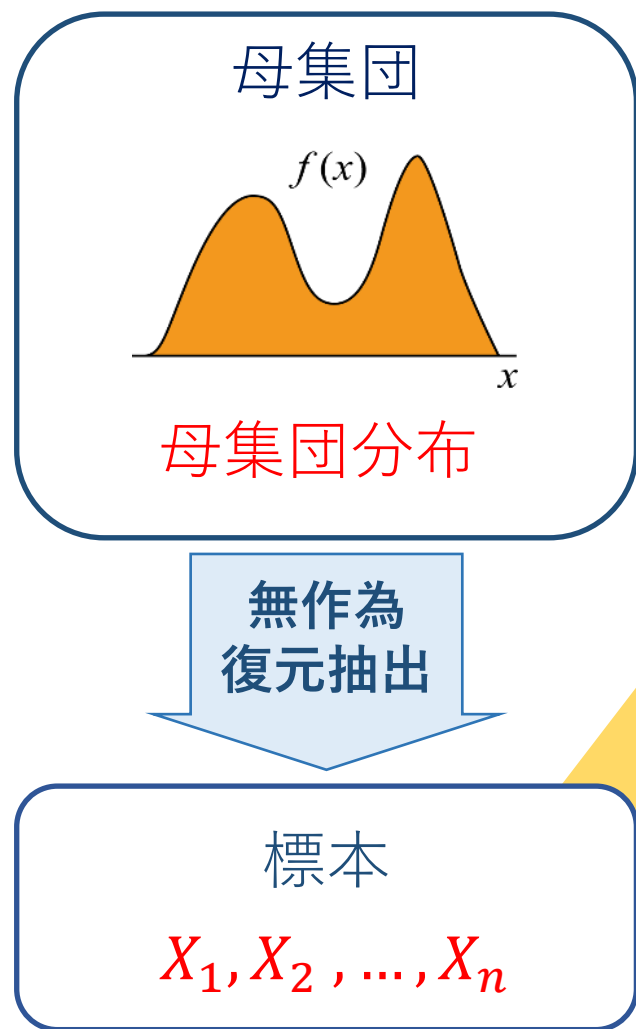


Lecture 7

点推定

推定量 (estimator)



実際に知りたいのは,

母数 θ = 母集団の統計量

平均値, 分散, そのほか

θ を標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を用いて
何らかの合理的な計算で求める.

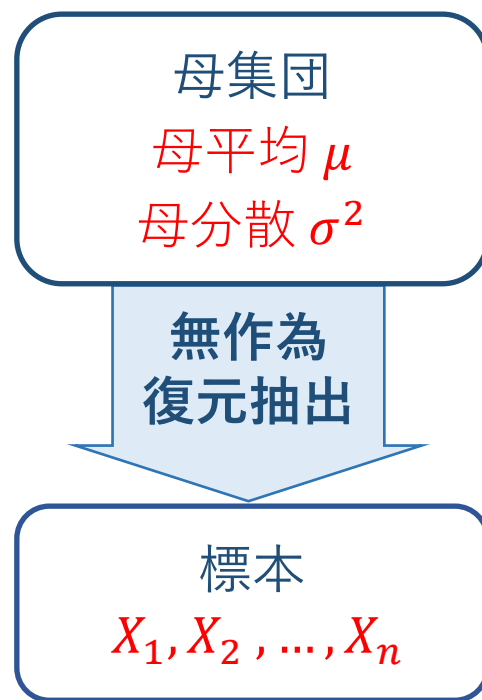
$$\hat{\theta} = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$\hat{\theta}$ を母数 θ の推定量という

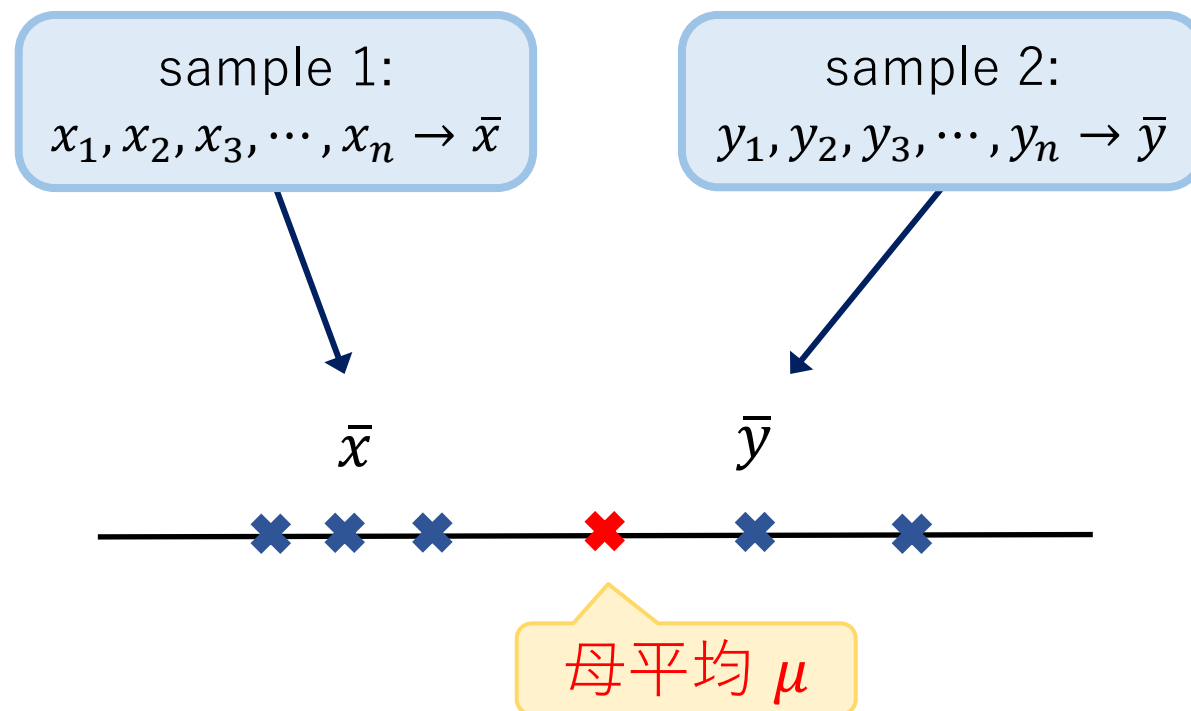
推定量: 確率変数

推定値: データから計算される数値

母平均の推定



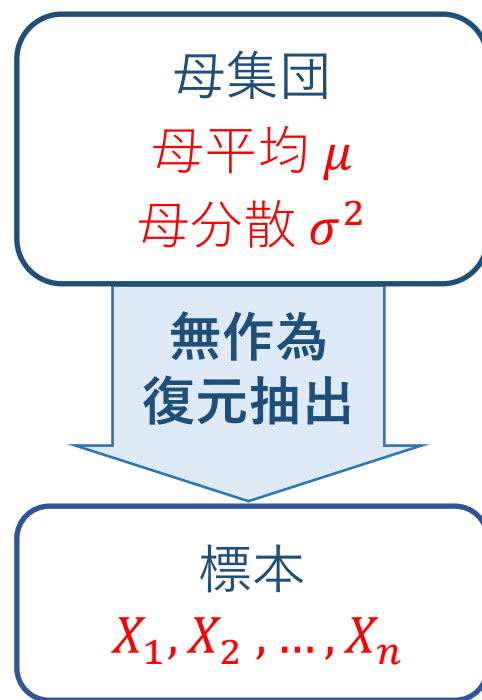
- 標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は母集団分布に従う独立同分布(iid)な確率変数列
- 標本平均 $\bar{X}$ は確率変数である



標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

母平均の推定



標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

- 標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は母集団分布に従う独立同分布(iid)な確率変数列
- 標本平均 $\bar{X}$ は確率変数である

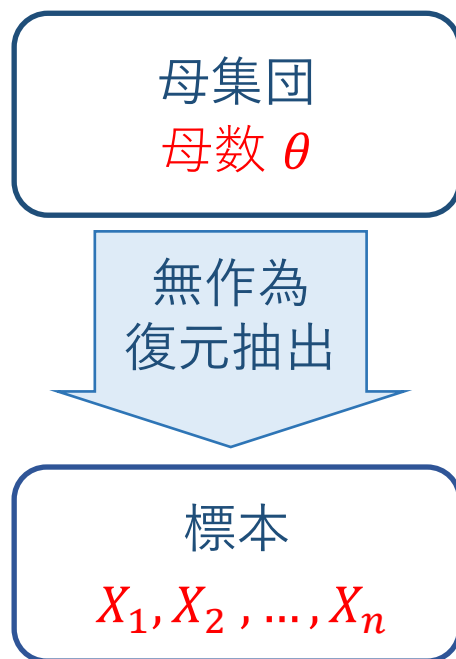
定理（再録）

母平均 μ , 母分散 σ^2 の母集団から取り出された n 個の無作為標本の標本平均 $\bar{X}$ の平均値と分散は

$$E[\bar{X}] = \mu, \quad V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

不偏性： $\bar{X}$ は μ の推定量として合理的である

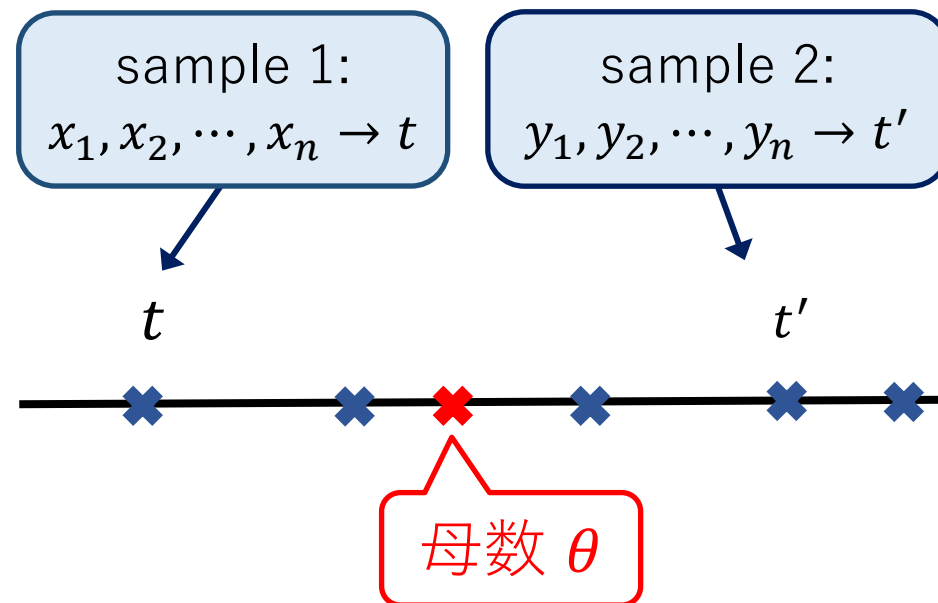
不偏推定量



推定量

$$\hat{\theta} = T(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ = T$$

➤ 推定量 $\hat{\theta} = T$ は確率変数である



定義

推定量 T が $E[T] = \theta$ を満たすとき、
その推定量を不偏推定量という。

例題 7.1 母平均 μ , 母分散 σ^2 の母集団から取り出された無作為標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする.

(1) 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は母平均 μ の不偏推定量である.

(2) 加重平均 $T = \sum_{k=1}^n c_k X_k$ も母平均 μ の不偏推定量である.

ただし, $c_k \geq 0$ かつ $\sum c_k = 1$ ※ 等加重 $c_k = \frac{1}{n}$ の場合が標本平均

例題 7.1 母平均 μ , 母分散 σ^2 の母集団から取り出された無作為標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする.

(1) 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は母平均 μ の不偏推定量である.

(1) $E[\bar{X}] = \mu$ を示せばよい. 簡単である:

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[X_k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu = \mu$$

例題 7.1 母平均 μ , 母分散 σ^2 の母集団から取り出された無作為標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする.

(1) 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は母平均 μ の不偏推定量である.

(2) 加重平均 $T = \sum_{k=1}^n c_k X_k$ も母平均 μ の不偏推定量である.

ただし, $c_k \geq 0$ かつ $\sum c_k = 1$ ※ 等加重 $c_k = \frac{1}{n}$ の場合が標本平均

(2) 平均値の線形性を用いるだけ.

$$E[T] = E\left[\sum_{k=1}^n c_k X_k\right] = \sum_{k=1}^n c_k E[X_k] = \sum_{k=1}^n c_k \mu = \mu \sum_{k=1}^n c_k = \mu$$

例題 7.2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は独立で同一分布に従う観測で, その平均は $E[X_i] = \mu$, 分散は $V[X_i] = \sigma^2$ であるとする. 定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ を係数とする観測の線形関数 $T = c_1X_1 + \dots + c_nX_n$ を考える.

- (1) T が μ の不偏推定量であるために, 定数 $c_1, \dots, c_n$ の満たすべき条件を求めよ.
 - (2) 線形不偏推定量の中で, 分散を最小にする定数 $c_1, \dots, c_n$ を求めよ.
-

例題 7.2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は独立で同一分布に従う観測で, その平均は $E[X_i] = \mu$, 分散は $V[X_i] = \sigma^2$ であるとする. 定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ を係数とする観測の線形関数 $T = c_1X_1 + \dots + c_nX_n$ を考える.

- (1) T が μ の不偏推定量であるために, 定数 $c_1, \dots, c_n$ の満たすべき条件を求めよ.
- (2) 線形不偏推定量の中で, 分散を最小にする定数 $c_1, \dots, c_n$ を求めよ.

【演習 10分】

[ヒント]

- (1) [平均値の線形性] 確率変数 X, Y と 定数 a, b に対して

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

- (2) [分散の加法性] 独立な確率変数 X, Y と 定数 a, b に対して

$$V[aX + bY] = a^2 V[X] + b^2 V[Y]$$

例題 7.2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は独立で同一分布に従う観測で, その平均は $E[X_i] = \mu$, 分散は $V[X_i] = \sigma^2$ であるとする. 定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ を係数とする観測の線形関数 $T = c_1X_1 + \dots + c_nX_n$ を考える.

- (1) T が μ の不偏推定量であるために, 定数 $c_1, \dots, c_n$ の満たすべき条件を求めよ.
 (2) 線形不偏推定量の中で, 分散を最小にする定数 $c_1, \dots, c_n$ を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad E[T] &= E[c_1X_1 + \dots + c_nX_n] \\
 &= c_1E[X_1] + \dots + c_nE[X_n] \\
 &= c_1\mu + \dots + c_n\mu \\
 &= (c_1 + \dots + c_n)\mu
 \end{aligned}$$

$E[T] = \mu$ となるのは
 $c_1 + \dots + c_n = 1$
 のときである.

※ このとき T を加重平均という

例題 7.2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は独立で同一分布に従う観測で, その平均は $E[X_i] = \mu$, 分散は $V[X_i] = \sigma^2$ であるとする. 定数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ を係数とする観測の線形関数 $T = c_1X_1 + \dots + c_nX_n$ を考える.

- (1) T が μ の不偏推定量であるために, 定数 $c_1, \dots, c_n$ の満たすべき条件を求めよ.
- (2) 線形不偏推定量の中で, 分散を最小にする定数 $c_1, \dots, c_n$ を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad V[T] &= V[c_1X_1 + \dots + c_nX_n] \\
 &= V[c_1X_1] + \dots + V[c_nX_n] \\
 &= c_1^2V[X_1] + \dots + c_n^2V[X_n] \\
 &= (c_1^2 + \dots + c_n^2)\sigma^2
 \end{aligned}$$

※ $c_1 + \dots + c_n = 1$ のもとで

$$c_1^2 + \dots + c_n^2$$

の最小値を考える.

※ $c_1 + \cdots + c_n = 1$ のもとで $c_1^2 + \cdots + c_n^2$ の最小値を考える.

$$\begin{aligned} c_1^2 + \cdots + c_n^2 &= \left(c_1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(c_n - \frac{1}{n}\right)^2 + 2\frac{1}{n}(c_1 + \cdots + c_n) - n\left(\frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \left(c_1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(c_n - \frac{1}{n}\right)^2 + \boxed{\frac{2}{n} - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

したがって, $c_1^2 + \cdots + c_n^2$ は

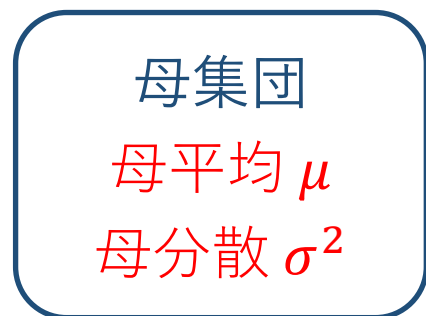
$$c_1 = \cdots = c_n = \frac{1}{n} \quad (*)$$

算術平均
(普通の平均)

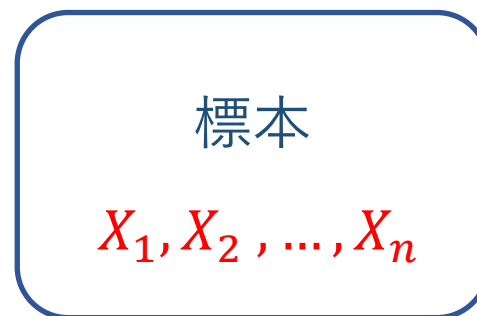
のとき最小値 $\frac{1}{n}$ をとる.

つまり, $T = c_1X_1 + \cdots + c_nX_n$ の分散は $(*)$ のとき 最小になる.

不偏推定量の比較



無作為復元抽出



標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

加重平均

$$T = \sum_{k=1}^n c_k X_k$$

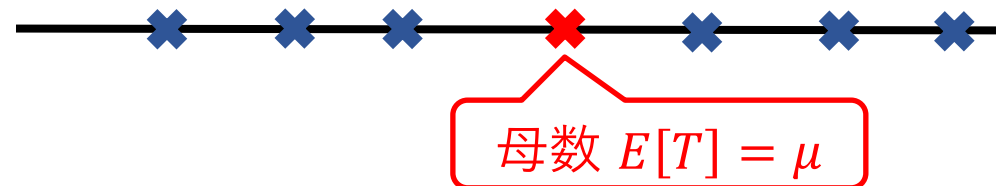
- 標本平均 $\bar{X}$, 加重平均 T とともに母平均 μ の不偏推定量である.

$$E[\bar{X}] = E[T] = \mu$$

- $\bar{X}$ の方が揺らぎが小さい

$$V[\bar{X}] \leq V[T]$$

⇒ $\bar{X}$ の方が推定量として優れている



不偏推定量の比較



2つの不偏推定量

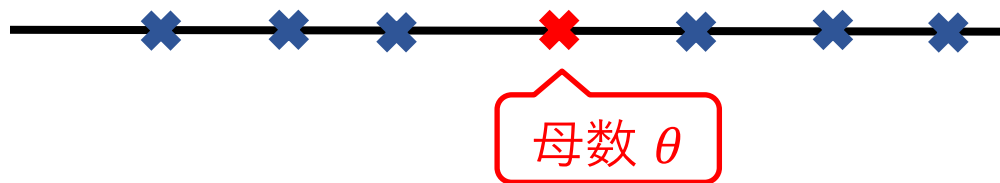
$$T_1 = T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$T_2 = T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

➤ 不偏性から $E[T_1] = E[T_2] = \theta$

➤ 分散： $V[T_1] = E[(T_1 - \theta)^2]$

$$V[T_2] = E[(T_2 - \theta)^2]$$



定義

$V[T_1] \leq V[T_2]$ のとき, T_1 は T_2 より有効 (efficient) であるという.

標本分散と不偏分散



標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

不偏分散

$$U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

定理 母平均 μ , 母分散 σ^2 の母集団から取り出された n 個の無作為標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とするとき,

(1) 標本分散 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ の平均値は $E[S^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$

(2) 不偏分散 $U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ の平均値は $E[U^2] = \sigma^2$

つまり, 不偏分散は母分散の不偏推定量である.

証明 計算でわかる (教科書を見よ)

例題 7.3 (ドイツ戦車問題)

1番から順に通し番号がついている戦車が街を巡回している. 目撃された番号が X_1, X_2, X_3 であったとき, それらの最大値を $M = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ とおく.

このとき, $\hat{N} = \frac{4}{3}M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である.

例題 7.3 (ドイツ戦車問題)

1番から順に通し番号がついている戦車が街を巡回している. 目撃された番号が X_1, X_2, X_3 であったとき, それらの最大値を $M = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ とおく. このとき, $\hat{N} = \frac{4}{3}M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である.

まず, M の確率分布を求めて, $E[M]$ を計算しよう.

$$P(M = k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{N}{3}} = \frac{3!(k-1)(k-2)}{2!N(N-1)(N-2)} = \frac{3(k-1)(k-2)}{N(N-1)(N-2)}$$

$$E[M] = \sum_{k=1}^N kP(M = k) = \frac{3}{N(N-1)(N-2)} \sum_{k=1}^N k(k-1)(k-2)$$

$$\text{※ } E[M] = \frac{3}{N(N-1)(N-2)} \sum_{k=1}^N k(k-1)(k-2) \quad \text{の計算}$$

【計算のトリック】

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k(k-1)(k-2) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \{(k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3)\} \\ &= \frac{1}{4} (N+1)N(N-1)(N-2) \end{aligned}$$

したがって,

$$E[M] = \frac{3}{N(N-1)(N-2)} \times \frac{1}{4} (N+1)N(N-1)(N-2) = \frac{3}{4} (N+1)$$

N について解くと, $E\left[\frac{4}{3}M - 1\right] = N$. よって, $\hat{N} = \frac{4}{3}M - 1$ は N の不偏推定量.

例題 7.3 (ドイツ戦車問題)

目撃された番号が $X_1, X_2, \dots, X_n$ であったとき, それらの最大値を

$$M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

とすれば, $\hat{N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である.

例題 7.3 (ドイツ戦車問題)

目撃された番号が $X_1, X_2, \dots, X_n$ であったとき, それらの最大値を

$$M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

とすれば, $\hat{N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である.

➤ $n = 3$ の場合に倣って確認できる

➤ Python を使ってみる

$\hat{N}$ の分布をシミュレーションで確認

[GermanTankProblem – Jupyter Notebook.pdf](#)

例題 7.3 (ドイツ戦車問題)

目撃された番号が $X_1, X_2, \dots, X_n$ であったとき, それらの最大値を

$$M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

とすれば, $\hat{N} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) M - 1$ は戦車の総数 N の不偏推定量である.

Month	Statistical estimate	Conventional estimate*)	German records
June 1940	169	1,000	122
June 1941	244	1,550	271
August 1942	327	1,550	342

*) 連合軍情報本部の伝統手法

Lecture 7

点推定

おわり