Lecture 9

母平均の検定

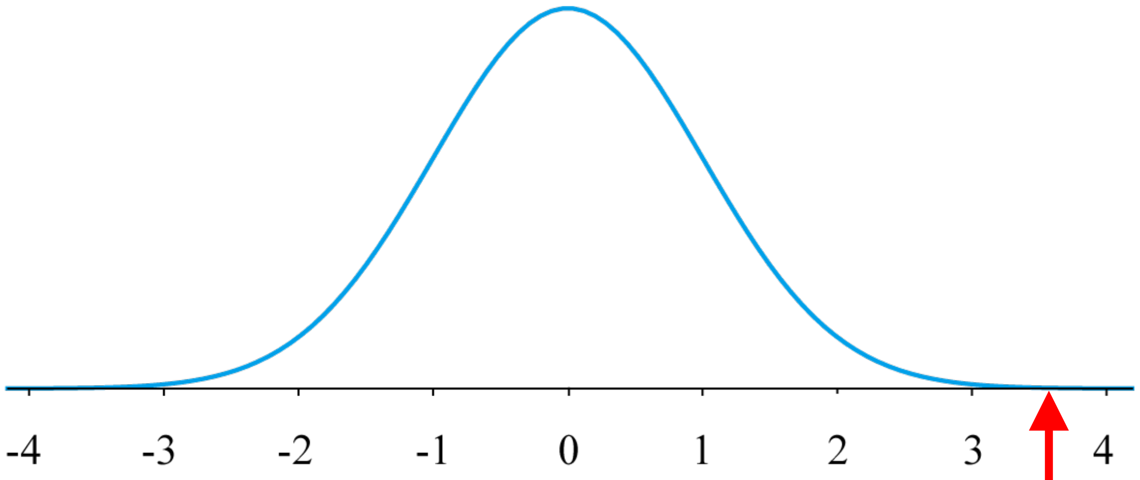
典型例　コインを 100 回投げて, 表が 67 回出た. コインは公平といえるか?

X ：100回投げて表の出る回数

$$X \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right) \approx N(50, 5^2)$$

正規分布近似が便利

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$



実現値　$z = \dfrac{67 - 50}{5} = 3.4$

判断：かなり稀？

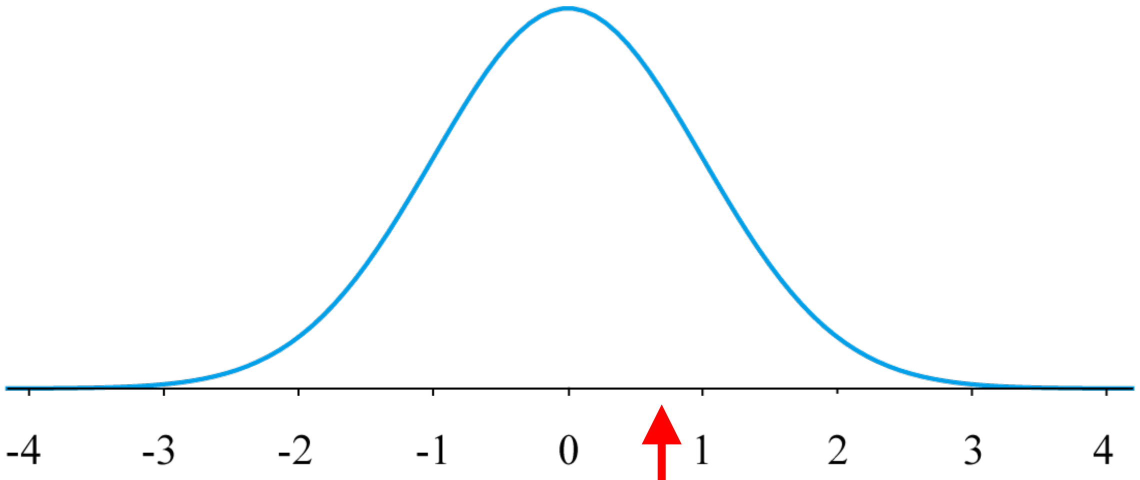
典型例　コインを 100 回投げて, 表が 54 回出た. コインは公平といえるか?

X ：100回投げて表の出る回数

$$X \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right) \approx N(50, 5^2)$$

正規分布近似が便利

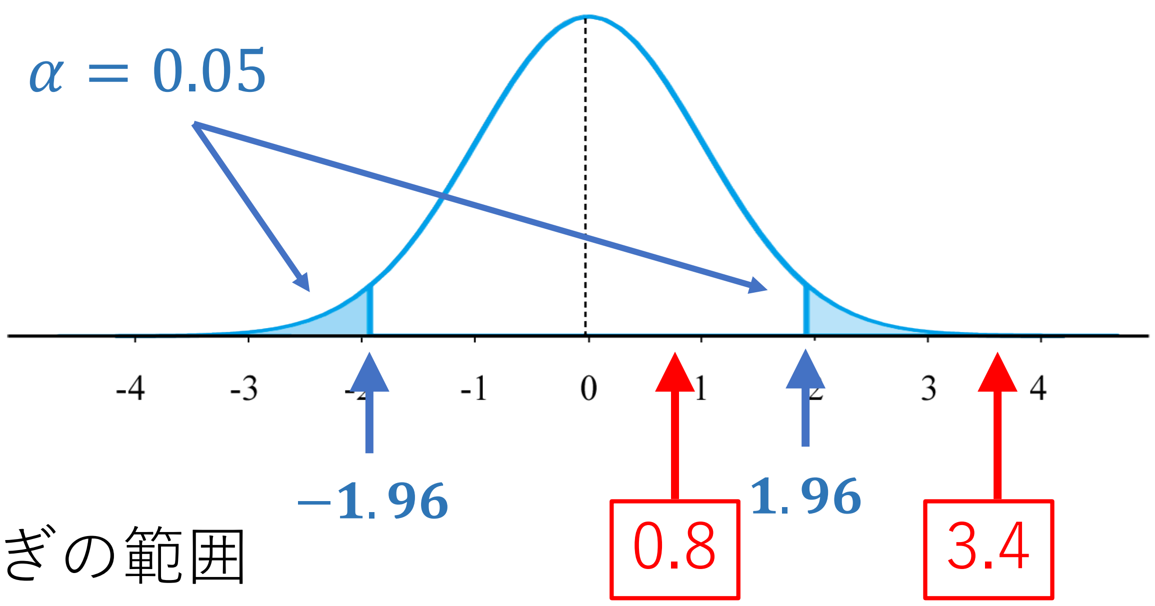
$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$



実現値　$z = \dfrac{54 - 50}{5} = 0.8$

判断：ふつうに起こる？

仮説検定の考え方



コインを 100 回投げて，

➢ 表が 54 回出た．

$$z = \frac{54 - 50}{5} = 0.8$$

偶然の揺らぎの範囲

合理的、客観的な判断のためには、どのくらい小さな確率を稀とするかを決める

➢ 表が 67 回出た．

$$z = \frac{67 - 50}{5} = 3.4$$

稀なことが起こった？

たとえば、$\alpha = 0.05$

これを有意水準という

そうではなく、仮説が間違いだったと判断

仮説検定の手順

(1) 母数に関する**帰無仮説**と**対立仮説**を決める.
　　H_0　　H_1

(2) 関連する確率変数 T (**検定統計量**)を選び,
H_0 の下で, この確率変数の分布を調べる

(3) **有意水準** $0 < \alpha < 1$ と**棄却域** Wを決める.

(4) 標本から T の**実現値** t を計算する.

➢$t \in W$ ⇒実現値は有意水準 α で**有意**である
⇒ H_0 を**棄却する** ⇒ H_1 を採択する.

➢$t \notin W$ ⇒実現値は有意水準 α で有意でない
⇒ H_0 を**棄却できない**
(⇒ H_0 を採択する)

例　コインを 100 回投げて, 表が 67 回出た.
コインは公平といえるか?

p ：表の出る確率

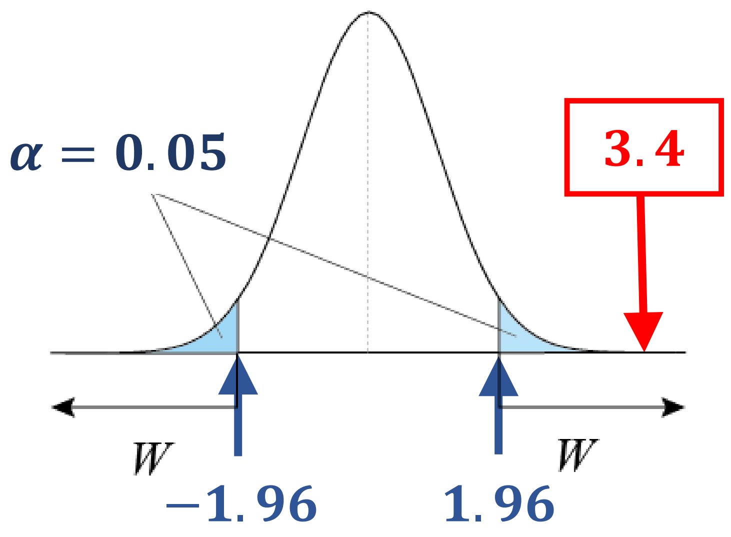
H_0 : $p = \dfrac{1}{2}$　　H_1 : $p \neq \dfrac{1}{2}$　　$\alpha = 0.05$

X ：表の回数 $\sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$

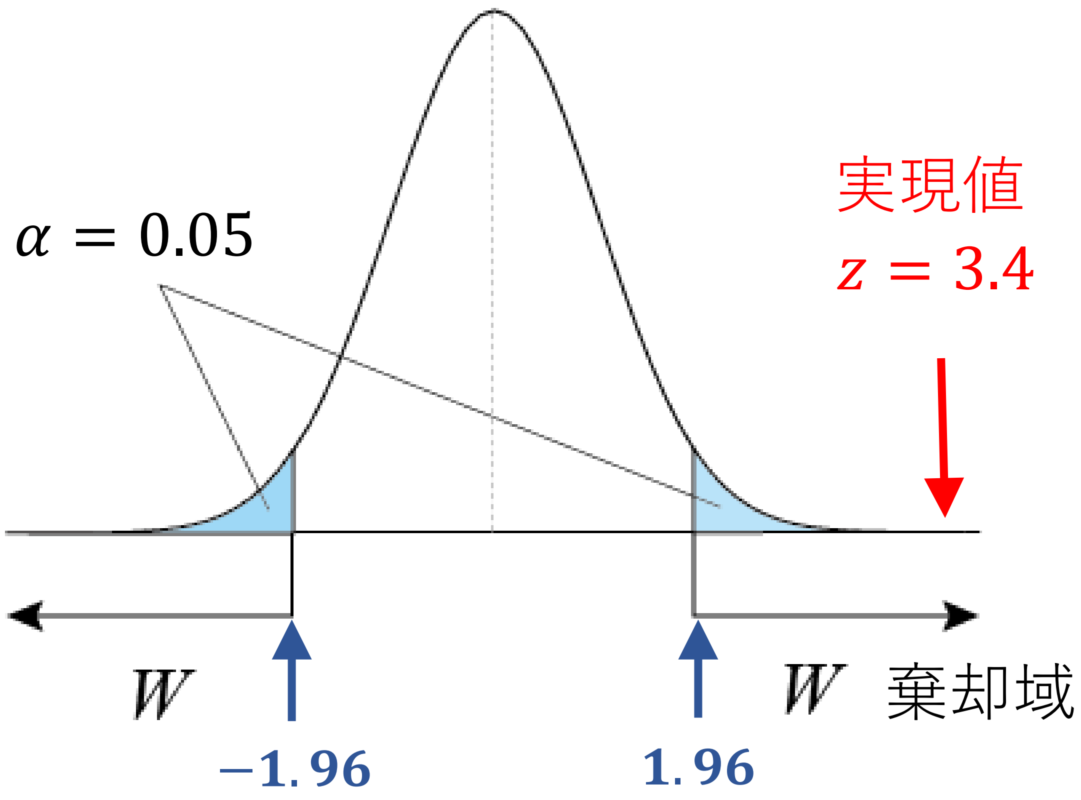
実現値

$z = 3.4$



結論　H_0 を棄却する

有意水準の意味

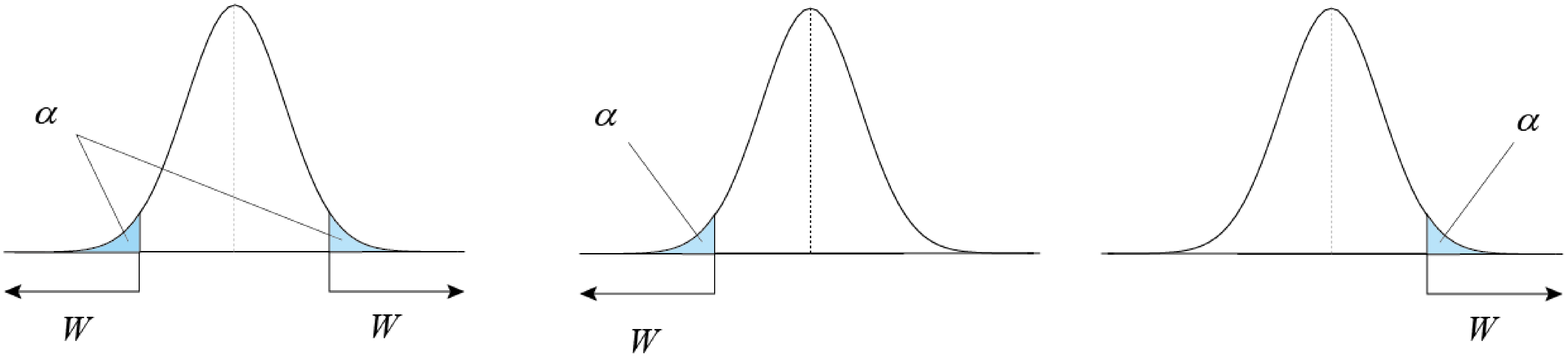


結論：H_0 を棄却する

有意水準 α は, 帰無仮説 H_0 が正しいのに, 帰無仮説を棄却してしまって, 検定の結論を間違える誤り確率

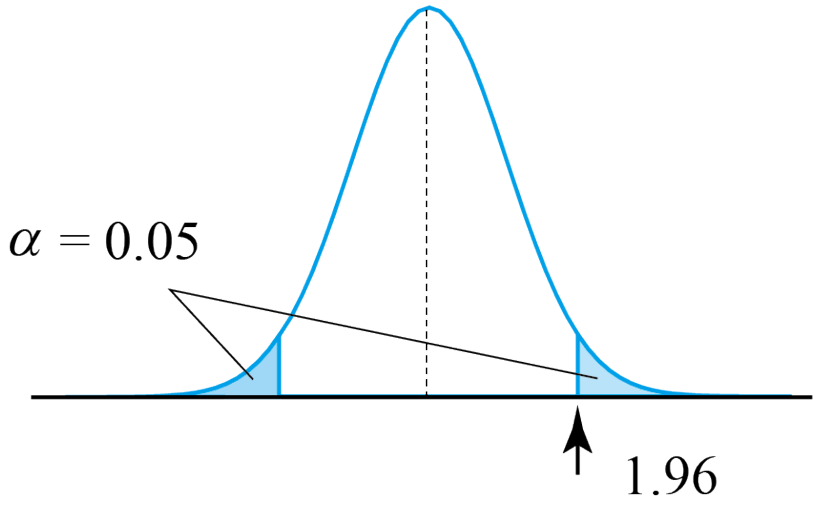
【注目】有意水準 α は文脈に応じて自分で設定する

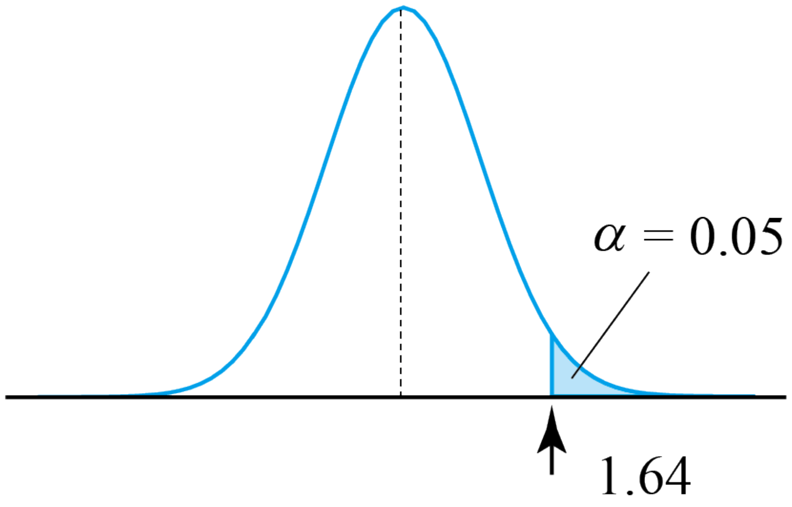
棄却域の設定：両側検定と片側検定



- ➢使い分けは文脈による
- ➢数理統計学の範疇ではない

両側 α 点と上側 α 点： $N(0,1)$ の場合





1.96 = 両側 5 % 点 = 上側 2.5 % 点

1.64 = 上側 5 % 点 = 両側 10 % 点

両側	α	0.3173	0.1000	0.0500	0.0455	0.0100	0.0027	0.0010
上側	$\alpha/2$	0.1587	0.0500	0.0250	0.0228	0.0050	0.0013	0.0005
	z	1.000	1.645	1.960	2.00	2.576	3.000	3.290

母平均の検定

母集団

母平均　μ

母分散　σ^2

無作為
復元抽出

標本

$X_1, X_2, \cdots, X_n$

基本的な問題

母平均を$\mu = m_0$とみなしてよいか？

帰無仮説と対立仮説

H_0: $\mu = m_0$

H_1: $\mu \neq m_0$（両側検定）

H_1: $\mu > m_0$　または　H_1: $\mu < m_0$（片側検定）

有意水準　α

$\alpha = 0.05$,　$\alpha = 0.01$ など

標本平均の分布（復習）

母集団

母平均 μ

母分散 σ^2

無作為
復元抽出

標本（大きさ：n）

標本平均：$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

不偏分散：$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

母集団	基本定理	使う確率分布
正規母集団	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	標準正規分布
正規母集団	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{U/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	自由度 $n-1$ の t-分布
一般の母集団 n：大きい	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 近似的に成立	標準正規分布

例題 9.1

ある中学校で 1 年生 44 名に集団式知能検査を実施したところ，偏差値の平均は 52.4 であった. この学校の 1 年生は平均的な生徒といえるか.ただし, 全国における知能検査の偏差値は $N(50, 10^2)$ に従うことが知られている.

例題 9.1

母集団

母平均 μ

母分散 $\sigma^2 = 10^2$

⇩

標本

大きさ $n = 44$

標本平均の実現値

$\bar{x} = 52.4$

帰無仮説と対立仮説　$H_0\colon \mu = 50$　$H_1\colon \mu \neq 50$

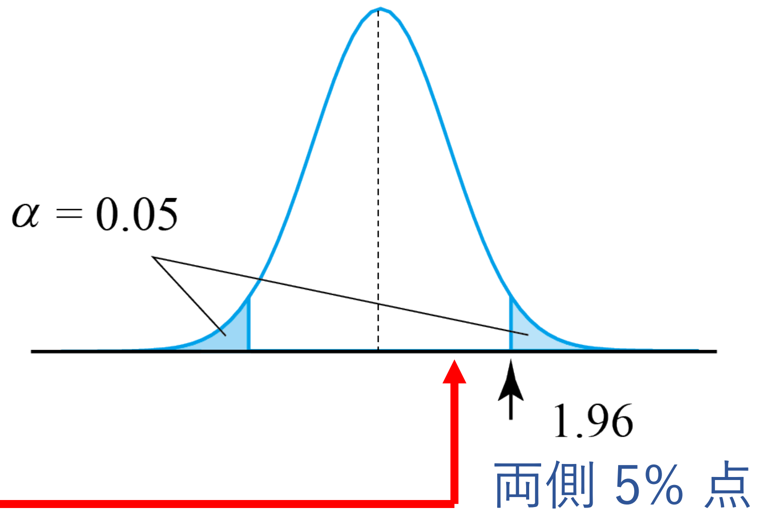
有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　H_0 の下で，

$$\bar{X} \sim N\left(50, \frac{10^2}{44}\right) = N(50, 1.51^2)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 50}{1.51} \sim N(0,1)$$

実現値　$z = \dfrac{52.4 - 50}{1.51} = 1.59$



結論　有意水準 5% の両側検定で H_0 は棄却されない．

（有意でない）

例題 9.2

あるメーカーの電化製品の寿命は, カタログによると平均 $\mu = 1200$ 時間, 標準偏差 $\sigma = 150$ 時間と書かれている. $n = 10$ 個のサン プルについてテスト したとき, 平均寿命が $\bar{x} = 1100$ 時間であった. カタログは偽りといえるか .

例題 9.2

母集団

母平均 μ

母分散 $\sigma^2 = 150^2$

↓

標本

大きさ $n = 10$

標本平均の実現値

$\bar{x} = 1100$

帰無仮説と対立仮説　H_0: $\mu = 1200$　H_1: $\mu < 1200$

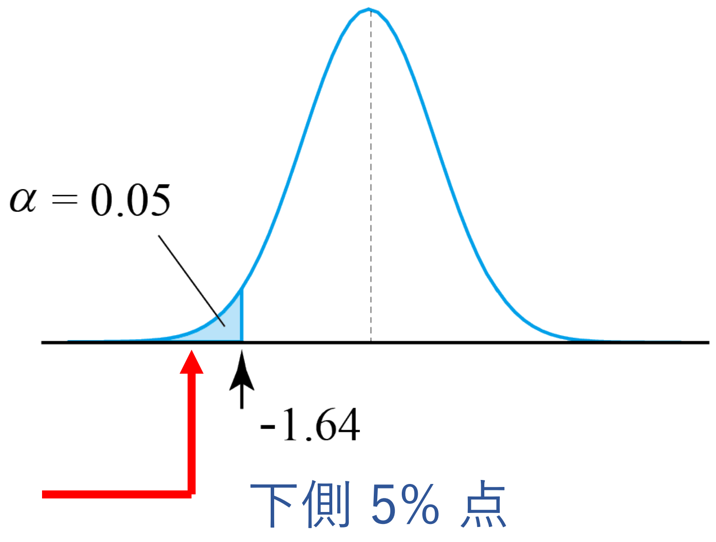
有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　H_0 の下で,

$$\bar{X} \sim N\left(1200, \frac{150^2}{10}\right) = N(1200, 47.4^2)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 1200}{47.4} \sim N(0,1)$$

実現値　$z = \dfrac{1100 - 1200}{47.4} = -2.11$



結論　有意水準 5% の片側検定で H_0 は棄却される.

（有意である）

P 値

➢ 伝統的な仮説検定

有意水準 α を示して H_0 の棄却・採択を述べる.

➢ P値を示す

棄却・採択の判断はせず, 実現値が帰無仮説 H_0 の下で, どのくらい外れているかを数量的に示す.

定 義

P値 = 実現値 x を含めて, それ以上起こりにくい実現値が出現する確率

例題 9.3

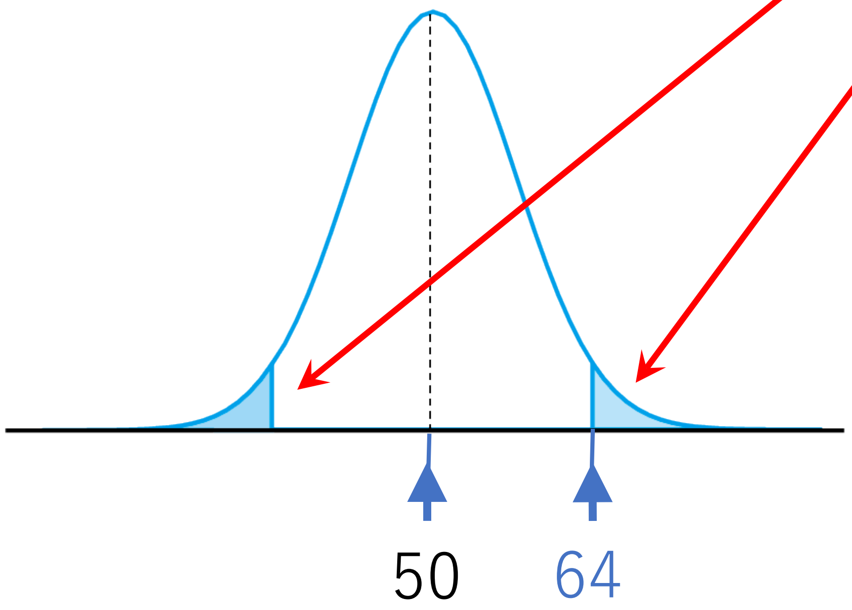
公平なコインかどうか確認のため 100回振ったところ表が 64 回出た.

例題 9.3

公平なコインかどうか確認のため 100回振ったところ表が 64 回出た.

$H_0: p = 0.5 \quad H_1: p \neq 0.5$

$X \sim B(100, 0.5) = N(50, 5^2)$



$$P = 2P(X \geq 64)$$

$$= 2P\left(\frac{X-50}{5} \geq \frac{64-50}{5}\right)$$

$$= 2P(Z \geq 2.8) = 0.0052$$

P 値：今起きた現象の「稀さ」を表す確率

➢ P値をどう判断するかはお任せするね

【参考】統計的有意性と P 値に関する ASA 声明

http://biometrics.gr.jp/news/all/ASA.pdf

例題 9.4

ある県の統計によると, 満 6 歳児の平均身長は 108.6 (cm) であるという. 同県のある小学校の 6 歳児 27 名について身長を調べ たところ, 平均 $\bar{x} = 109.7$ (cm), 不偏分散 $u^2 = 4.06^2$ (cm^2) であった. この結果から, 同校児童の身長は県平均に比べて高いといえるか.

例題 9.4

ある県の統計によると, 満 6 歳児の平均身長は 108.6 (cm) であるという. 同県のある小学校の 6 歳児 27 名について身長を調べたところ, 平均 $\bar{x} = 109.7$ (cm), 不偏分散 $u^2 = 4.06^2$ (cm^2) であった. この結果から, 同校児童の身長は県平均に比べて高いといえるか.

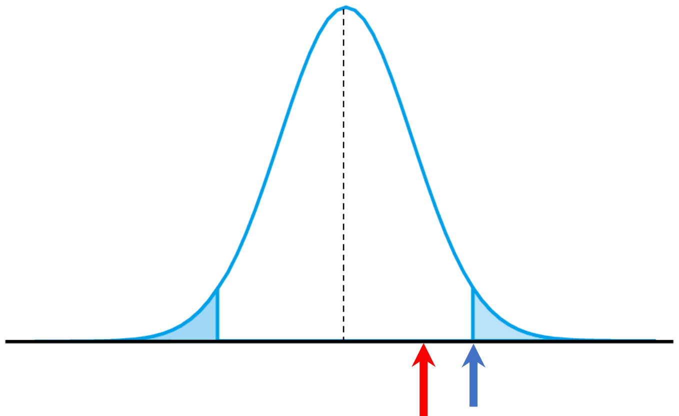
帰無仮説と対立仮説　$H_0\colon \mu = 108.6 \quad H_1\colon \mu \neq 108.6$

有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量

母分散未知

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{U/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 108.6}{U/\sqrt{27}} \sim t_{26}$$



$t_{26}(0.025) = 2.056$

上側 2.5% 点=両側 5% 点

実現値

$$t = \frac{109.7 - 108.6}{4.06/\sqrt{27}} = 1.408$$

結論　有意水準 5% の両側検定で H_0 は棄却されない.

例題 9.5　ある溶液に含まれる物質の濃度 (%) を測定して次のデータを得た.

12.6　13.4　14.1　12.4　11.2　12.5　10.9　11.8　11.6　13.1

真の濃度を μ として，仮説 H_0：$\mu = 12$ を検定せよ.

例題 9.5　ある溶液に含まれる物質の濃度 (%) を測定して次のデータを得た.

12.6　13.4　14.1　12.4　11.2　12.5　10.9　11.8　11.6　13.1

真の濃度を μ として，仮説 H_0 : $\mu = 12$ を検定せよ.

帰無仮説と対立仮説　H_0: $\mu = 12$　　H_1: $\mu \neq 12$

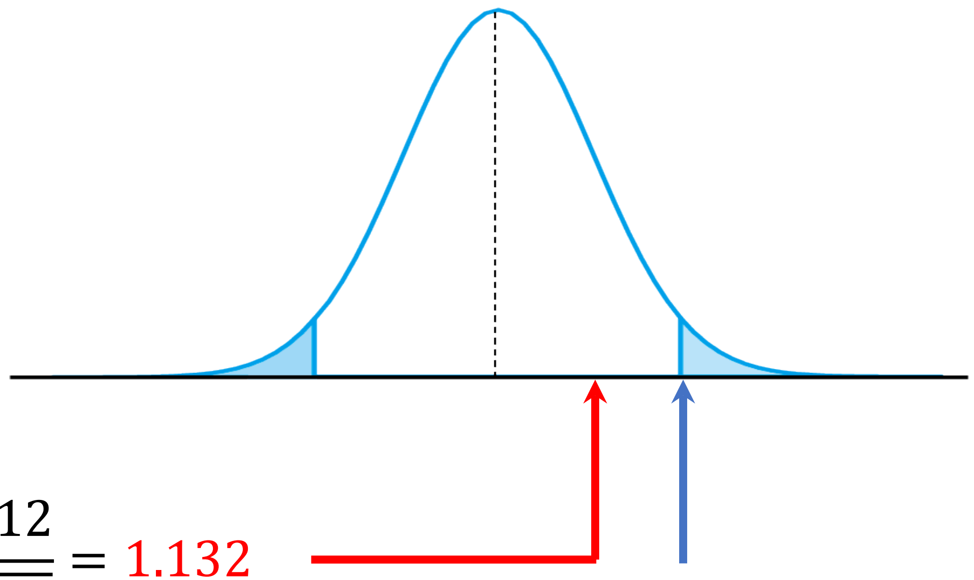
有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量

母分散未知

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{U/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 12}{U/\sqrt{10}} \sim t_9$$

実現値　$\bar{x} = 12.36$　$u^2 = 1.0116 = 1.006^2$　$t = \dfrac{12.36 - 12}{1.006/\sqrt{10}} = 1.132$

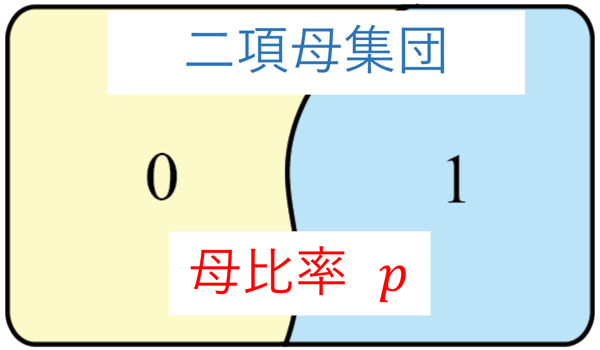


$t_9(0.025) = 2.262$

上側 2.5% 点=両側 5% 点

結論　有意水準 5% の両側検定で H_0 は棄却されない.

二項母集団の母比率の検定



無作為
復元抽出

標本

大きさ：n

標本比率：　$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

帰無仮説と対立仮説　$H_0\colon p = p_0$　　$H_1\colon p \neq p_0$（両側検定）

$H_1\colon\ p > p_0$　または　$H_1\colon p < p_0$　（片側検定）

検定統計量

$$n\hat{p} \sim B(n, p_0) \approx N(np_0, np_0(1-p_0))$$

$$\hat{p} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$$

標準化

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

例題 9.6

あるクラスの平均出席率は 0.90 であるといわれている. ある日の欠席者は, 160 人中 25 人であった. この日は通常の出席ではないといえるか. 有意水準は $\alpha = 0.01$ とせよ.

例題 9.6

あるクラスの平均出席率は 0.90 であるといわれている. ある日の欠席者は, 160 人中 25 人であった. この日は通常の出席ではないといえるか. 有意水準は $\alpha = 0.01$ とせよ.

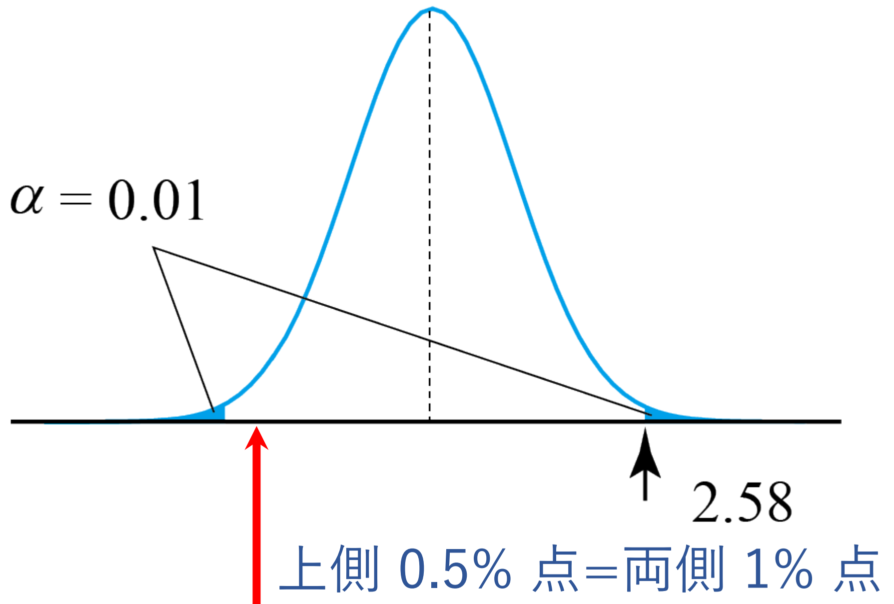
帰無仮説と対立仮説　$H_0\colon p = 0.9$　$H_1\colon p \neq 0.9$（両側検定）

有意水準　$\alpha = 0.01$

検定統計量　$n\hat{p} \sim B(160, 0.9) \approx N(144, 3.79^2)$

$$\hat{p} \sim N\left(\frac{144}{160}, \frac{3.79^2}{160^2}\right) = N(0.9, 0.0237^2)$$

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.9}{0.0237} \sim N(0,1)$$



実現値　$z = \dfrac{0.8438 - 0.9}{0.0237} = -2.37$

結論　有意水準 1% の両側検定で H_0 は棄却されない.

例題 9.7

ある意見項目に対する賛成率を 30% は欲しいと思われていた．実際に，調査では 80 人中 23 人の賛成を得た．賛成率の目標を達成したと考えてよいか.

例題 9.7

ある意見項目に対する賛成率を 30% は欲しいと思われていた．実際に，調査では 80 人中 23 人の賛成を得た．賛成率の目標を達成したと考えてよいか.

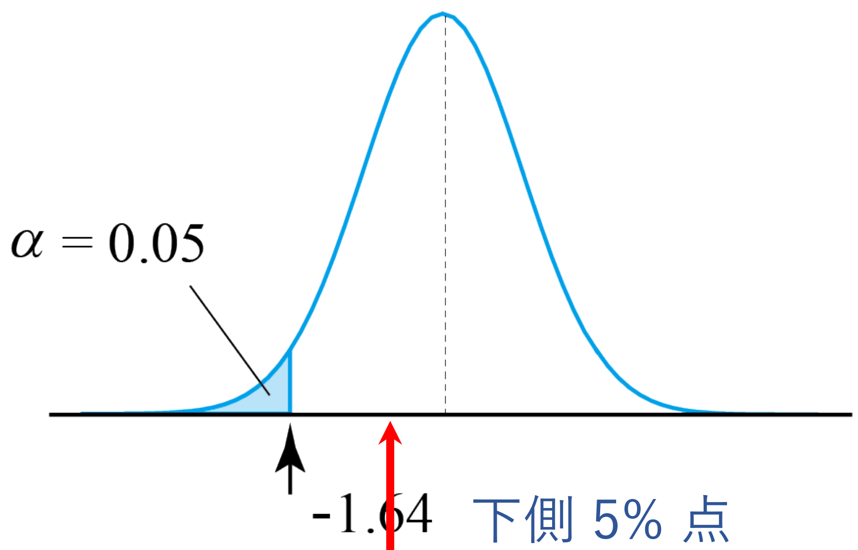
帰無仮説と対立仮説　H_0: $p = 0.3$　H_1: $p < 0.3$（片側検定）

有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　$n\hat{p} \sim B(80, 0.3) \approx N(24, 4.10^2)$

$$\hat{p} \sim N\left(\frac{24}{80}, \frac{4.10^2}{80^2}\right) = N(0.3, 0.0512^2)$$

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.3}{0.0512} \sim N(0,1)$$



実現値　$z = \dfrac{0.2875 - 0.3}{0.0512} = -0.244$

結論　有意水準 5% の片側検定で H_0 は棄却されない.

２種類の過誤

帰無仮説 H_0 をめぐって

採否\真偽	H_0 は真	H_0 は偽
H_0 を採択	○	第２種の誤り β
H_0 を棄却	第１種の誤り α	○

第１種の誤り
＝生産者危険
＝あわて者の間違い

第２種の誤り
＝消費者危険
＝ぼんやり者の間違い

第１種の誤り確率　α ＝有意水準　← 自分で設定する

第２種の誤り確率　β　← 要注意

第 2 種誤り確率 β は一般には不明

例　コインを100回投げて表が58回出た. コインは公平といえるか?

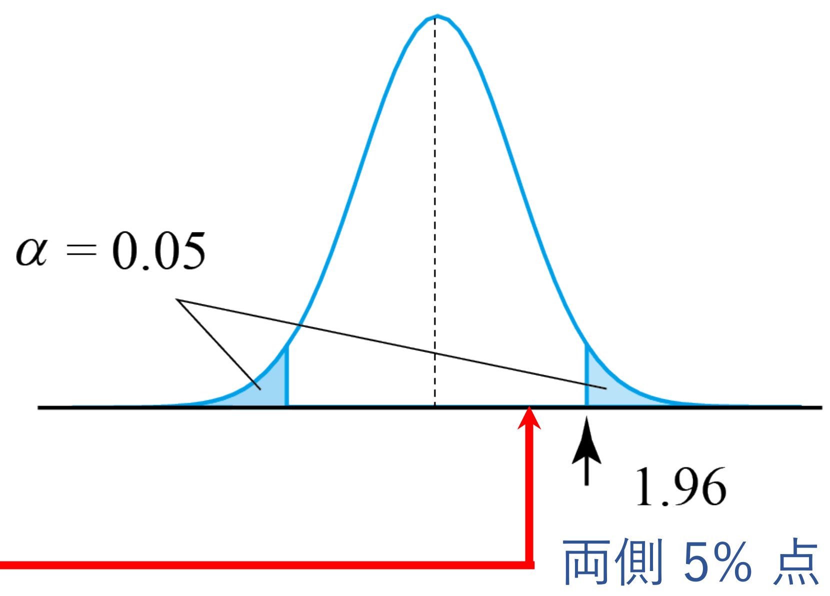
帰無仮説と対立仮説　$H_0 : p = 0.5 \quad H_1 : p \neq 0.5$

有意水準　$\alpha = 0.05$

検定統計量　表の回数　$X \sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$

$$Z = \frac{X - 50}{5} \sim N(0,1)$$

実現値　$z = \dfrac{58 - 50}{5} = 1.6$



結論　有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定によって
H_0 は棄却されない＝採択される

この採択とした結論を誤る確率＝第 2 種誤り確率 β

β の評価は困難

「$H_0 : p = 0.5$」でないとすると, 可能な p は無限にあって特定できないから

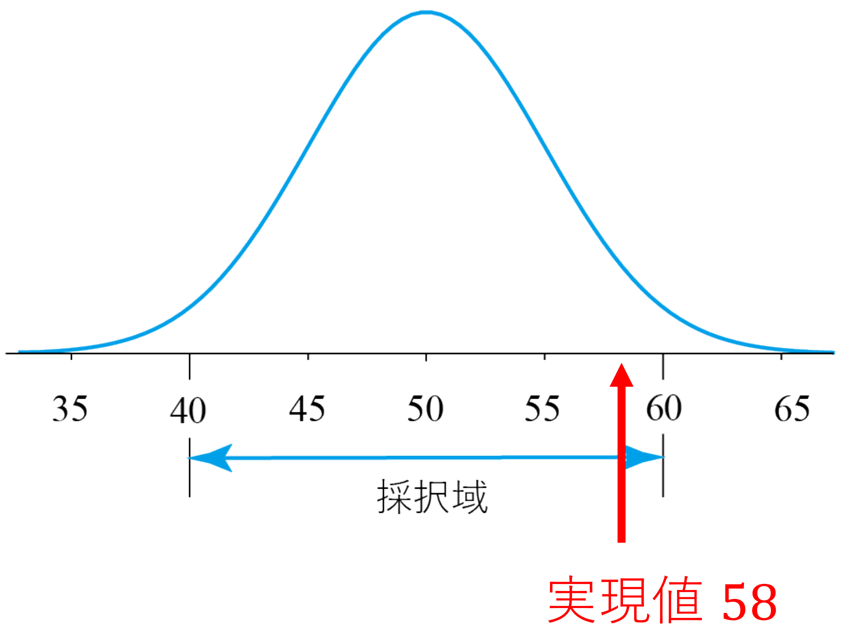
例（第2種誤り確率の考察）　コインを100回投げて表が58回出た. コインは公平といえるか?

$H_0 : p = 0.5$ を有意水準$\alpha = 0.05$ で両側検定

表の回数 $X \sim B(100, 0.5) \approx N(50, 5^2)$

標準化しないで考察しよう.

採択域 $50 \pm 1.96 \times 5 \approx 50 \pm 10$

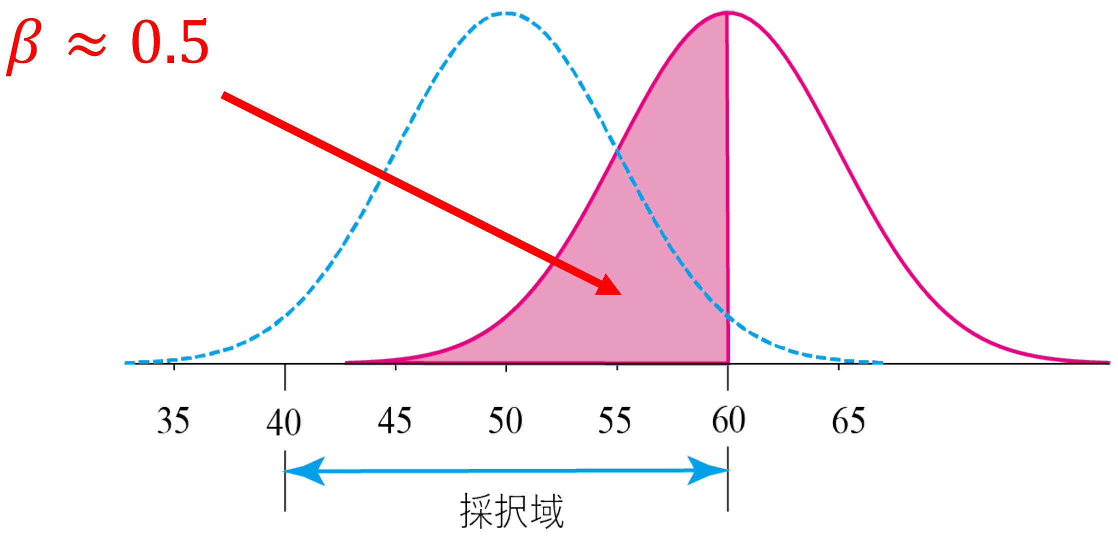


「H_0: $p = 0.5$」でないとすると, 可能な p は無限にあって特定できない

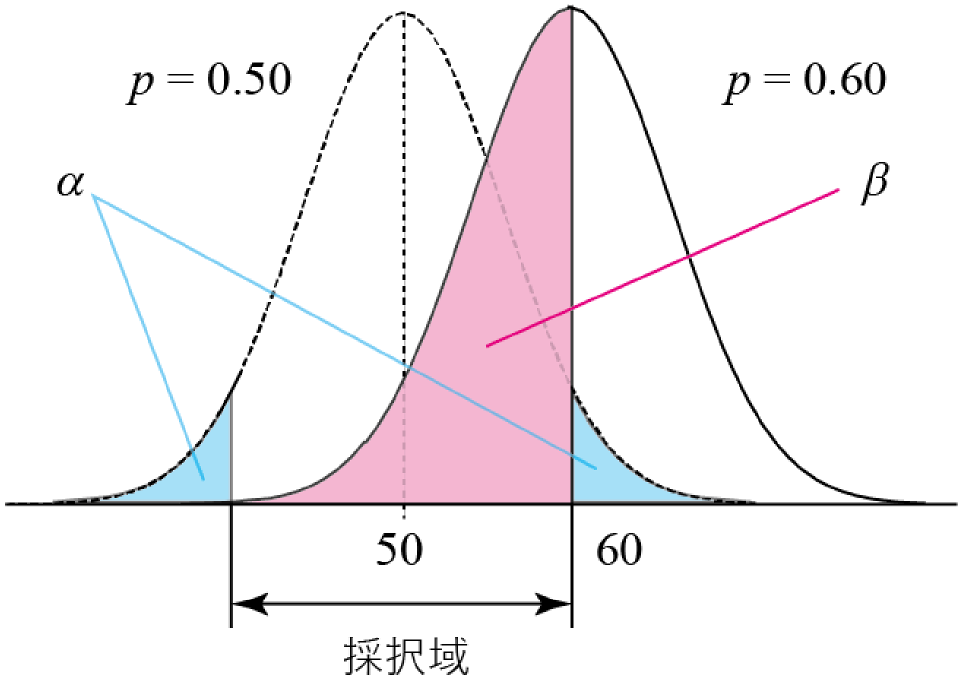
※ 仮に $p = 0.6$ としてみる

$p = 0.6$ の下で

表の回数 $Y \sim B(100{,}0.6) \approx N(60, 4.9^2)$



α と β はトレードオフの関係



(1) α 小 ⇔ 採択域が大 ⇔ β 大

(2) α, β ともに小さくするためには,
標本数 n を大きくする.

(3) 「H_0 を採択」という判断を誤る場合,
真の母数が H_0 で仮定した母数に近いほど β は大きい

➢ 「H_0 を採択する」は消極的な採択.
はっきり否定するだけの状況ではないという意味.
そこで「 H_0 を棄却できない」ということが多い.

Lecture 9

母平均の検定

おわり