Lecture 9

母平均の検定

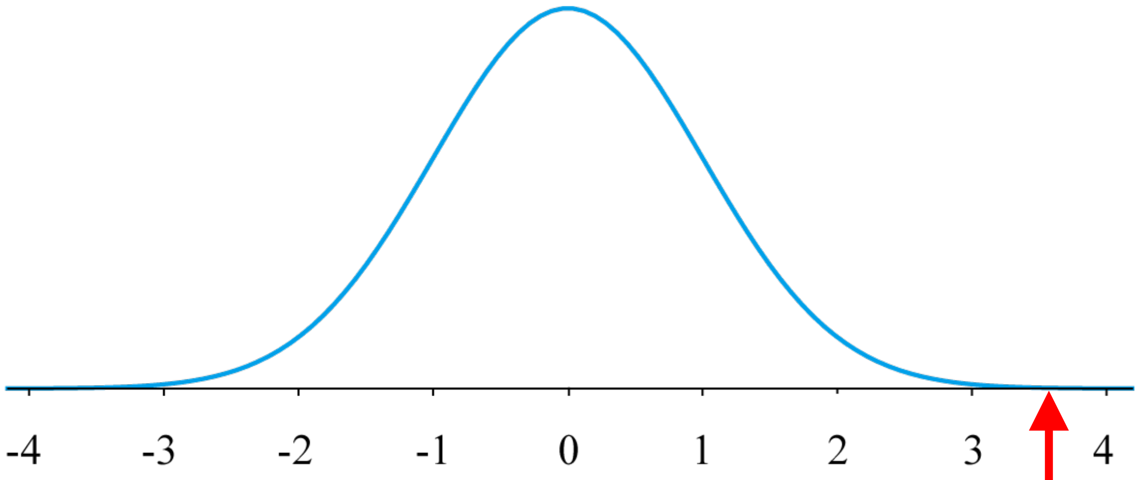
典型例　コインを 100 回投げて, 表が 67 回出た. コインは公平といえるか?

X ：100回投げて表の出る回数

$$X \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right) \approx N(50, 5^2)$$

正規分布近似が便利

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$



実現値　$z = \dfrac{67 - 50}{5} = 3.4$

判断：かなり稀？

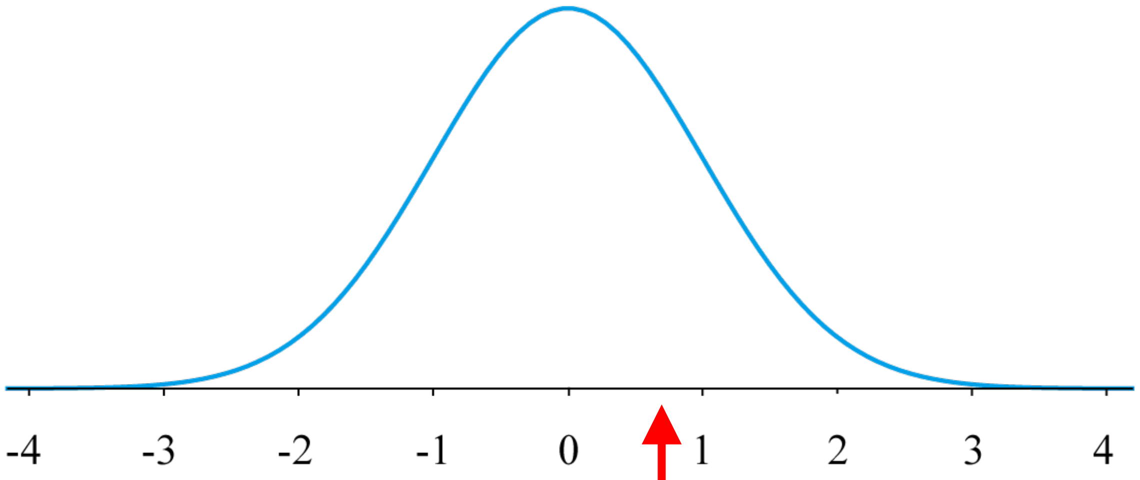
典型例　コインを 100 回投げて, 表が 54 回出た. コインは公平といえるか?

X ：100回投げて表の出る回数

$$X \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right) \approx N(50, 5^2)$$

正規分布近似が便利

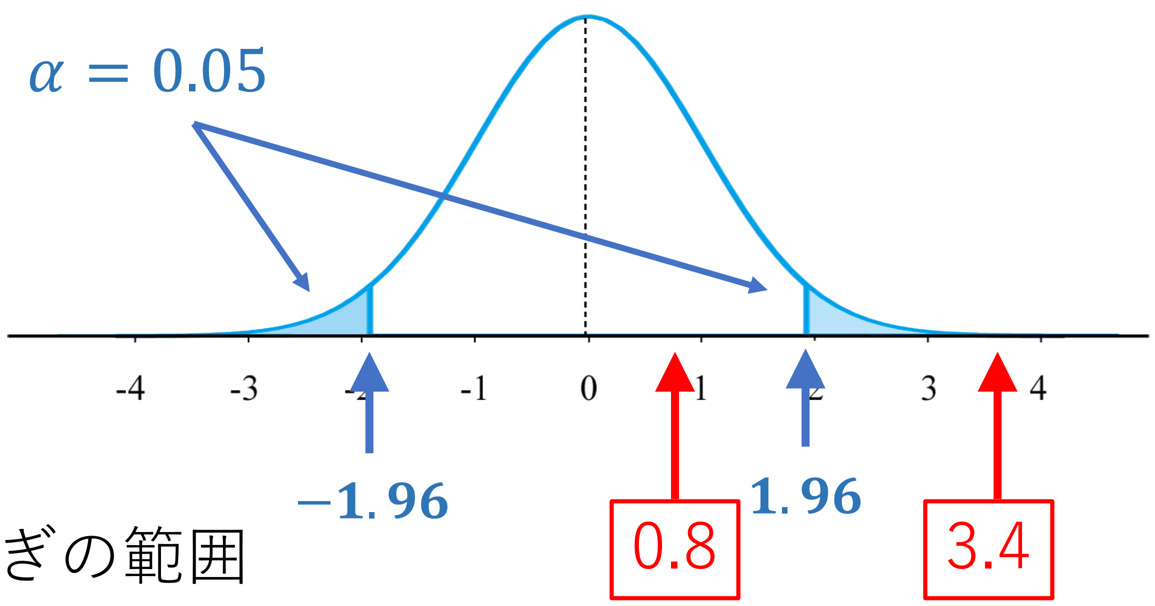
$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$



実現値　$z = \dfrac{54 - 50}{5} = 0.8$

判断：ふつうに起こる？

仮説検定の考え方



コインを 100 回投げて,

- 表が 54 回出た.

$$z = \frac{54 - 50}{5} = 0.8$$

偶然の揺らぎの範囲

合理的、客観的な判断のためには、どのくらい小さな確率を稀とするかを決める

- 表が 67 回出た.

$$z = \frac{67 - 50}{5} = 3.4$$

稀なことが起こった？

たとえば、$\alpha = 0.05$

これを有意水準という

そうではなく、仮説が間違いだったと判断

仮説検定の手順

(1) 母数に関する**帰無仮説**と**対立仮説**を決める.

H_0　　　H_1

(2) 関連する確率変数 T (**検定統計量**)を選び, H_0 の下で, この確率変数の分布を調べる

(3) **有意水準** $0 < \alpha < 1$ と**棄却域** W を決める.

(4) 標本から T の**実現値** t を計算する.

- $t \in W$ ⇒実現値は有意水準 α で**有意**である
  ⇒ H_0 を**棄却する** ⇒ H_1 を採択する.
- $t \notin W$ ⇒実現値は有意水準 α で有意でない
  ⇒ H_0 を**棄却できない**
  (⇒ H_0 を採択する)

例　コインを 100 回投げて, 表が 67 回出た. コインは公平といえるか?

p ：表の出る確率

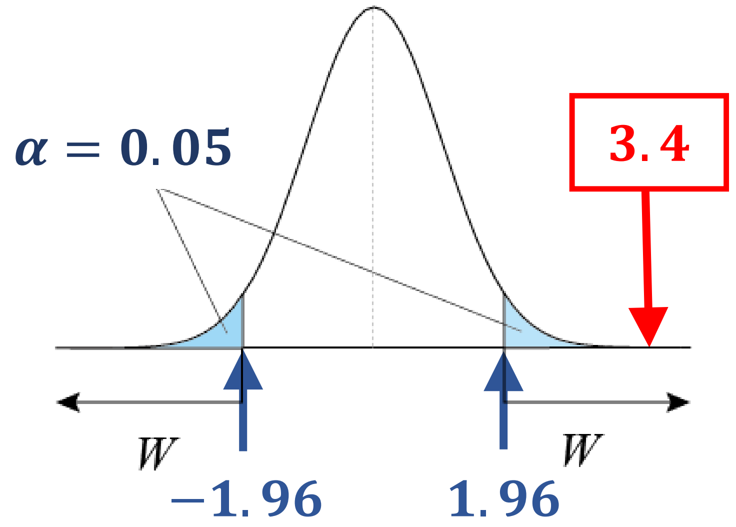
$H_0：p = \dfrac{1}{2}$　　$H_1：p \neq \dfrac{1}{2}$　　$\alpha = 0.05$

X ：表の回数 $\sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$

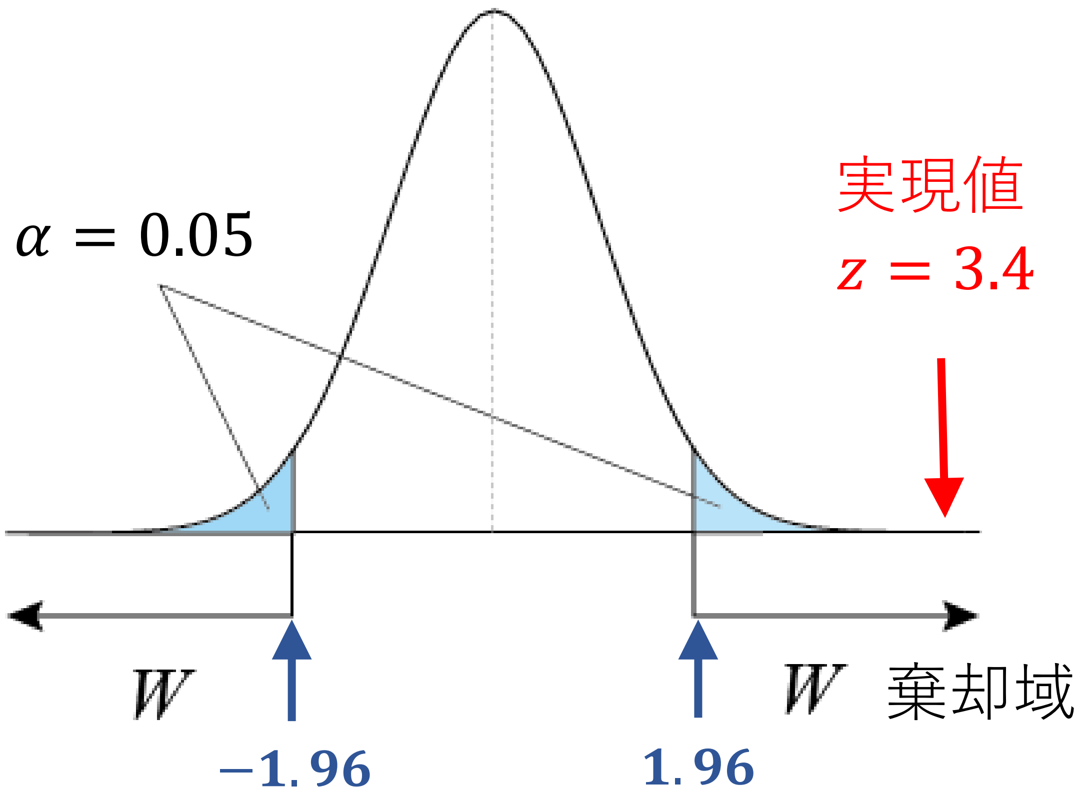
実現値

$z = 3.4$



結論　H_0 を棄却する

有意水準の意味

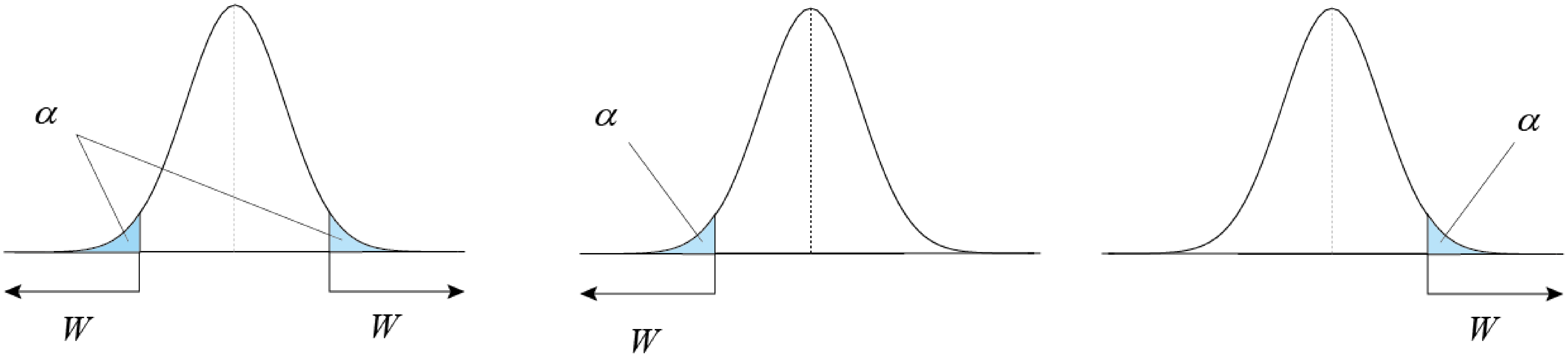


結論：H_0 を棄却する

有意水準 α は, 帰無仮説 H_0 が正しいのに, 帰無仮説を棄却してしまって, 検定の結論を間違える誤り確率

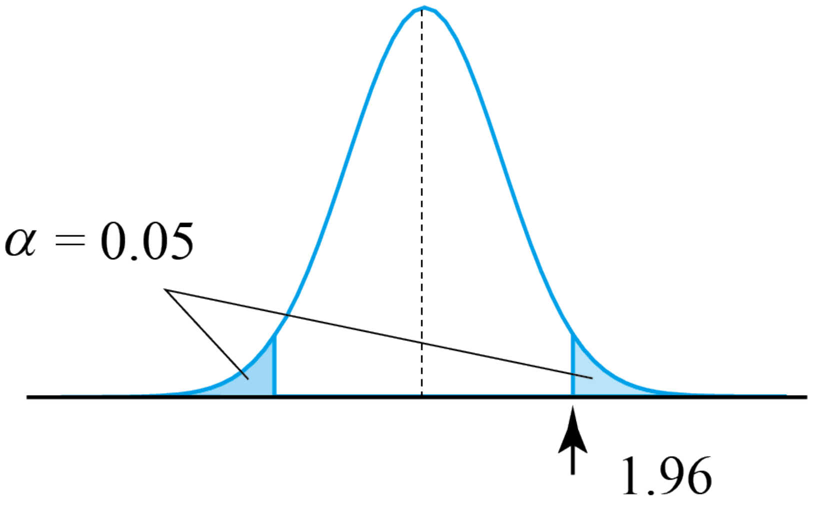
【注目】有意水準 α は文脈に応じて自分で設定する

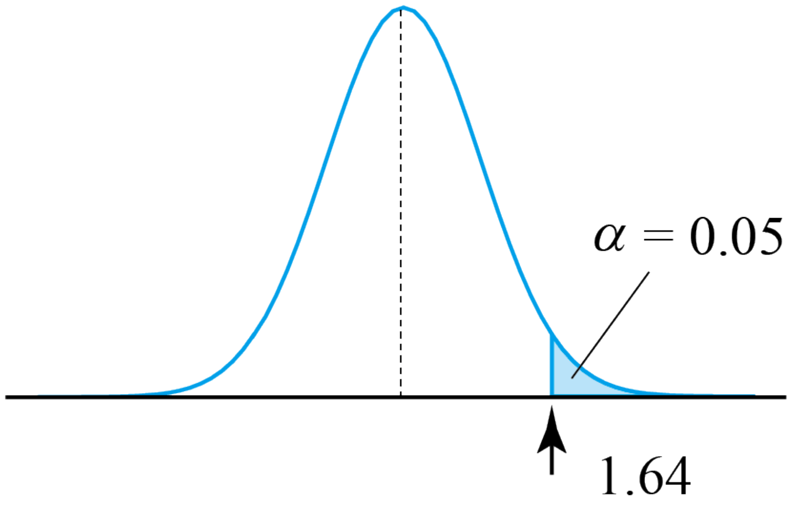
棄却域の設定：両側検定と片側検定



- 使い分けは文脈による
- 数理統計学の範疇ではない

両側 α 点と上側 α 点： $N(0,1)$ の場合



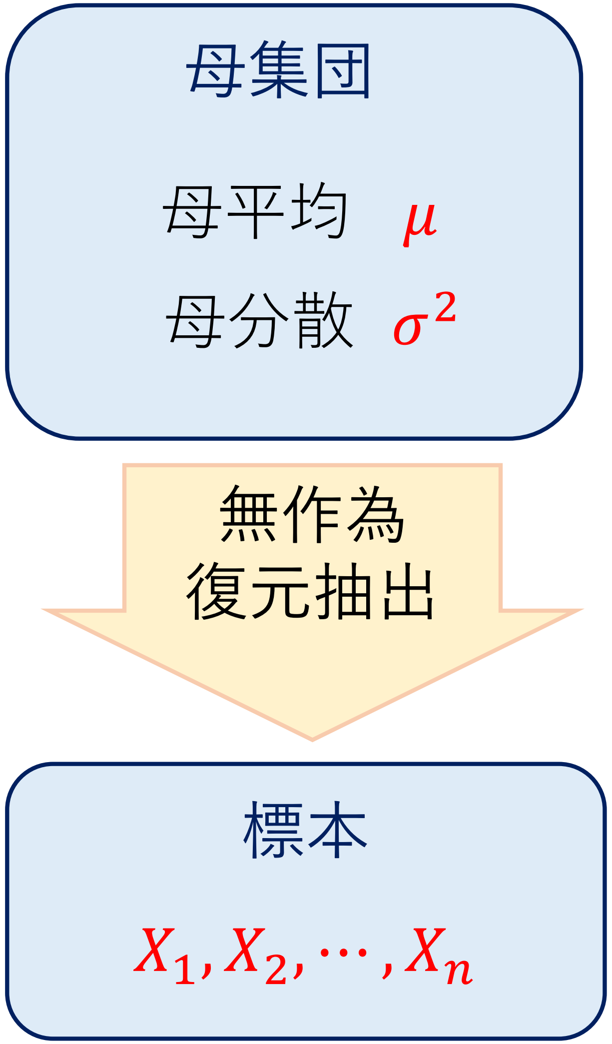


1.96 = 両側 5 % 点 = 上側 2.5 % 点

1.64 = 上側 5 % 点 = 両側 10 % 点

両側	α	0.3173	0.1000	0.0500	0.0455	0.0100	0.0027	0.0010
上側	$\alpha/2$	0.1587	0.0500	0.0250	0.0228	0.0050	0.0013	0.0005
	z	1.000	1.645	1.960	2.00	2.576	3.000	3.290

母平均の検定



基本的な問題

母平均を$\mu = m_0$ とみなしてよいか？

帰無仮説と対立仮説

H_0: $\mu = m_0$

H_1: $\mu \neq m_0$ （両側検定）

H_1: $\mu > m_0$ または H_1: $\mu < m_0$ （片側検定）

有意水準 α

$\alpha = 0.05$,　$\alpha = 0.01$ など

標本平均の分布（復習）

母集団

母平均 μ

母分散 σ^2

↓ 無作為復元抽出

標本（大きさ：n）

標本平均：$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

不偏分散：$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

母集団	基本定理	使う確率分布
正規母集団	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	標準正規分布
正規母集団	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{U/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	自由度 $n-1$ の t-分布
一般の母集団 n：大きい	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 近似的に成立	標準正規分布

例題 9.1

ある中学校で 1 年生 44 名に集団式知能検査を実施したところ，偏差値の平均は 52.4 であった. この学校の 1 年生は平均的な生徒といえるか. ただし, 全国における知能検査の偏差値は $N(50, 10^2)$ に従うことが知られている.

例題 9.1

母集団

母平均 μ

母分散 $\sigma^2 = 10^2$

標本

大きさ $n = 44$

標本平均の実現値

$\bar{x} = 52.4$

帰無仮説と対立仮説　$H_0\colon \mu = 50$　$H_1\colon \mu \neq 50$

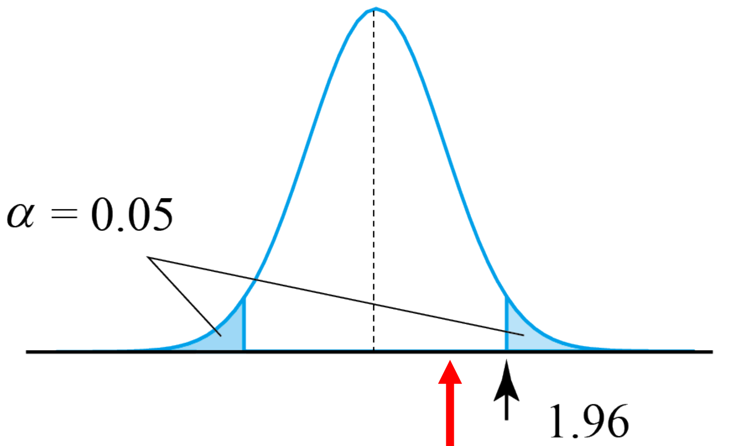
有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　H_0 の下で,

$$\bar{X} \sim N\left(50, \frac{10^2}{44}\right) = N(50, 1.51^2)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 50}{1.51} \sim N(0,1)$$

実現値　$$z = \frac{52.4 - 50}{1.51} = 1.59$$



結論　有意水準 5% の両側検定で H_0 は棄却されない.
（有意でない）

例題 9.2

あるメーカーの電化製品の寿命は, カタログによると平均 $\mu = 1200$ 時間, 標準偏差 $\sigma = 150$ 時間と書かれている.　$n = 10$ 個のサン プルについてテスト したとき，平均寿命が $\bar{x} = 1100$ 時間であった. カタログは偽りといえるか .

例題 9.2

母集団

母平均 μ

母分散 $\sigma^2 = 150^2$

↓

標本

大きさ $n = 10$

標本平均の実現値

$\bar{x} = 1100$

帰無仮説と対立仮説　$H_0\colon \mu = 1200$　　$H_1\colon \mu < 1200$

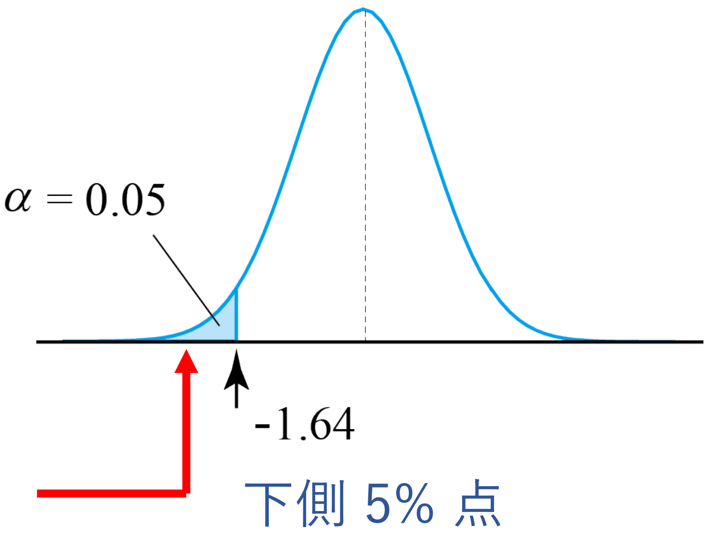
有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　H_0 の下で,

$$\bar{X} \sim N\left(1200, \frac{150^2}{10}\right) = N(1200, 47.4^2)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 1200}{47.4} \sim N(0,1)$$

実現値　$z = \dfrac{1100 - 1200}{47.4} = -2.11$



結論　有意水準 5% の片側検定で H_0 は棄却される.

（有意である）

P 値

➢ 伝統的な仮説検定

有意水準 α を示して H_0 の棄却・採択を述べる.

➢ P値を示す

棄却・採択の判断はせず, 実現値が帰無仮説 H_0 の下で, どのくらい外れているかを数量的に示す.

定 義

P値 = 実現値 x を含めて, それ以上起こりにくい実現値が出現する確率

例題 9.3

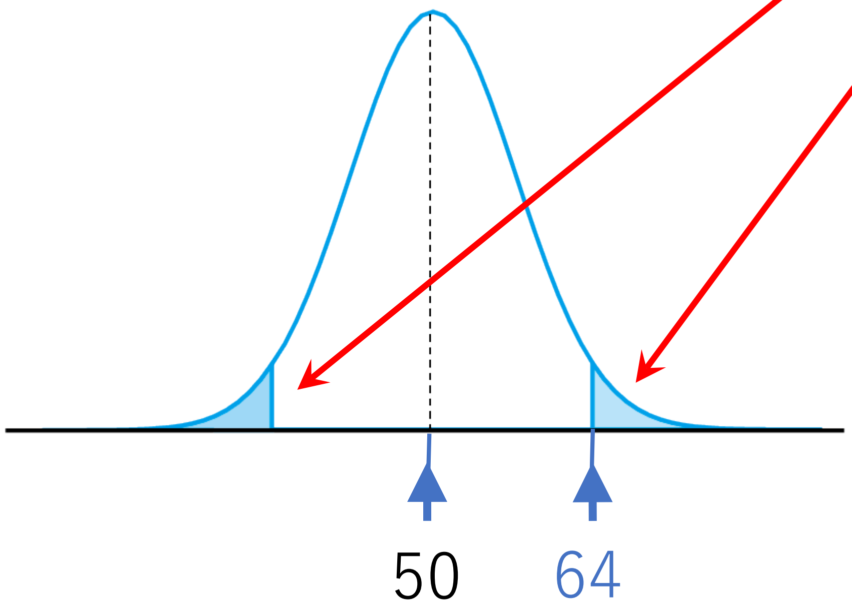
公平なコインかどうか確認のため 100回振ったところ表が 64 回出た.

例題 9.3

公平なコインかどうか確認のため 100回振ったところ表が 64 回出た.

$H_0 : p = 0.5 \quad H_1 : p \neq 0.5$

$X \sim B(100, 0.5) = N(50, 5^2)$



$$P = 2P(X \geq 64)$$

$$= 2P\left(\frac{X - 50}{5} \geq \frac{64 - 50}{5}\right)$$

$$= 2P(Z \geq 2.8) = 0.0052$$

P 値：今起きた現象の「稀さ」を表す確率

➢ P値をどう判断するかはお任せするね

【参考】統計的有意性と P 値に関する ASA 声明

http://biometrics.gr.jp/news/all/ASA.pdf