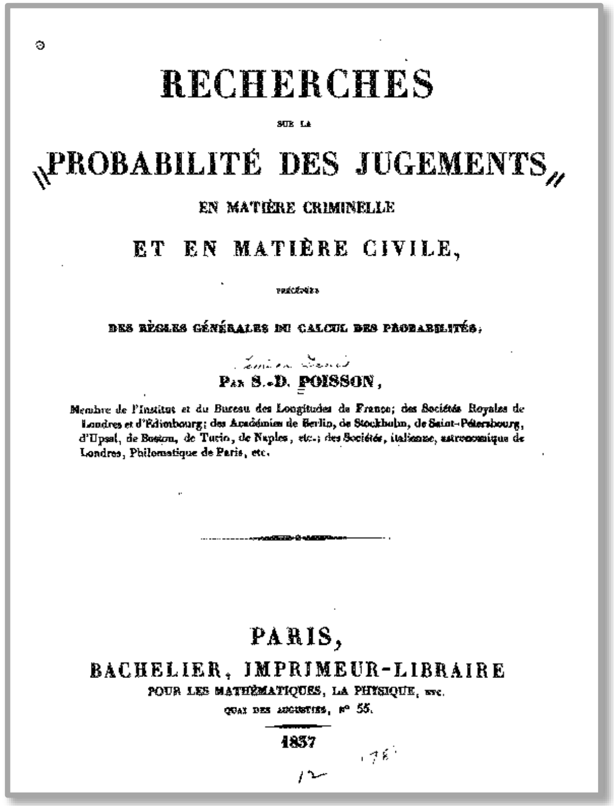
<u>ポアソン分布の特徴</u>

平均と分散が等しい

Siméon Denis Poisson (1781-1840)



- エコール・ポリテクニクでラプラスらに学ぶ.
- 数学・物理学に多大な貢献
- ポアソン〇〇と名のついた概念多数



RECHERCHES
SUR LA
PROBABILITÉ DES JUGEMENTS
EN MATIÈRE CRIMINELLE
ET EN MATIÈRE CIVILE,
PRÉCÉDÉES
DES RÈGLES GÉNÉRALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS;
PAR S.-D. POISSON,
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés Royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, d'Upsal, de Boston, de Turin, de Naples, etc.; des Sociétés italienne, astronomique de Londres, Philomatique de Paris, etc.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, ETC.
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
1837

誤った有罪判決の回数について研究(1837)

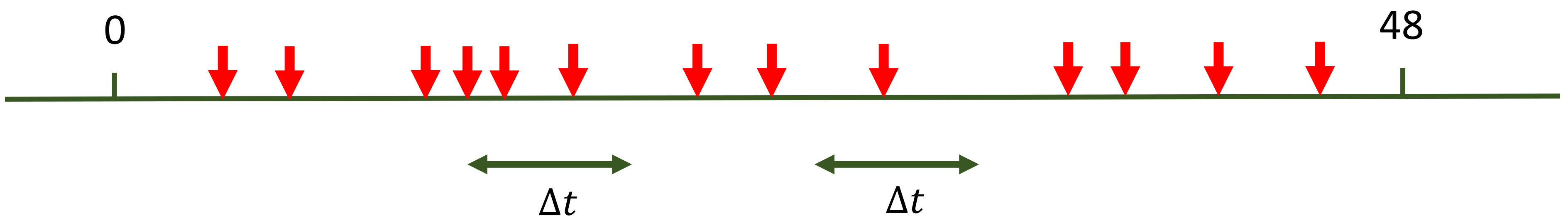
誤審が, ある一定期間に起こる回数 X の確率分布
（⇒ ポアソン分布）を導出

稀なイベントの発生回数の確率分布として広い応用

- 馬に蹴られて死亡した兵士数（ボルトキーヴィッチ）
- 電話の呼び出し, メールの着信
- サッカーのゴール数, 野球のホームラン数

メールの着信

メールの着信を観測して, 48時間に324回のメール着信があった. これをもとに, ある特定の１時間のメール着信回数を調べよう.

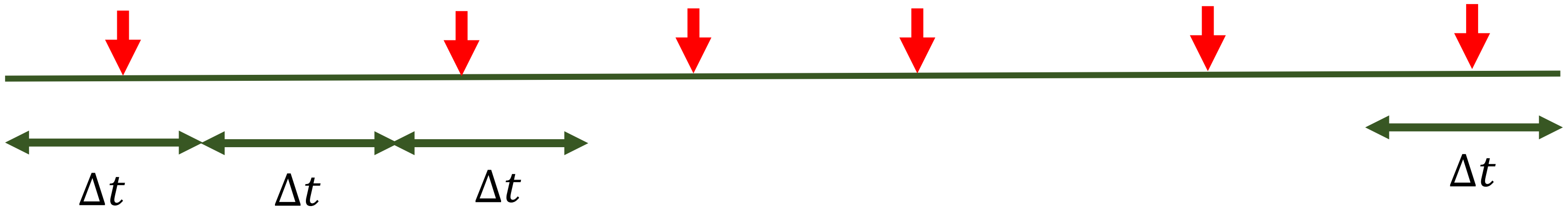


仮定

- 微小時間区間 Δt の中では着信は１回, または０回
- 微小時間区間 Δt がずれていれば着信の有無は独立

⇒ 微小時間区間 Δt 毎のメール着信をコイン投げとみなす

1時間当たりの着信回数 X をモデル化する



- 1時間を微小時間区間 Δt に N 分割

$$\Delta t = \frac{1}{N}$$

$$p = \mathrm{P}(\text{時間区間 } \Delta t \text{ にメール着信がある})$$
$$1 - p = \mathrm{P}(\text{時間区間 } \Delta t \text{ にメール着信がない})$$

- 1時間の間に N 回のコイン投げ

表の回数　$X \sim B(N, p)$

平均値 $\mu = Np$

- 観測から1時間当たり

$$\frac{324}{48} = 6.75 \text{ 回の着信}$$

- p の推定

$$\mu = Np = 6.75 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{6.75}{N}$$

- こうして

$$X \sim B\left(N, \frac{6.75}{N}\right)$$

ポアソン分布の導出（ポアソンの少数の法則）

$B\left(N, \frac{\lambda}{N}\right)$ は $N \to \infty$ とすると $\mathrm{Po}(\lambda)$ に収束する.

言い換え　$B(N,p)$ は, $N \to \infty, p \to 0, Np \to \lambda$ とすると $Po(\lambda)$ に収束する.

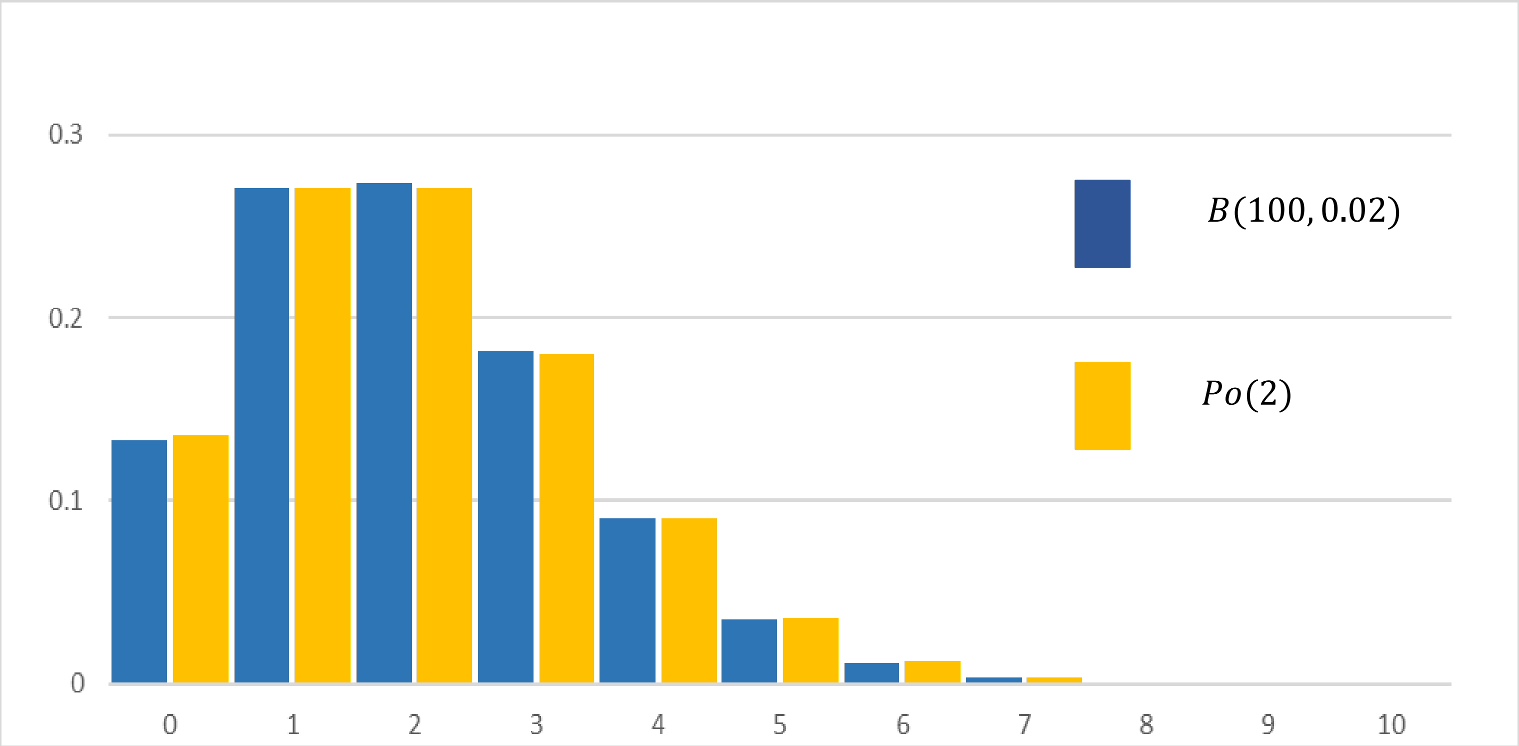
証 明　$X \sim B\left(N, \frac{\lambda}{N}\right)$ として

$$P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-k}$$

$$\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (N \to \infty)$$

例　$B(100, 0.02) \approx Po(2)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
二項分布	0.13262	0.27065	0.27341	0.18228	0.09021	0.03535	0.01142	0.00313	0.00074	0.00015
ポアソン分布	0.13534	0.27067	0.27067	0.18045	0.09022	0.03609	0.01203	0.00344	0.00086	0.00019



メールの着信

メールの着信を観測して, 48時間に324回のメール着信があった．これをもとに,
ある特定の 1 時間のメール着信回数を調べよう.

- X：1 時間当たりの着信回数
- 1時間を微小時間区間 Δt に N 分割してモデル化：　$X \sim B\left(N, \dfrac{6.75}{N}\right)$

N は人為的なので消去したい

- $N \to \infty$ として　$X \sim \mathrm{Po}(6.75)$
- たとえば

$$P(X \leq 2) = \frac{6.75^0}{0!} e^{-6.75} + \frac{6.75^1}{1!} e^{-6.75} + \frac{6.75^2}{2!} e^{-6.75}$$

$$= (1 + 6.75 + 22.78) \times 0.00117 = 0.036$$

Python を使ってみる

二項分布

- 確率計算のコード
- 確率分布表
- 確率分布の図示

ポアソン分布

- 確率計算のコード
- 確率分布表
- 確率分布の図示

Binomial_and_Poisson - Jupyter Notebook.pdf

ポアソンの少数の法則

$$B(N,p) \approx Po(\lambda)$$

$$N \to \infty,\ \ p \to 0,\ \ Np \to \lambda$$

PoissonLimit - Jupyter Notebook.pdf