令和 4 年度 (2022) 前期水曜日 16:20-17:50
宮城教育大学 2 年生向け

解 析 学 入 門

問 題 集

第1章　命題と論理

本章の「論理」は重要であるが, 講義では省略する. 講義の進行とともに必要なことを補足説明する.

問 1.1 命題 P, Q, R, S, U の真理値表が次のように与えられているとき, R, S, U を P, Q と論理演算 $\neg, \vee, \wedge$ を用いて表せ.

P	Q	R	S	U
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

上の U は, P または Q のどちらか一方だけが真のときに真となる命題, すなわち, P, Q の**排他的論理和**である.

問 1.2 (多数決命題) 3 つの命題 P, Q, R のうち少なくとも 2 つが真であるときに真となる命題は

$$(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (R \wedge P)$$

で与えられることを示せ.

問 1.3 2 つの命題 P, Q に対して,

$$P \wedge (P \to Q) \equiv P \wedge Q$$

であることを真理値表を用いて示せ.

問 1.4 論理演算 $P \wedge Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow Q$ は, 否定 $\neg$ と論理和 $\vee$ の組み合わせで表されることを示せ.

問 1.5 論理演算 $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \leftrightarrow Q$ は, 否定 $\neg$ と含意 $\to$ の組み合わせで表されることを示せ.

問 1.6 命題 P, Q, R に対して次を示せ.

(1) $(P \wedge Q) \to R \equiv P \to (Q \to R)$.
(2) $(P \to Q) \wedge (\neg P \to R) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$.

問 1.7 命題 P, Q に対して, 次の命題が恒真命題であることを示せ.

(1) $((P \to Q) \to P) \to P$.
(2) $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$.

問 1.8 命題 P, Q, R に対して, 次の命題が恒真命題であることを示せ.

(1) [否定法] $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$.
(2) [三段論法] $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$.
(3) [場合分け] $((P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R)) \to R$.

問 1.9 次の主張を背理法によって証明せよ.

(1) $\sqrt{12}$ は無理数である.
(2) m は $m \geq 2$ なる自然数とする. $2^m - 1$ が素数ならば m は素数である.

問 1.10 次の命題の否定を示し, その真偽を述べよ. ただし, x は実数とする.

(1) $\forall x\, (x^2 = 2)$
(2) $\forall x\, ((x \geq 0) \vee (x \leq 0))$
(3) $\exists x\, (x^2 < 1)$
(4) $\exists x\, ((x > 0) \wedge (x < 0))$

問 1.11 x, y は自然数を表すとして, 命題関数 $P(x, y)$ を「$x \leq y$ である」とする. このとき, 次の命題の真偽を答えよ.

(1) $\forall x \exists y\, P(x, y)$
(2) $\exists y \forall x\, P(x, y)$
(3) $\forall y \exists x\, P(x, y)$
(4) $\exists x \forall y\, P(x, y)$

問 1.12 a, b は実数とする. 命題

$$\forall a\, \forall b\, ((a^2 = b^2) \to (a = b))$$

の真偽を述べよ. 次に, 上の命題の否定を示し, その真偽について調べよ.

第2章　集　合

問 2.1 【必須】次の集合はそれぞれ何個の元からなるか.

$$\{1,2,1,0,1\},\quad \{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2=-1\},\quad \{\emptyset\},\quad \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}.$$

問 2.2 【必須】$A\subset B$, $B\subsetneq C$ であれば, $A\subsetneq C$ であることを示せ.

問 2.3 【必須】次の 2 つの集合は一致することを示せ.

$$A=\{6m-15n\,|\,m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}\},\qquad B=\{3k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}.$$

問 2.4 【必須】有限集合 A に対して, $|2^A|=2^{|A|}$ が成り立つことを示せ.

第3章　集合の演算

問 3.1 【必須】2 つの集合 A, B について, 次の 3 条件は同値であることを示せ.
(i) $A \subset B$,　(ii) $A \cup B = B$,　(iii) $A \cap B = A$.

問 3.2 【必須】集合 A, B, C に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

問 3.3 集合 $A_1, \ldots, A_n, B$ に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B),$$
$$\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B).$$

問 3.4 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つことを示せ.
(1) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.
(2) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap B \cap C)$.

問 3.5 【必須】2 つの集合 A, B に対して, 次に 2 条件は同値であることを示せ.
(i) $A \backslash B = A$,　(ii) $A \cap B = \emptyset$.

問 3.6 2 つの集合 A, B に対して, 次に 3 条件は同値であることを示せ.
(i) $A \subset B$,　(ii) $A \backslash B = \emptyset$,　(iii) $B \backslash (B \backslash A) = A$.

問 3.7 【必須】A を空でない集合, $a \in A$ とする. 集合 B が $A \backslash \{a\} \subset B \subset A$ を満たせば, $B = A$ または $B = A \backslash \{a\}$ であることを示せ.

問 3.8 集合 A, B, C に対して次が成り立つことを示せ.

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C).$$

問 3.9 【必須】集合 A, B に対して, $A \ominus X = B$ を満たす集合 X を求めよ.

問 3.10 定理 3.13 を証明せよ.

問 3.11 X を全体集合, A, B をその部分集合とするとき, 次を示せ.
(1) $A \backslash B = A \cap B^c$.
(2) $A \ominus B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$.

第4章　写　像

問 4.1 定理 4.4 (4.5) $[f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)]$ を 2 通りの包含関係を示すことで証明せよ.

問 4.2 【必須】定理 4.4 (4.6) $[f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)]$ では, 一般には等号は成り立たない. 例を示せ.

問 4.3 $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする. $B \subset Y$ に対して $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ が成り立つことを示せ.

問 4.4 $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする.

(1) $A \subset X$ に対して $f(X) \backslash f(A) \subset f(X \backslash A)$ であることを示せ. また, 等号の成り立たない例を示せ.

(2) $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$ であることを示せ.

問 4.5 任意の集合 Y に対して, 空集合 $\emptyset$ から Y への写像 $f : \emptyset \longrightarrow Y$ がただ 1 つ存在することは既知である. この写像 f は単射であることを示せ. さらに, $Y = \emptyset$ であれば, それは全単射であることを示せ.

問 4.6 【必須】写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ で次の性質をもつような例を示せ.

(1) f が単射であって, $g \circ f$ が単射でない.

(2) g が全射であって, $g \circ f$ が全射でない.

問 4.7 【必須】写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ で次の性質をもつような例を示せ.

(1) $g \circ f$ が全射であって, f が全射でない.

(2) $g \circ f$ が単射であって, g が単射でない.

問 4.8 写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して次が成り立つことを示せ.

$$f \circ i_X = i_Y \circ f = f.$$

問 4.9 【必須】$f(x) = 2x + 6$ で定義される写像 $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ は全単射であることを示し, 逆写像を求めよ.

問 4.10 【必須】2 つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ に対して, 次のことを示せ.

(1) 任意の $A \subset X$ に対して, $g \circ f(A) = g(f(A))$.

(2) 任意の $B \subset Z$ に対して, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

問 4.11 写像 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f(x)=e^x$ で定義する. 写像 $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ で $g\circ f=i_{\mathbb{R}}$ となるものを求めよ.

問 4.12 写像 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f(x)=x^3-3x$ で定義する. 写像 $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ で $f\circ g=i_{\mathbb{R}}$ となるものを求めよ.

問 4.13 【必須】例 4.17 [A_n は n の約数の集合] で定義した集合系 $(A_n|n\in\mathbb{N})$ の和集合と積集合を求めよ.

問 4.14 【高度】例 4.18 $\left[A_\lambda=\left[0,1-\dfrac{1}{\lambda}\right]\right]$ で定義した集合系 $(A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda)$ に対して, $\lambda<\mu$ ならば $A_\lambda\subset A_\mu$ であることを示し, その和集合を求めよ.

問 4.15 【高度】$\lambda\in[1,+\infty)$ に対して,

$$B_\lambda=\left[0,1+\frac{1}{\lambda}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,0\le x<1+\frac{1}{\lambda}\right\}$$

とおく. 集合系 $(B_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda)$ に対して, $\lambda<\mu$ ならば $A_\mu\subset A_\lambda$ であることを示し, その積集合を求めよ.

第5章　同値関係

問 5.1 【必須】$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ 上の 2 項関係 $x\rho y$ を次のように定めるとき, その 2 項関係に対応する $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合を確認して, 関係のグラフと有向グラフを示せ.

(1) $x\rho y \Leftrightarrow y \leq x \leq y + 1$
(2) $x\rho y \Leftrightarrow (x - y + 1)(x + y - 4) = 0$

問 5.2 【必須】$R = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく. 2 つの実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x - y \in R$ であるとき $x \sim y$ と定義する. この関係は反射律, 対称律, 推移律を満たすか.

問 5.3 $\mathbb{N}$ の 2 つの部分集合 A, B に対して, 対称差集合 $A \ominus B$ が有限集合であるとき, $A \sim B$ と定義する. このとき, $\sim$ はベキ集合 $2^{\mathbb{N}}$ 上の同値関係であることを証明せよ.

問 5.4 【必須】法 $m = 5$ に関する剰余類を $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, \ldots, 4\}$ とする. $\mathbb{Z}_5$ の加法と乗法を一覧表に示せ.

問 5.5 【必須】法 $m = 6$ に関する剰余類を $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, \ldots, 5\}$ とする. $\mathbb{Z}_6$ の加法と乗法を一覧表に示し, $\mathbb{Z}_5$ との違いを調べよ.

第6章　有限集合

この章は省略するが, 機会があれば戻るかもしれない.

問 6.1 $m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して, 全射 $f : [n] \longrightarrow [m]$ が存在すれば $n \geq m$ であることを n についての数学的帰納法で示せ.

問 6.2 A を有限集合, B を任意の集合とする. 全単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在すれば, B も有限集合で $|A| = |B|$ が成り立つ (定理 6.8). これを証明せよ.

問 6.3 有限集合 A, B が $A \subset B$ を満たすとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $A = B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$.
(2) $A \subsetneq B \;\Leftrightarrow\; |A| < |B|$.

問 6.4 集合 X の部分集合 A, B に対して, 次の等式を示せ.

(1) $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$.
(2) $\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$.
(3) $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$.

第7章　可算集合

問 7.1 【必須】集合 $A_1, \ldots, A_n$ が高々可算集合であれば, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ も高々可算集合であることを示せ. さらに, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ が可算集合となるのはどのような場合か答えよ.

問 7.2 カントルの対関数は全単射 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ であることを示し, 逆写像を求めよ.

問 7.3 【必須】集合 $A_1, \ldots, A_n$ が高々可算集合ならば, それらの直積 $A_1 \times \cdots \times A_n$ も高々可算集合であることを示せ. さらに, $A_1 \times \cdots \times A_n$ が可算集合になるのはどのような場合か答えよ.

問 7.4 【高度】直線上に互いに重ならないように置かれた正の長さをもつ線分の集合は高々可算集合であることを示せ.

問 7.5 【高度】平面上に互いに重ならないように置かれた正の半径をもつ円板の集合は高々可算集合であることを示せ.

第8章　非可算集合

問 8.1 【必須】$(0, +\infty)$ と $\mathbb{R}$ は濃度が等しいことを, 具体的な全単射によって示せ.

問 8.2 【必須】$[0, +\infty)$ と $\mathbb{R}$ は濃度が等しいことを, 具体的な全単射によって示せ.

問 8.3 【高度】すべての実数 $x \in (0, 1]$ は高々2 通りの無限小数表示をもち, 2 通りの表示をもつものは有限小数で表される実数だけであることを示せ.

問 8.4 【高度】$0, 1, \ldots, 9$ からなる無限列 $\omega = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ で, ある番号から先はすべて 0 になるものの全体を Ω_0 とする. Ω_0 は可算集合であることを示せ.

問 8.5 【必須】集合 A, B が $|A| = |B|$ を満たせば, $|2^A| = |2^B|$ であることを示せ. 次に, 任意の可算集合 A に対して $|2^A| = \aleph$ であることを示せ.

第9章　濃度の比較

問 9.1 【必須】2 つの集合 A, B について, $|A| < |B|$, $|A| = |B|$, $|A| > |B|$ のどの 2 つも両立しないことを示せ.

問 9.2 【必須】3 つの集合 A, B, C について, 次を示せ.

(1) $|A| \leq |B|$, $|B| < |C| \Rightarrow |A| < |C|$.
(2) $|A| < |B|$, $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| < |C|$.

問 9.3 【必須】xy-座標平面 $\mathbb{R}^2$ の開円板 $A = \{(x, y) \,|\, x^2+y^2 < 1\}$ と閉円板 $B = \{(x, y) \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ の濃度は等しいことを示せ.

問 9.4 【高度】

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = \{y \in \mathbb{Q} \,|\, y \leq x\}$ とおくと, 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{Q}}$ は単射であることを示せ.
(2) 任意の $A \in 2^{\mathbb{N}}$ に対して

$$g(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{10^n}, \quad A \neq \emptyset, \qquad g(\emptyset) = 0,$$

とおくと, 写像 $g : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ は単射であることを示せ.
(3) (1),(2) を用いて, $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$ を示せ.

第10章　濃度の算法

問 10.1　【必須】3 つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ であっても $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ が成り立つとは限らない. 例を示せ.

問 10.2　【必須】3 つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \neq 0$ であっても $\mathfrak{a}\mathfrak{c} < \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ が成り立つとは限らない. 例を示せ.

問 10.3　【必須】自然数 n と任意の濃度 $\mathfrak{a}$ に対して,

$$\overbrace{\mathfrak{a} + \cdots + \mathfrak{a}}^{n} = n\mathfrak{a}$$

が成り立つことを示せ. ただし, 左辺は濃度 $\mathfrak{a}$ を n 回繰り返してとった和, 右辺は有限濃度 n と濃度 $\mathfrak{a}$ との積である.

問 10.4　【高度】集合 A, B, C で $B \cap C = \emptyset$ を満たすものに対して, 対応

$$\mathrm{Map}(B \cup C, A) \longleftrightarrow \mathrm{Map}(B, A) \times \mathrm{Map}(C, A)$$

を与える全単射を 1 つ構成せよ.

問 10.5　【高度】集合 A, B, C に対して, 対応

$$\mathrm{Map}(C, A \times B) \longleftrightarrow \mathrm{Map}(C, A) \times \mathrm{Map}(C, B)$$

を与える全単射を 1 つ構成せよ.

問 10.6　【必須】平面上の円をすべて集めてできる集合の濃度を求めよ.

問 10.7　【高度】実数 $\mathbb{R}$ を定義域として, 実数 $\mathbb{R}$ に値をとる連続関数の全体を $C(\mathbb{R})$ とする. 連続関数 $f(x)$ は有理数 x に対する値で一意的に定まることを用いて, $|C(\mathbb{R})| = \aleph < |\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = 2^{\aleph}$ を示せ.

第11章　選択公理

この章の内容は大変興味深いが省略する. 実際, 初学者にとって「何が問題なのか」という核心部分を理解することはややハードルが高い.

問 11.1 X, Y を集合, $f : X \longrightarrow Y$ を写像とするとき, $|f(X)| \leq |X|$ を示せ (選択公理に注意せよ).

問 11.2 定理 11.5 を用いて, 無理数の全体が連続体濃度をもつことを示せ. (定理 8.8 では選択公理を用いずに証明した.)

問 11.3 次の主張に選択公理は不要であることを確かめよ.

(1) $A_1, A_2, \ldots$ を自然数 $\mathbb{N}$ の部分集合で, 空ではなく, 互いに素であるものとする. このとき, 集合族 $\{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ に対して選択関数が存在する.
(2) 実数 $\lambda \in (0,1)$ に対して, 開区間を $A_\lambda = (\lambda, 3\lambda)$ で定義する. このとき, 集合族 $\{A_\lambda \,|\, \lambda \in (0,1)\}$ に対して選択関数が存在する.
(3) 実数 $\mathbb{R}$ の空でない開区間を集めてできる集合を $\mathcal{A}$ とすれば, 集合族 $\mathcal{A}$ に対して選択関数が存在する.

問 11.4 濃度の列 $\mathfrak{a}_n$ に対して, $|A_n| = \mathfrak{a}_n$ となる互いに素な集合列 A_n をとって, 濃度の無限和を

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots = \Big| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big|$$

で定義する (選択公理に注意せよ). 次の等式を示せ.

(1) $\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$.
(2) $\aleph + \aleph + \cdots = \aleph_0 \aleph = \aleph$.

問 11.5 デデキント無限集合 A に対して, 全射であるが単射ではない写像 $f : A \longrightarrow A$ が存在することを示せ.

第12章　順序集合

問 12.1 【必須】$(A, \preccurlyeq)$ を空でない順序集合とする. $a \in A$ が A の最大元であれば, それは極大元でもあり, 他に極大元はないことを示せ. また, $a \in A$ が A の最小元であれば, それは極小元でもあり, 他に極小元はないことを示せ.

問 12.2 【必須】全順序集合においては, 最大元と極大元が一致することを示せ. また, 最小元と極小元が一致することを示せ.

問 12.3 【必須】順序集合 $(\mathbb{N}, |\,)$ の 部分集合 $A = \{6, 10, 12, 18, 36, 60\}$ の最大元, 最小元, 極大元, 極小元, 上限, 下限を求めよ.

問 12.4 $\mathbb{Q}$ を通常の大小によって順序集合とみなす. 次の部分集合 A, B の最大元, 最小元, 上限, 下限を求めよ.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0,\, x^2 < 2\}, \qquad B = \left\{1 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

問 12.5 【必須】$a < b$ を実数とする. 開区間 (a, b) を $\mathbb{R}$ の部分順序集合とみなすとき, (a, b) と $\mathbb{R}$ は順序同型であることを示せ. 次に, 閉区間 $[a, b]$ と $\mathbb{R}$ は順序同型ではないことを示せ.

問 12.6 【必須】実数 x, y に対して, $x \leq y$ のとき $y \preccurlyeq x$ と定義する.

(1) $(\mathbb{R}, \preccurlyeq)$ は全順序集合になることを示せ.
(2) $(\mathbb{R}, \preccurlyeq)$ と $(\mathbb{R}, \leq)$ は順序同型であることを示せ.
(3) $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ と $(\mathbb{N}, \leq)$ は順序同型ではないことを示せ.

問 12.7 X, Y が全順序集合であれば, 辞書式順序を備えた $X \times Y$ も全順序集合になることを示せ.

問 12.8 $A = \{1, 2\}$, $\mathbb{N}$ を通常の大小を備えた順序集合とする. このとき, 辞書式順序を与えた直積集合 $A \times \mathbb{N}$ と $\mathbb{N} \times A$ は順序同型ではないことを示せ.

第13章　整列集合

問 13.1 整列集合に順序同型な順序集合は整列集合であることを示せ.

問 13.2 【必須】自然数 $\mathbb{N}$ に通常の大小による順序を与えた整列集合 $(\mathbb{N}, \leq)$, 例 13.3 の $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$, 例 13.4 の $(\mathbb{N}, \preccurlyeq_1)$ はどの 2 つも順序同型ではないことを示せ.

問 13.3 有限な全順序集合は整列集合であることを示せ.

問 13.4 【高度】整列集合 $(X, \preccurlyeq)$ には無限下降列が存在しない. ただし, 無限下降列とは, X の元の列 $x_1, x_2, \cdots \in X$ で

$$x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n \succ x_{n+1} \succ \cdots$$

を満たすものをいう.

問 13.5 【高度】X を整列集合とする. $S \subset X$ を空でない部分集合とすると, $\bigcup_{a \in S} X\langle a \rangle$ は X に一致するか, または X の切片になることを示せ.

問 13.6 通常の自然数 $(\mathbb{N}, \leq)$, 例 13.3 における $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$, 例 13.4 における $(\mathbb{N}, \preccurlyeq_1)$ の 3 つの整列集合に対して, 定理 13.14 を確かめよ. (問 13.2 も参照せよ.)

第14章　順序数

この章は省略するが, 機会があれば戻るかもしれない.

問 14.1 $m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して, $\mathbb{N}_0$ の元としての相等と順序数としての相等は一致することを示せ.

問 14.2 $m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して, $\mathbb{N}_0$ の元としての大小と順序数としての大小は一致することを示せ.

問 14.3 すべての有限順序数 n に対して $n < \omega$ が成り立つことを示せ. 次に, ω は最小の超限順序数であることを示せ.

問 14.4 順序数 α, β が $\alpha \leq \beta$ を満たせば, $\alpha + \gamma = \beta$ となる順序数 γ が一意的に存在することを示せ.

問 14.5 順序数 α, β, γ に対して, $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ は一般には成り立たない. 例を示せ.

問 14.6 順序数 α, β, γ に対して, $(\beta\gamma)^\alpha = \beta^\alpha\gamma^\alpha$ は一般には成り立たない. 例を示せ.

問 14.7 順序数を元とする空でない集合 A には最小の順序数が存在することを示せ.

問 14.8 順序数を元とする集合 A に対して $\bigcup A$ も順序数になることを示せ.

第15章　自然数

この章が講義の最終目標である.

問 15.1 【必須】(X, e, φ) をペアノ系とするとき, 次が成り立つことを示せ.

$$X = \{e\} \cup \varphi(X), \qquad \{e\} \cap \varphi(X) = \emptyset.$$

問 15.2 【高度】(X, e, φ) がペアノ系であれば, X はデデキント無限集合であることを示せ. (無限集合の定義には有限集合が必要で, 有限集合の定義には自然数が必要である. ここでは, 無限集合ではなくデデキント無限集合を扱う.)

問 15.3 (加法に関する簡約法則) 自然数 $x, y, z \in \mathbb{N}$ に対して, 次が成り立つことを示せ.

(1) $x + z = y + z \;\Leftrightarrow\; x = y$.
(2) $x + z < y + z \;\Leftrightarrow\; x < y$.

問 15.4 (乗法に関する簡約法則) 自然数 $x, y, z \in \mathbb{N}$ に対して, 次が成り立つことを示せ.

(1) $xz = yz \;\Leftrightarrow\; x = y$.
(2) $xz < yz \;\Leftrightarrow\; x < y$.

問 15.5 定理 15.17 の $\mathbb{N}_0$ は推移的であることを示せ. このことから, $\mathbb{N}_0$ は順序数であることを示せ.

問 15.6 $\mathbb{N}_0 = \bigcup \mathbb{N}_0$ を示せ. (このことと問 14.8 と組み合わせても $\mathbb{N}_0$ が順序数であることがわかる.)

問 15.7 $x, y \in \mathbb{N}_0$ が $x \neq y$ を満たせば, 全単射 $f : x \longrightarrow y$ が存在しないことを示せ.

第16章　整数・有理数・実数

問 16.1 集合 $\mathbb{N}, \{0\}, -\mathbb{N}$ は互いに素であることを示せ.

問 16.2 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, 次が成り立つことを定義に基づいて示せ.

$$-(-x) = x, \qquad -(x+y) = (-x) + (-y)$$

問 16.3 R を環とする. 次のことを示せ.

(1) 任意の $x \in R$ に対して $0x = 0$.
(2) $x, y \in R$ に対して $-(xy) = (-x)y = x(-y)$.
(3) $x \in R$ に対して $(-1_R)x = -x$.

問 16.4 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, $x < y \Rightarrow -y < -x$ を示せ.

問 16.5 $\mathbb{Z}$ において, $(-1)(-1) = 1$ を示せ.

問 16.6 (乗法の簡約法則) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ で $z \neq 0$ であれば, $xz = yz \Leftrightarrow x = y$ を示せ.

問 16.7 A を $\mathbb{Z}$ の空でない部分集合とする. A が下から有界であれば, A には最小数が存在する. また, A が上から有界であれば, A には最大数が存在する.

問 16.8 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ 上の 2 項関係 (16.12) が同値関係になることを示せ.

問 16.9 $x_1, x_2, x_1', x_2' \in \mathbb{Z}$, $y_1, y_2, y_1', y_2' \in \mathbb{N}$ が $x_1/y_1 = x_1'/y_1'$, $x_2/y_2 = x_2'/y_2'$ を満たすとき, 次が成り立つことを示せ.

$$x_1 y_2 < x_2 y_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1' y_2' < x_2' y_1'.$$

問 16.10 X を順序体とする. $x, y \in X$ に対して, $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$ を示せ.

問 16.11 補題 16.16 を証明せよ.

問 16.12 $\xi \in \mathbb{R}$ に対応する切断の下組を A として,

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, \text{ある } y > 0 \text{ が存在して } -x - y \notin A\}$$

とおく. C はデデキントの切断の下組となり, それに対応する実数を η とすれば $\xi + \eta = 0$ となることを示せ.

問 16.13 補題 16.18 を証明せよ.

問 16.14 順序体 X において, 上に有界な空でない任意の部分集合が上限をもつとする. 任意の $x \in X$ に対して $x < n1 = 1 + \cdots + 1$ (n 個の和) を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在することを示せ (この性質を**アルキメデス性**という).