

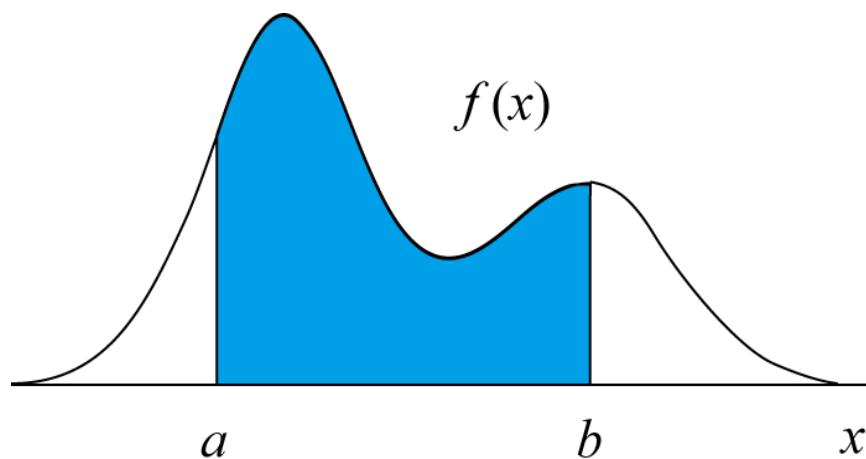
Lecture 5

連続型確率分布

連続型確率変数 X

< でも $\leq$ でも同じ

- 取りうる値は連続量
 - 特定の値 a をとる確率: $P(X = a) = 0$
 - ある範囲 (a より大きく b 以下) の値をとる確率: $P(a < X \leq b)$
- 確率密度関数を用いて面積で確率を表す



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$f(x)$ を X の確率密度関数という

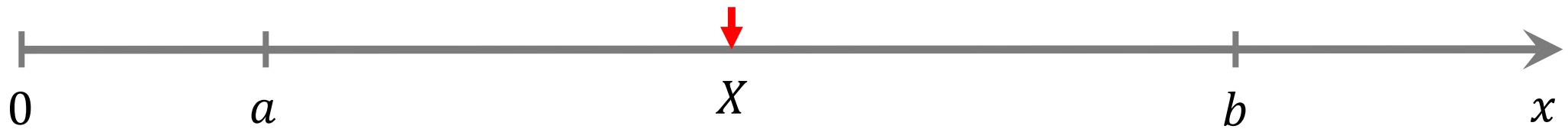
$$f(x) = f_X(x)$$

例題 5.1

区間 $[a, b]$ からランダムに選ばれた点の座標を X とすれば, X は連続型確率変数になる. X の確率分布を求めよ.

例題 5.1

区間 $[a, b]$ からランダムに選ばれた点の座標を X とすれば, X は連続型確率変数になる. X の確率分布を求めよ.



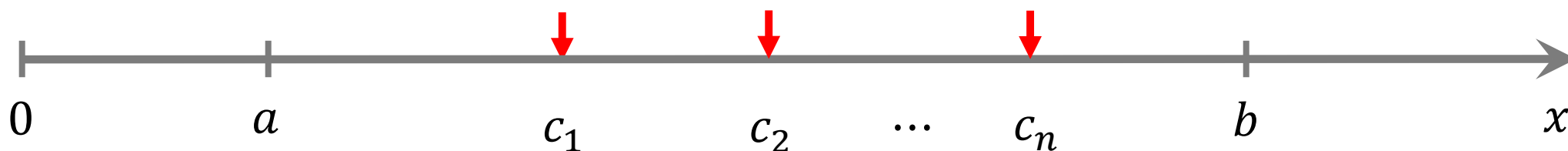
➤ 取りうる値 (a 以上 b 以下の実数) は連続量

➤ ランダムって何?

1) 決まった数学的定義はなく, 文脈で理解する.

2) 初めに思う状況は, 「すべての根元事象が等確率で起こる」こと

➤ X が特定の値 c をとる確率： $P(X = c) = 0$



n 個の異なる点を選ぶ： $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$P(X = c_1) = P(X = c_2) = \dots = P(X = c_n) = p$$

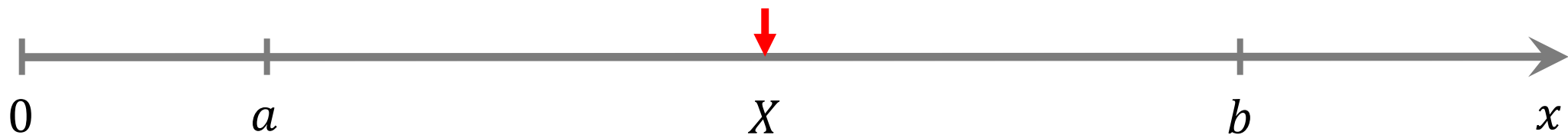
どの点も等確率で選ばれる

和事象の確率： $P(X = c_1 \text{ または } X = c_2 \text{ または } \dots X = c_n) = np$

確率は必ず ≤ 1 なので $np \leq 1$ $\Rightarrow$ $p \leq \frac{1}{n}$

n はいくらでも大きくできるから $p = 0$

➤ X が特定の値 c をとる確率： $P(X = c) = 0$



➤ ある範囲 (α より大きく β 以下) の値をとる確率： $P(\alpha < X \leq \beta)$



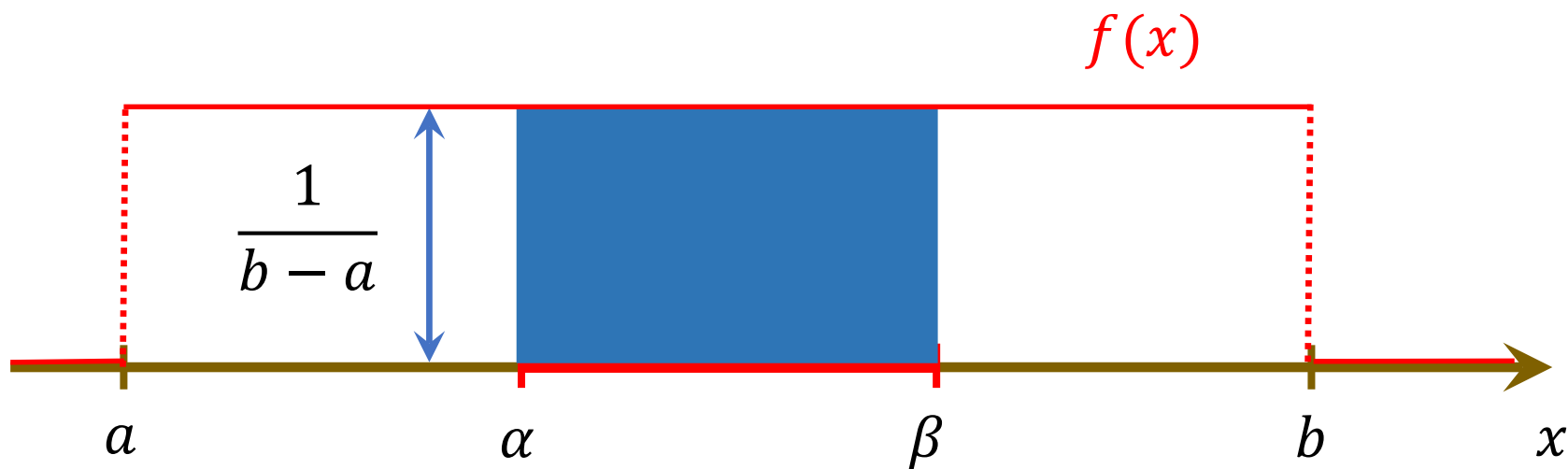
$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

長さの比

< でも $\leq$ でも同じ

➤ どの点も同等に選ばれるという直感的状況が定式化できた！

➤ 確率 $P(\alpha \leq X \leq \beta)$ を面積で与える：



$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

➤ 確率 $P(\alpha \leq X \leq \beta)$ を面積で与える：

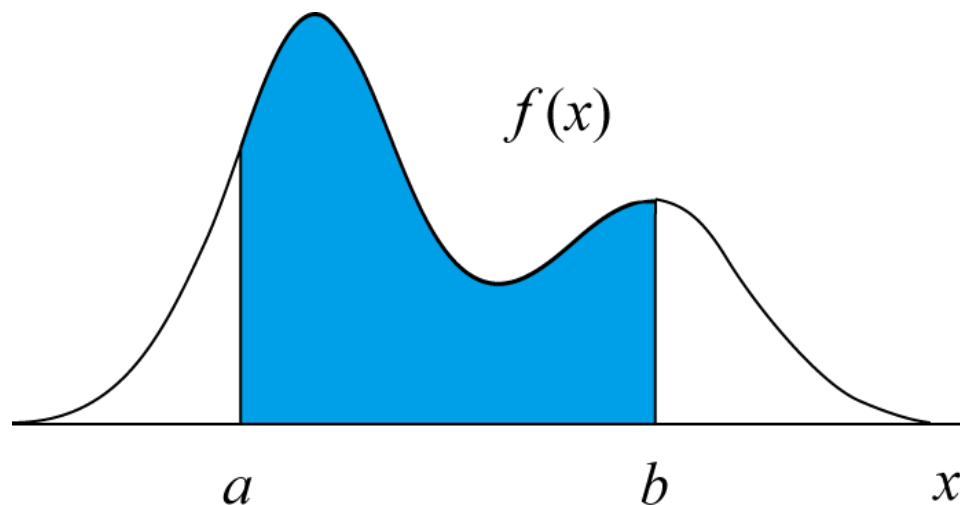


連続型確率変数 X の
確率密度関数は

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

一様分布という

確率密度関数



基本的な性質

$$(1) \quad f(x) \geq 0$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

➤ 面積（定積分）で確率を表す

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

分布関数 (distribution function)

➤ 密度関数の補助として便利

定義 確率変数 X が実数 x 以下の値をとる確率

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

を X の (累積) **分布関数** という. X は離散型でも連続型でもよい.

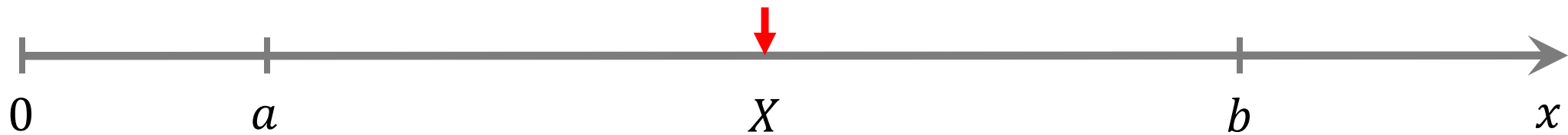
➤ X が密度関数 $f_X(x)$ をもつ連続型確率変数のとき,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx} F_X(x) = F'_X(x) = f_X(x)$$

微分積分学の基本定理

例題 5.1 (再論)

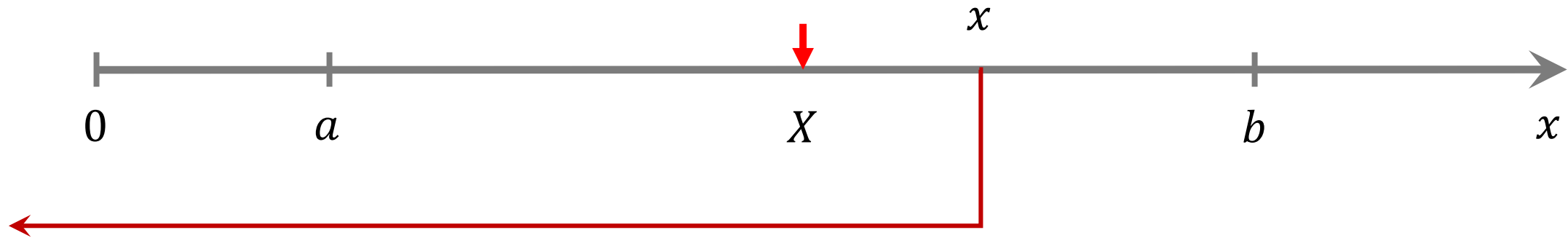
区間 $[a, b]$ からランダムに選ばれた点の座標を X とすれば, X は連続型確率変数になる. X の確率分布を求めよ.



➤ 分布関数を求める $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$x < a \text{ のとき } F(x) = 0$$

$$x > b \text{ のとき } F(x) = 1$$



➤ 分布関数を求める

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$x < a \text{ のとき } F_X(x) = 0$$

$$x > b \text{ のとき } F_X(x) = 1$$

$$a \leq x \leq b \text{ のとき } F_X(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

➤ 密度関数を求める

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = F'_X(x)$$

$$f_X(x) = 0$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a}$$

連続型確率変数の平均値と分散

$f(x)$: 連続型確率変数 X の密度関数

➤ 平均値 $\mathbf{E}[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

➤ 分散 $\mathbf{V}[X] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx = \mathbf{E}[(X - \mu_X)^2]$
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu_X^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$

分散公式

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$$

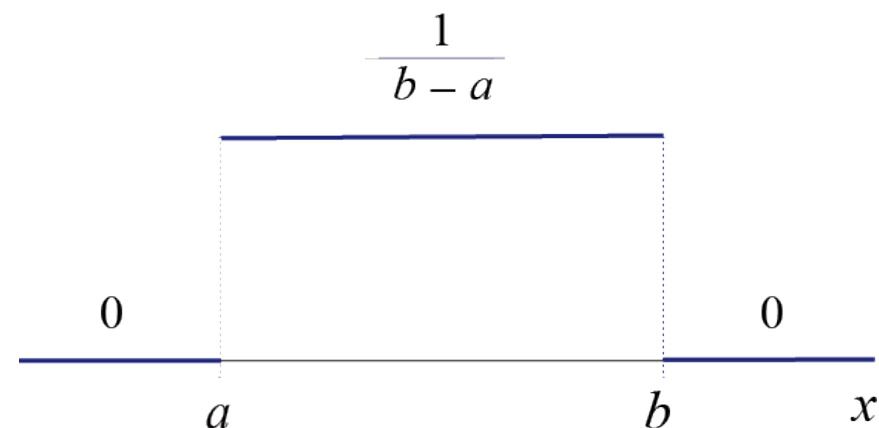
名前の付いた重要な連続分布

- ✓ 一様分布 二項母集団の分布
- ✓ 指数分布 待ち時間の分布
- ✓ 正規分布 統計学で最重要
- ✓ t -分布, χ^2 分布, F 分布 統計的推測で改めて扱う

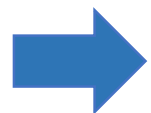
一様分布

密度関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で与えられ, その値が一定であるような分布を一様分布という.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$



区間 $[a, b]$ から1点を, どの点も同程度の確からしさで選ぶとき, 選ばれた点の座標を X とする.



X は連続型確率変数となり, その分布が一様分布

一様分布の平均値と分散

確率変数 X が区間 $[a, b]$ 上の一様分布に従うとき,

$$E[X] = \frac{a + b}{2} \qquad V[X] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

平均値

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_a^b x \frac{dx}{b - a} = \frac{a + b}{2}$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b - a} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

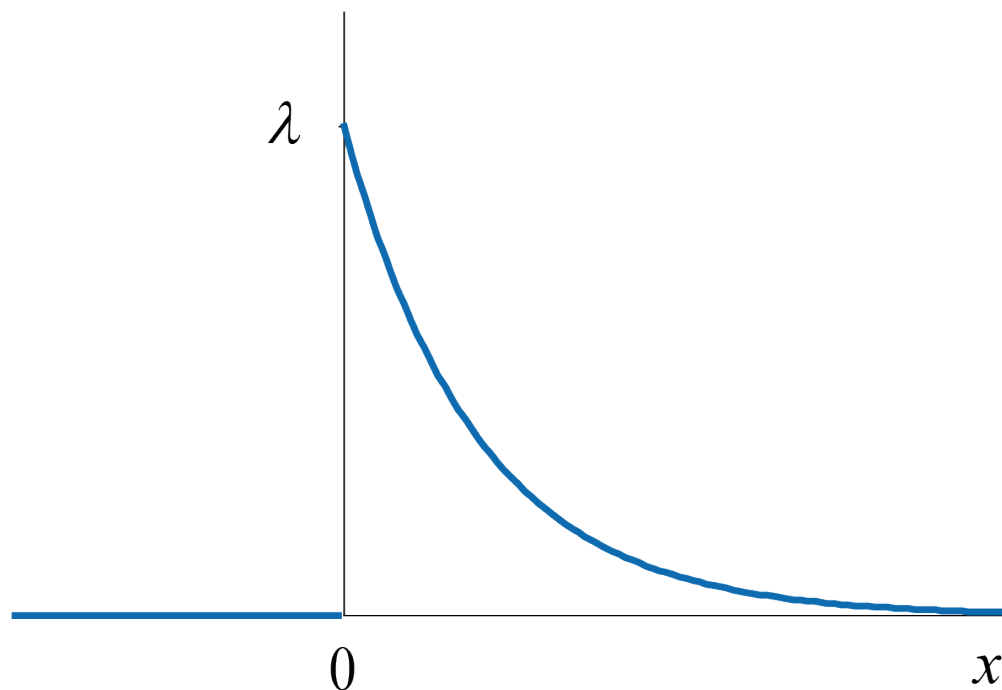
分散

$$\sigma^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$

指数分布

$\lambda > 0$ を定数とする.

確率変数 X がパラメータ λ の指数分布に従うとは, X が次の確率密度関数をもつこと



密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

平均値

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

分散

$$\sigma^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

正規分布 = ガウス分布 $N(\mu, \sigma^2)$

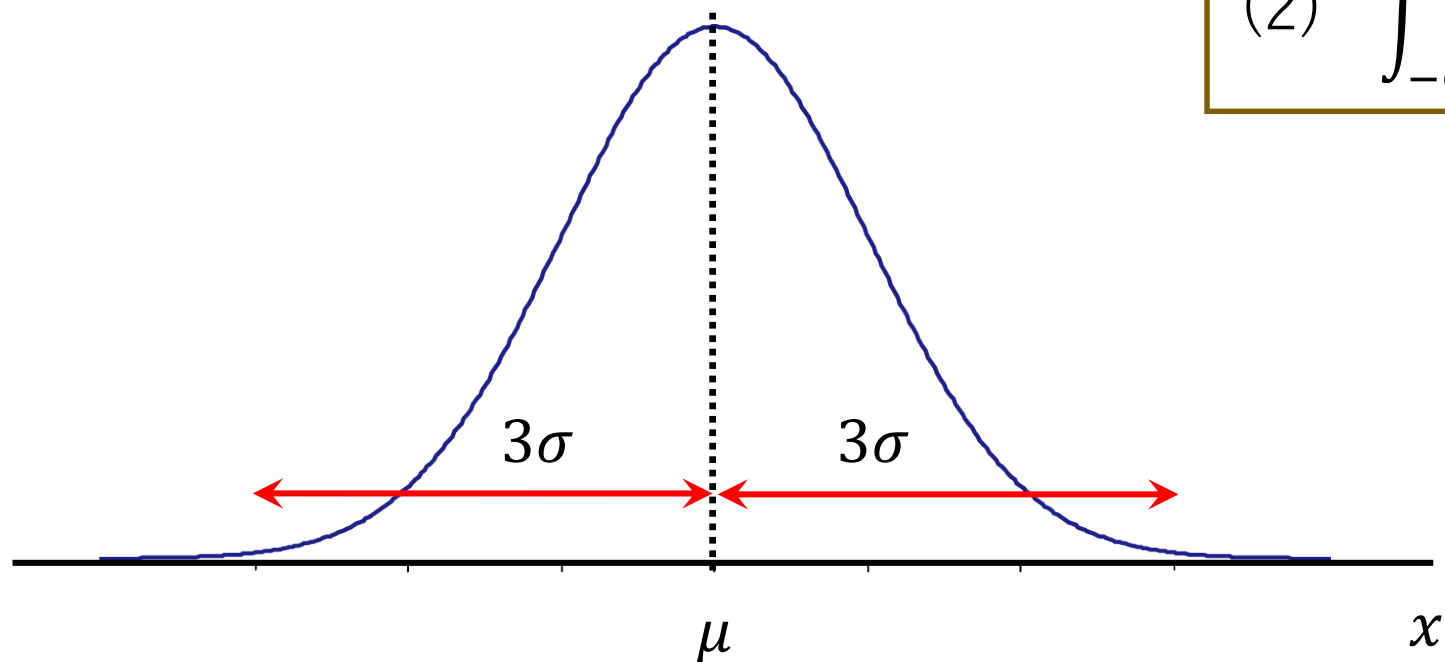
密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

基本的な性質

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

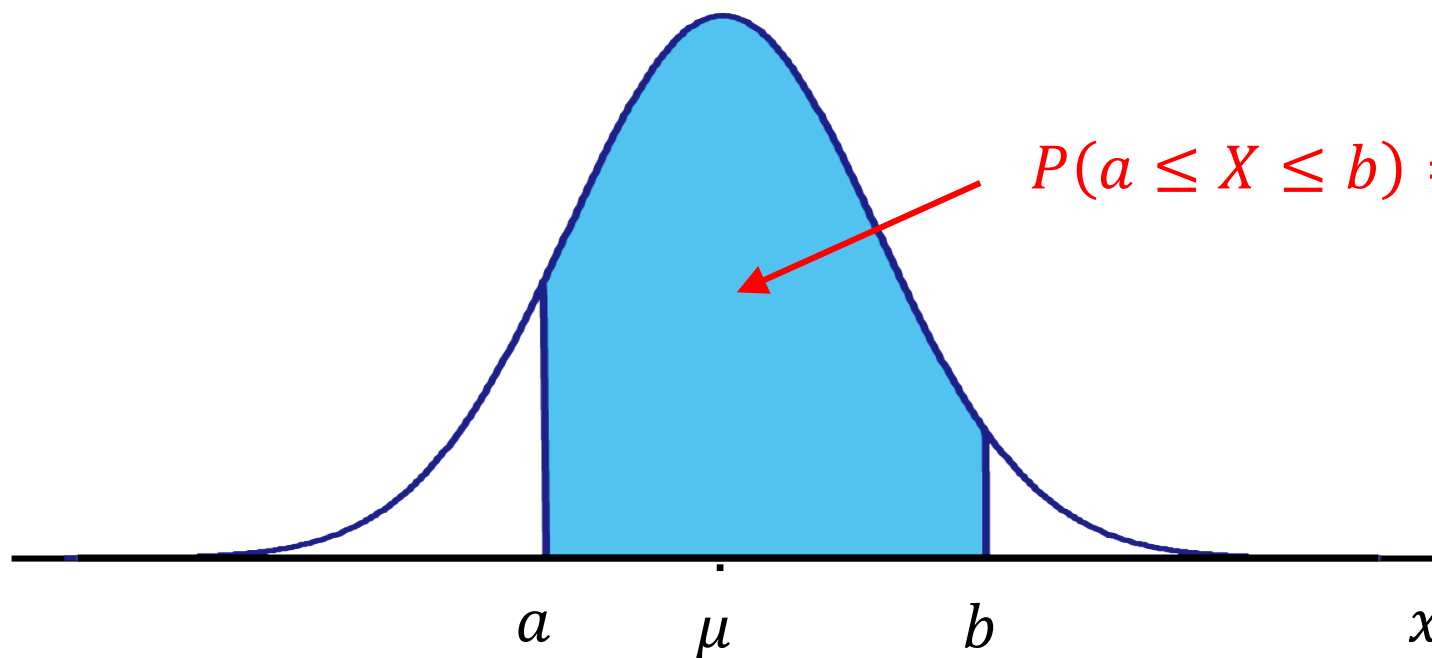


正規分布 = ガウス分布 $N(\mu, \sigma^2)$

密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

正規分布の平均値と分散

密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

密度関数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

重積分と極座標の
典型的練習問題

平均値

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

分散

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

 $N(\mu, \sigma^2)$

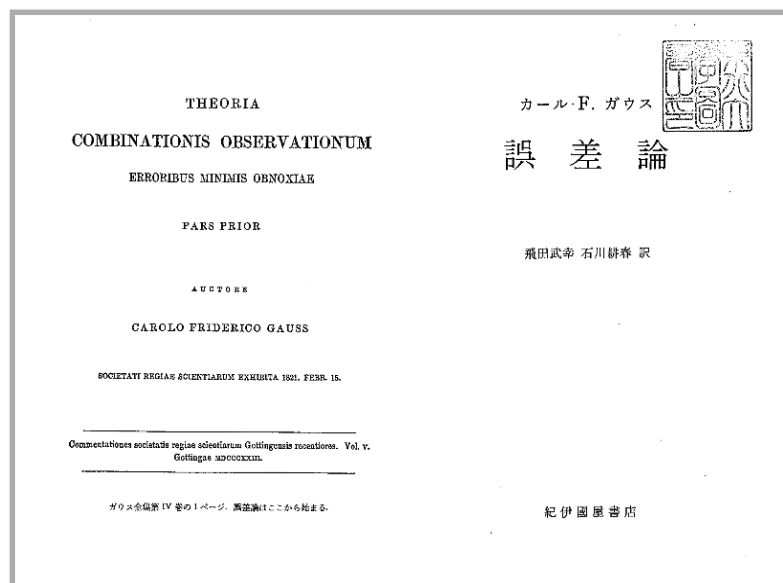
平均値と分散

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



19世紀以降の近代数学のほとんどの分野に影響を与えている：

- 素数定理、平方剰余の相互法則
- 正十七角形の作図、代数学の基本定理、円分多項式
- 最小二乗法(統計)
- 複素数、ガウス平面、複素関数論
- 電磁気などの物理学



1807年～終生

ゲッティンゲンの天文台長（初代）

1809年 『天体運行論』

最小二乗法を用いたデータ補正、正規分布

1821-26年 『誤差を最小にする観測』

標準正規分布 (standard normal distribution)

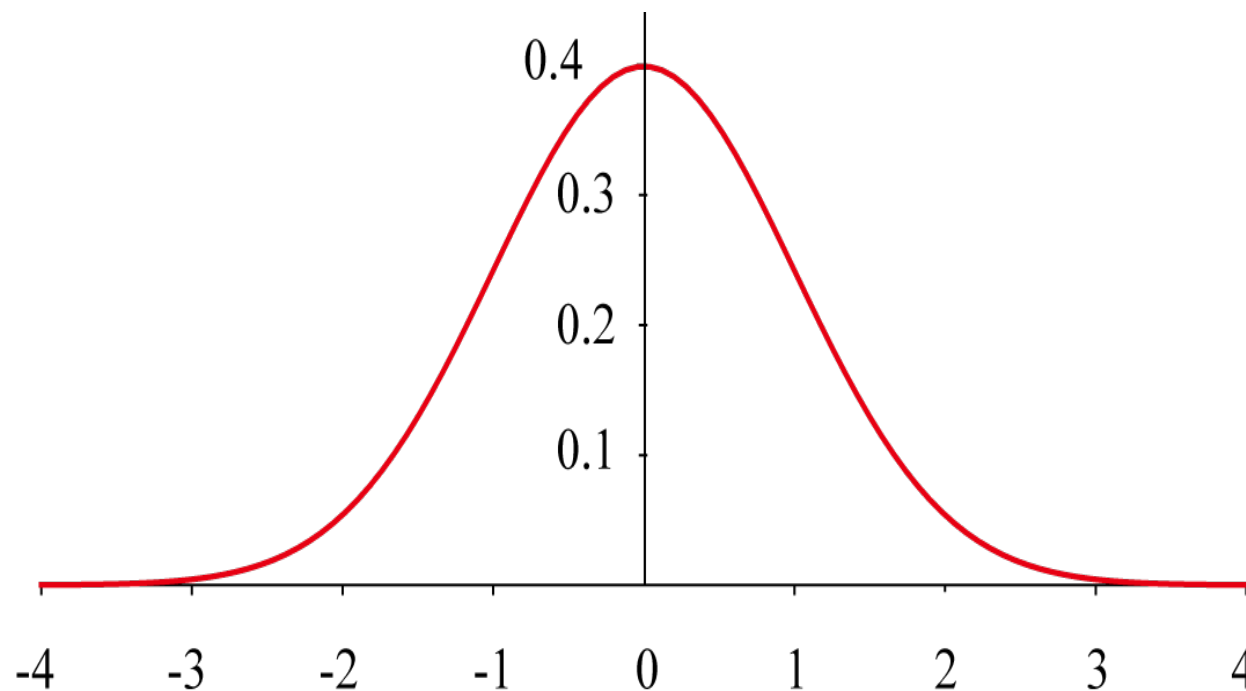
$N(0,1)$

平均値 $\mu = 0$

分散 $\sigma^2 = 1$

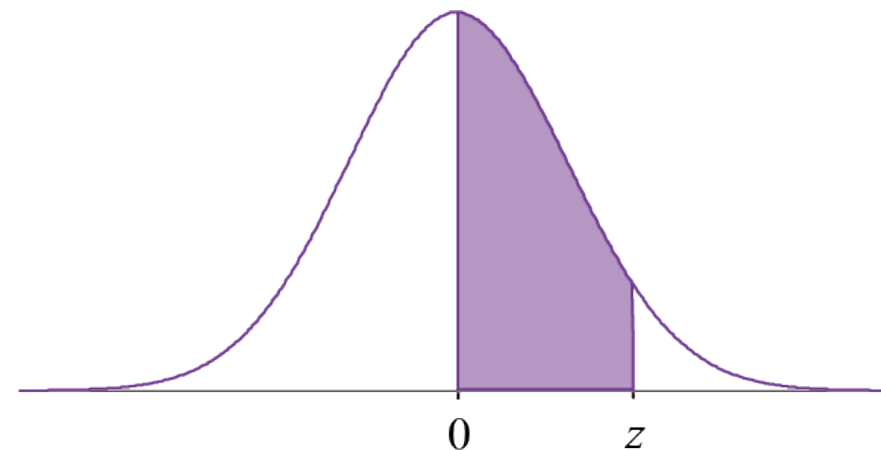
密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



標準正規分布表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990



$$Z \sim N(0,1)$$

$$P(0 \leq Z \leq z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

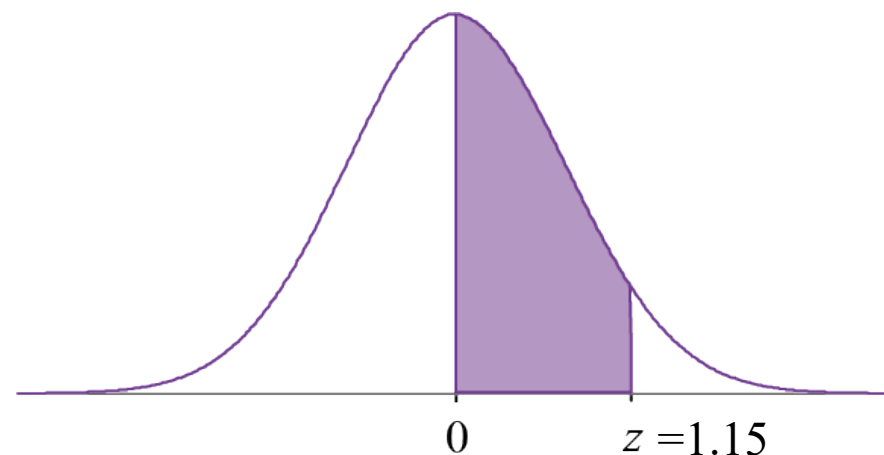
この積分（ $e^{-x^2/2}$ の原始関数）
は初等関数ではない

標準正規分布表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

例

$$P(0 \leq Z \leq 1.15)$$



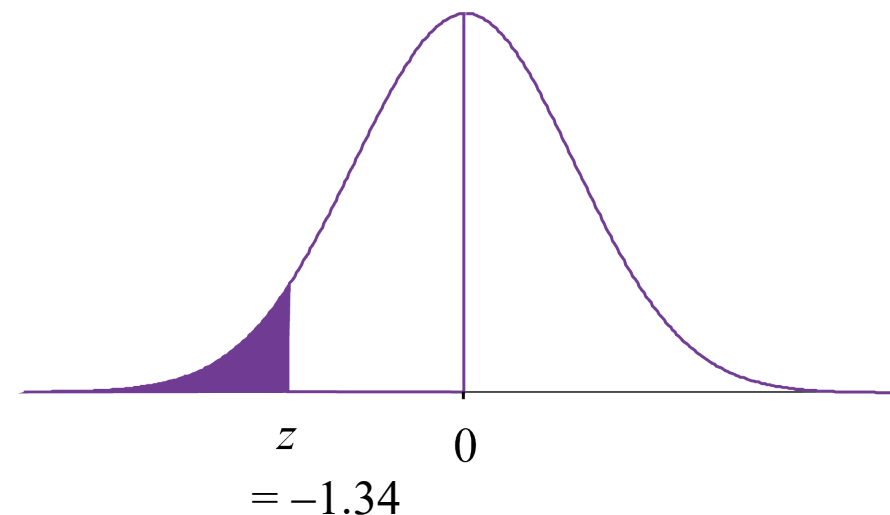
$$P(0 \leq Z \leq 1.15) = 0.3749$$

標準正規分布表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

例

$$P(Z \leq -1.34)$$



$$P(Z \leq -1.34)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.34)$$

$$= 0.5 - 0.4099$$

$$= 0.0901$$

定理 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, その 1 次変換 $a + bX$ (a, b は定数) は正規分布 $N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$ に従う.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \text{標準化}$$

証明 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ より

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

これを用いて, $Y = a + bX$ に対して $P(Y \leq y)$ を求める

証明 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ より

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad \text{ただし, } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

これを用いて, $Y = a + bX$ に対して $P(Y \leq y)$ を求める.

$b > 0$ の場合を扱う. ($b < 0$ の場合も同様, 不等式の向きに注意)

$$P(Y \leq y) = P(a + bX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}} f(x) dx$$

$x = \frac{t-a}{b}$ によって変数変換すると,

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}} f(x) dx = \int_{-\infty}^y f\left(\frac{t-a}{b}\right) \frac{dt}{b} = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2 \sigma^2}} e^{-\frac{(t-a-b\mu)^2}{2b^2 \sigma^2}} dt$$

したがって, $Y \sim N(a + b\mu, b^2 \sigma^2)$

定理

確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, その 1 次変換 $Y = a + bX$ (a, b は定数) も正規分布 $N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$ に従う.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \text{標準化}$$

例 $X \sim N(2, 5^2)$ を標準化すると

$$Z = \frac{X - 2}{5} \sim N(0, 1)$$

例題 5.2 X が正規分布 $N(-1, 2^2)$ に従うとき,

(1) $P(X \leq 2.29)$ を求めよ.

(2) $P(X > x) = 0.01$ であるような x の値を求めよ.

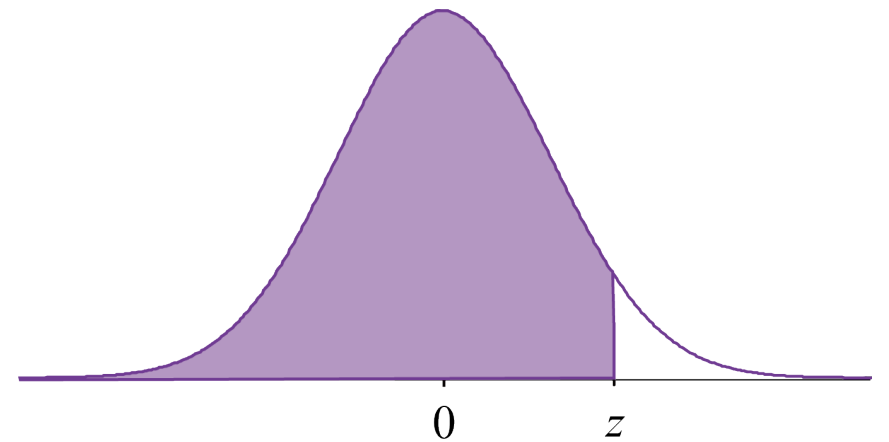
例題 5.2 X が正規分布 $N(-1, 2^2)$ に従うとき,

(1) $P(X \leq 2.29)$ を求めよ.

(2) $P(X > x) = 0.01$ であるような x の値を求めよ.

標準化 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} (1) \quad P(X \leq 2.29) &= P\left(\frac{X - (-1)}{2} \leq \frac{2.29 - (-1)}{2}\right) \\ &= P(Z \leq 1.645) \\ &= 0.5 + 0.45 \\ &= 0.95 \end{aligned}$$



例題 5.2 X が正規分布 $N(-1, 2^2)$ に従うとき,

(1) $P(X \leq 2.29)$ を求めよ.

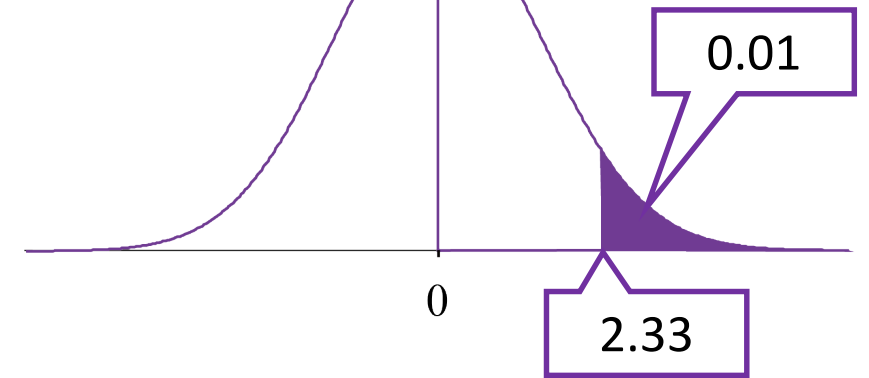
(2) $P(X > x) = 0.01$ であるような x の値を求めよ.

標準化 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} (2) \quad P(X > x) &= P\left(\frac{X - (-1)}{2} > \frac{x - (-1)}{2}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{x + 1}{2}\right) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (2) \quad P(X > x) &= P\left(\frac{X - (-1)}{2} > \frac{x - (-1)}{2}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{x + 1}{2}\right) \end{aligned}} \right\} \frac{x + 1}{2} = 2.33$$

一方, $P(Z > 2.33) = 0.01$

$$\therefore x = 3.66$$



例題 5.3 ある年齢の女性の身長 [cm] は、平均値=156, 標準偏差=5 の正規分布に従うと考えられるとき, 153cm 以上 160cm 以下の女性は全体の何%を占めるか.

【演習 (10分)】

例題 5.3 ある年齢の女性の身長 [cm] は、平均値=156, 標準偏差=5 の正規分布に従うと考えられるとき, 153cm 以上 160cm 以下の女性は全体の何%を占めるか.

身長を X とすると, $X \sim N(156, 5^2)$

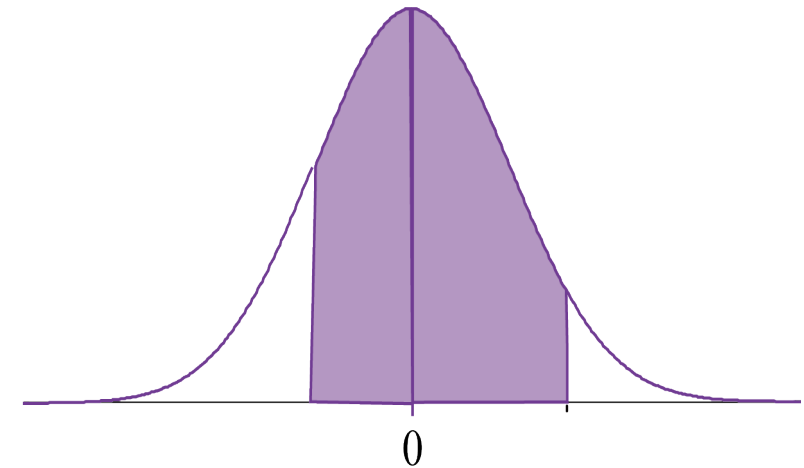
求める割合は $P(153 \leq X \leq 160)$

$$P(153 \leq X \leq 160) = P\left(\frac{153 - 156}{5} \leq \frac{X - 156}{5} \leq \frac{160 - 156}{5}\right)$$

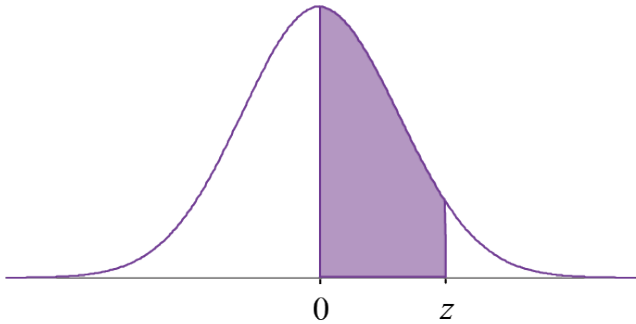
$$= P(-0.6 \leq Z \leq 0.8)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.6) + P(0 \leq Z \leq 0.8)$$

$$= 0.2257 + 0.2881 = 0.5138$$



標準正規分布表



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Python を試してみる

正規分布

- 確率密度関数
- 確率密度関数の図示
- 分布関数

[NormalDistribution - Jupyter Notebook.pdf](#)

例題 5.2 $X \sim N(-1, 2^2)$ のとき,

(1) $P(X \leq 2.29)$

(2) $P(X > x) = 0.01$

例題 5.3 $X \sim N(156, 5^2)$ のとき,

$$P(153 \leq X \leq 160)$$

[Example5.2-3 - Jupyter Notebook.pdf](#)

Lecture 5

連続型確率分布

おわり