

修士論文

授業中における規範逸脱行動の広がりに関する数理モデルの研究

A mathematical model for the spread of rule-breaking behavior in class

令和 6 (2024) 年度

服部陽行

Haruyuki HATTORI

C3IM2036

東北大学大学院情報科学研究科 情報基礎科学専攻

Department of Computer and Mathematical Sciences

Graduate School of Information Sciences

Tohoku University

Aramaki-Aza-Aoba 6-3-09, Sendai, Miyagi 980-8579

JAPAN

目次

1	序	1
2	仮定：授業中の生徒	1
2.1	規範遵守行動と規範逸脱行動	1
2.2	選択行動と行動選択	2
2.3	選択行動の価値指数	2
2.4	価値指数に基づく行動選択	3
3	仮定：授業中の教室	4
3.1	教室の座席	4
3.2	最近接生徒	4
3.3	行動選択の時系列	5
4	行動の変更に抵抗のないモデル	6
4.1	行動選択の基準の特性	6
4.2	行動選択における授業の雰囲気からの寄与	6
4.3	雰囲気翻弄モデル	7
4.4	多数決モデル	8
4.5	天邪鬼モデル	10
4.6	協調モデル	11
4.7	3 × 3 モデル	14
4.8	6 × 6 モデル	21
5	行動の変更に抵抗のあるモデル	23
6	考察	24
付録 A	補題 4.15 の証明	27
付録 B	定理 4.19 の証明	30
付録 C	状態遷移確率と期待値の導出	35
付録 D	3 × 3 天邪鬼モデルで現れる併存平衡状態	37

1 序

大学受験間近の高校3年生の授業では、授業中に内職を始める生徒がいれば、その行動が教室内で徐々に広がる可能性があるだろう。授業内容とは関係のないそのような行動は規範逸脱行動 (rule-breaking behavior) と呼ばれることがあり、教育心理学における研究をはじめとして、多角的な観点からの研究がなされている [1]。

北折 [2] では、教室の雰囲気注目し、私語のような規範逸脱行動を含む、多くの生徒がとる行動を「記述的規範」、「教師や学級リーダーが示す理想的かつ模範的な行動」を「命令的規範」として、これらが各生徒の行動に影響を与えることから、教師が望ましい規範を明示し教室環境を整えることにより、生徒の行動を効果的に誘導し、規律を維持・改善できる可能性が示唆されている。Cialdini et al. [3] は、人々の行動が社会的規範によりどのように影響を受けるかを分析し、規範行為の焦点理論 (A focus theory of normative conduct) を提唱した。この理論では、社会的規範を「人々が実際にどう行動しているか」を示す「記述的規範」と、「社会がどの行動を望ましいとするか」を示す「命令的規範」に区別し、環境によりどちらが強く作用するかが異なることを指摘している。

卜部・佐々木 [4] は、「私語」が単に教師の求める態度を軽視して発生するのではなく、集団規範と密接に関わる現象であると指摘し、生徒は、内心の考えとは異なり、集団の期待に応じてあえて反抗的な態度をとり得、その結果として私語が生じることを考察した。藤原・長尾 [5] は、授業中における居眠りと教室環境の関係に着目し、室温温度と CO₂ 濃度の上昇が授業中における居眠りに関係があること、教室環境により規範逸脱行動が広がり得ることを示唆する結果を得た。

また、出口 [6, 7, 8, 9] は、授業中における規範逸脱行動に関する数理モデルを用いた研究である。それらの一連の研究では、教員が机間巡視を行う際、教室の周りや前を歩くより、中央を縦断する巡視が最も規範逸脱率を低下させ得ること [6]、教室内の雰囲気が個人の行動選択に影響を与え得ること [7]、規範逸脱行動をとる生徒の割合と生徒間の相互作用に高い相関関係があること [8, 9] が示唆される結果が得られている。一方、板木 [10] は、生徒の更生を考慮した数理モデルを格子モデルとして構築し、授業中の私語の伝播における教師側の言動に着目した理論的研究により、授業中に「私語が減ってきている」と教師が安心し、生徒に対して注意を十分に払わなくなることで、一旦収まりかけた私語が再び広がる可能性が示唆される結果を得ている。

本論文では、授業中の規範逸脱行動の広がりについて理論的に考察するための数理モデルを、有界な $n \times n$ (正方) セルオートマトンにより構築し、解析する。その解析結果に基づき、授業中に規範逸脱行動が広がらないための条件について理論的考察を試みる。

2 仮定：授業中の生徒

2.1 規範遵守行動と規範逸脱行動

本論文で取り扱う授業中の規範逸脱行動 (rule-breaking behavior) とは、授業内容とは関係のない行動であり、周りの生徒に影響を与え得る行動のことである。私語や内職、居眠りなどが例として挙げられる。以降、そのような規範逸脱行動を、教室内の生徒全員がとり得、教室内で伝播し得る行動として考える。また、対照的に、規範遵守行動 (rule-obeying behavior) を、規範逸脱行動として分類されないすべての「行動」のこととする。たとえば、「晩御飯の献立を予想する」ような授業内容とは関係がないが、脳内で完結していて周り

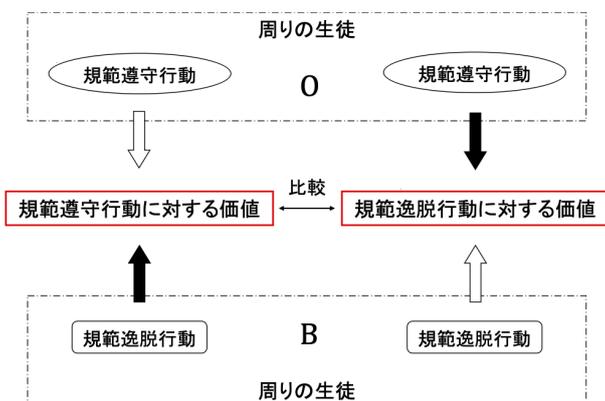


図 1: 周りの生徒のとっている行動に基づく選択行動の価値指数

の生徒に影響を与えない「行動」も規範遵守行動として扱う。

2.2 選択行動と行動選択

「選択行動」とは各生徒がとり得る行動の選択肢として与えられる行動のことであり、「行動選択」とは選択肢の中から自らのとる行動を選択する意思決定を指す。本論文で考える数理モデルでは、以下の仮定に基づいて、選択行動と行動選択の数理モデリングを行う：

仮定 1 選択行動は、規範遵守行動もしくは規範逸脱行動のいずれかである。

仮定 2 行動選択における基準はどの生徒についても同じである。

仮定 3 行動選択の機会はランダムに生起する。

仮定 4 行動選択は、自身の過去の意思決定からの影響を受けない。

仮定 5 各生徒の行動選択は、他の生徒の行動選択の影響を受けない。

仮定 6 行動選択は、周りの生徒のとっている行動の影響を受ける。

仮定 7 周りの生徒のとっている行動が行動選択に及ぼす影響において、規範遵守行動と規範逸脱行動からの寄与は異なる。

さらに、上記の仮定との論理・数理的整合性により、複数の生徒が同時に行動選択をするという事象は考えない。なお、行動選択により、自らの行動が変わる場合もあれば、元々とっていた行動を継続する場合もある。

2.3 選択行動の価値指数

仮定 6 と 7 に従い、周りの生徒のとっている行動からの影響に基づいて、行動選択の基準に用いる以下の選択行動の価値指数を導入する (図 1 参照)：

$$\begin{aligned}
 V_{O|O}^{[l]}(k) &:= S(\ell - k) + Dk; & V_{O|B}^{[l]}(k) &:= \varepsilon\{S(\ell - k) + Dk\} \\
 V_{B|O}^{[l]}(k) &:= \varepsilon\{D(\ell - k) + Sk\}; & V_{B|B}^{[l]}(k) &:= D(\ell - k) + Sk
 \end{aligned} \tag{1}$$

規範遵守行動をとっている生徒の行動選択について、 $V_{O|O}$ は規範遵守行動の価値指数、 $V_{B|O}$ は規範逸脱行動の価値指数である。規範逸脱行動をとっている生徒の行動選択について、 $V_{B|B}$ は規範逸脱行動の価値指数、

$V_{O|B}$ は規範遵守行動の価値指数である。 $V_{O|O}$ および $V_{B|B}$ は「自分のとっている行動を継続する価値」を意味し、 $V_{B|O}$ および $V_{O|B}$ は「自分のとっている行動を変更する価値」を意味していると考えられる。

正の整数 l はそれぞれの生徒に対する「周りの生徒」の数、 k ($\leq l$) はそのうち規範逸脱行動をとっている生徒の数である。正のパラメータ S と D は、周りの生徒がとっている規範遵守行動と規範逸脱行動の価値指数に対する寄与（影響の強さ）の違いを表す係数である。この係数は、選択行動と周りの生徒のとっている行動との相違によるものとして導入している。規範遵守行動の価値指数に対しては、周りの生徒の規範遵守行動からの影響の強さの重みが S 、規範逸脱行動からの影響の強さの重みが D であり、規範逸脱行動の価値指数に対しては、周りの生徒の規範遵守行動からの影響の強さの重みが D 、規範逸脱行動からの影響の強さの重みが S である。この数理的な仮定は、自分の行動選択において選択された行動と、周りの生徒のとっている行動の差異がその行動選択における選択行動の価値を決める最も単純な仮定である。

正のパラメータ ε (< 1) は、自らのとっている行動を継続する意思決定と変更する意思決定の差異を表す重み係数である。自らのとっている行動を変更する意思決定の方が継続する意思決定よりも起こりにくい、という仮定を導入し、 $\varepsilon < 1$ とする。すなわち、 ε は行動を変更する抵抗の度合いを表す指数であり、小さいほど、行動を変更することに対する抵抗が大きいことを意味する。 $\varepsilon = 1$ の場合、行動を変更する抵抗がない数理モデルとなる。行動を変更する意思決定において、規範遵守行動から規範逸脱行動への変更と、規範逸脱行動から規範遵守行動への変更では、その抵抗の度合いが異なるかもしれないが、本論文の数理モデリングでは、その違いは仮定しない。

2.4 価値指数に基づく行動選択

式 (1) により定義された選択行動の価値指数に基づき、規範遵守行動をとっている生徒の行動選択は以下の基準に従うものとする：

$$\begin{cases} V_{O|O} > \alpha V_{B|O} \implies \text{規範遵守行動を選択;} \\ V_{O|O} \leq \alpha V_{B|O} \implies \text{規範逸脱行動を選択} \end{cases} \quad (2)$$

そして、規範逸脱行動をとっている生徒の行動選択は以下の基準に従うものとする：

$$\begin{cases} V_{O|B} > \alpha V_{B|B} \implies \text{規範遵守行動を選択;} \\ V_{O|B} \leq \alpha V_{B|B} \implies \text{規範逸脱行動を選択} \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 α (> 0) は、規範逸脱行動の相対的な選択され易さを表すパラメータである。 α が 1 より大きいと規範逸脱行動が相対的に選択され易く、 α が 1 より小さいと規範遵守行動が相対的に選択され易い。たとえば、文化祭や体育祭のような学校行事の直前であれば、通常の時期に比べて、 α は比較的大きいだろう。受験の直前期であっても、受験科目と関係が薄い授業においては、 α は相対的に大きいだろう。また、進学クラスでは、それ以外のクラスに比べて α が相対的に小さいと考えられる。要するに、 α は、行動選択に対する授業の「雰囲気」からの寄与を表すパラメータである。

行動選択の基準 (2) と (3) に価値指数の定義 (1) を代入すると、条件 $V_{O|O} > \alpha V_{B|O}$ は、

$$S(l - k) + Dk > \varepsilon \alpha \{D(l - k) + Sk\}$$

と表され、さらに次のように書き換えることができる：

$$\varepsilon \alpha < Q(k/l, \delta) := \begin{cases} \frac{1 - k/l + \delta k/l}{\delta(1 - k/l) + k/l} & \text{for } (k, \delta) \neq (0, 0); \\ \infty & \text{for } (k, \delta) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $\delta := D/S$ である。同様に、 $V_{O|B} > \alpha V_{B|B}$ は、

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} < Q(k/\ell, \delta) \quad (5)$$

$V_{O|O} \leq \alpha V_{B|O}$ は、

$$\varepsilon \alpha \geq Q(k/\ell, \delta) \quad (6)$$

$V_{O|B} \leq \alpha V_{B|B}$ は、

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} \geq Q(k/\ell, \delta) \quad (7)$$

と書き換えることができる。行動選択において、条件 (4) と (5) が成り立てば規範遵守行動が選択され、条件 (6) と (7) が成り立てば規範逸脱行動が選択される。

たとえば、 $V_{O|O} > \alpha V_{B|O}$ となる場合の行動選択では、生徒が元々とっていた規範遵守行動をそのまま「継続」する意思決定となる。一方で、 $V_{O|O} \leq \alpha V_{B|O}$ となる場合には、生徒が元々とっていた規範遵守行動から規範逸脱行動に行動を「遷移」させる意思決定となる。このように、行動選択は、元々とっている行動を「継続」する意思決定と、元々とっている行動を異なる行動に「遷移」させる意思決定の2つに分けられる。なお、特殊な場合として、 $D = 0$ ならば、 $k = 0$ のときの行動選択では、必ず、規範遵守行動が選択される。この特殊な場合は、式 (4) による関数 Q の定義における $(k, \delta) = (0, 0)$ の場合に対応する。

3 仮定：授業中の教室

同一の大きさの方形セルを平面に隙間なく n 行 n 列に敷き詰めて構成されるものを $n \times n$ (正方) セルオートマトンと呼ぶ。本論文では、 $n \times n$ セルオートマトンにより授業中の教室の空間を数理モデリングし、座席を各セルに対応させる数理モデルを考える。現在の日本の多くの小・中学校、高等学校の各学級の生徒数を勘案すれば、 6×6 セルオートマトンによる数理モデルが現実の教室に対応する大きさをもつ。

3.1 教室の座席

以下の仮定に基づいて、授業中の教室の座席の数理モデリングを行う：

仮定 8 教室内の座席は縦横に整然と固定されている。

仮定 9 すべての座席に生徒が着席している。

仮定 10 授業中、着席している座席から各生徒は移動はしない。

教室の空間は、有界な $n \times n$ セルオートマトンにより数理モデリングされ、 $n \times n$ セルの端のセルの外側にセルは存在しない。つまり、各生徒は教室の外から影響を受けない。教室内の座席は次の3つのタイプに分けることができる。「四方を座席に囲まれる座席」、「教室の角の座席」、「教室の角以外の端の座席」。これらは、周りの座席数による分類にもなっており、「四方を座席に囲まれる座席」の周りの座席数は8つ、「教室の角の座席」の周りの座席数は3つ、「教室の角以外の端の座席」の周りの座席数は5つである (図 2 参照)。

3.2 最近接生徒

正方セルオートマトンの各セルに対する「最近接セル」として、「ムーア近傍」を考える。「ムーア近傍」とは、各セルと辺もしくは頂点を共有するセルで最近接を構成する、図 2 で塗りつぶしたセルに対して斜め線が

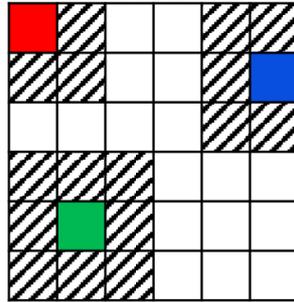


図 2: 本論文の数理モデリングにおける 6×6 セル空間についての最近接セル

引かれたセルのことをいう。本論文の数理モデルにおける「最近接生徒」とは、最近接セルに座っている生徒であり、「最近接生徒」が、2章で述べた「周りの生徒」を意味する。緑のセルのような「四方を座席に囲まれる座席」に座る生徒の最近接生徒は8人、赤のセルのような「教室の角の座席」に座る生徒の最近接生徒は3人、青のセルのような「教室の角以外の端の座席」に座る生徒の最近接生徒は5人である。2.3節で定義した価値指数において、 l が最近接生徒の数であったから、定義(1)において、「四方を座席に囲まれる座席」に座る生徒については $l = 8$ 、「教室の角の座席」に座る生徒については $l = 3$ 、「教室の角以外の端の座席」に座る生徒については $l = 5$ である。

3.3 行動選択の時系列

授業開始時における、規範遵守行動をとっている生徒と規範逸脱行動をとっている生徒の配置を「初期状態」と呼ぶ。行動選択はランダムに生起するという仮定3に基づき、 $n \times n$ セルに座っている任意の生徒が任意のタイミングで行動選択をする。本論文では、特に、授業中の教室内の行動選択の時系列における、「規範逸脱行動をとる生徒」の割合 f_B に着目する。

本論文における数理モデルの数値計算においては、たとえば、 6×6 セルオートマトンによる数理モデル(6×6 モデル)についての行動選択の時系列データを、以下のアルゴリズムにより生成する：

1. 8×8 のグリッドを作り、外枠のセルを -1 に設定する。
2. 内側の 6×6 セルに 1 (規範遵守行動) と 0 (規範逸脱行動) を配置し、これを「初期状態」とする。
3. 内側の 6×6 セルからランダムに1つのセルを選び、行動選択の基準に従って、状態を更新、もしくは継続させる。
4. 3の操作を設定した回数分繰り返す。
5. 設定した回数分3に操作を繰り返した後、内側の 6×6 セルにおける 0 の占める割合 f_B^∞ を計算して出力する。

4 行動の変更に抵抗のないモデル

4.1 行動選択の基準の特性

行動の変更に抵抗のないモデルとは、生徒が今とっている行動に行動選択が依存しない場合の数理モデルである。すなわち、価値指数の定義 (1) において $\varepsilon = 1$ とする行動選択が仮定された数理モデルである。この数理モデルにおいては、行動選択における「規範遵守行動の価値指数」と「規範逸脱行動の価値指数」が生徒のとっている行動によらずに同じであり、定義 (1) において $V_{O|O} = V_{O|B}$, $V_{B|B} = V_{B|O}$ が成り立つので、本節では、 $V_{O|O} = V_{O|B} = V_O$, $V_{B|B} = V_{B|O} = V_B$ と表す：

$$V_O^{[l]}(k) := S(\ell - k) + Dk; \quad V_B^{[l]}(k) := D(\ell - k) + Sk \quad (8)$$

よって、各生徒の行動選択は、以下の基準に従う：

$$\begin{cases} V_O > \alpha V_B \implies \text{規範遵守行動を選択;} \\ V_O \leq \alpha V_B \implies \text{規範逸脱行動を選択} \end{cases} \quad (9)$$

そして、行動選択の基準 (9) に価値指数の定義 (8) を代入すれば、条件 $V_O > \alpha V_B$ は次のように表される：

$$\alpha < Q(k/\ell, \delta) \quad (10)$$

同様に、条件 $V_O \leq \alpha V_B$ は、

$$\alpha \geq Q(k/\ell, \delta) \quad (11)$$

と表される。本節で考える数理モデルについては、行動選択において、条件 (10) が成り立てば、規範遵守行動が選択され、条件 (11) が成り立てば、規範逸脱行動が選択される。

4.2 行動選択における授業の雰囲気からの寄与

授業の雰囲気からの寄与は、パラメータ α により導入されている。与えられた α の値に対して、生徒の行動選択の基準は式 (8), (9) で定まり、基準値 $Q(k/\ell, \delta)$ は、起こり得る k/ℓ の値、

$$\frac{k}{\ell} \in \Omega := \left\{ 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{2}{8}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{6}{8}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, 1 \right\}$$

により定まる値に限定される。今、 $\omega \in \Omega$ に対して、 $\alpha_{\omega, \delta} := Q(\omega, \delta)$ と表せば、 $\omega_1 < \omega_2$ なる $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ に対して、 $\delta < 1$ のとき、 $\alpha_{\omega_1, \delta} > \alpha_{\omega_2, \delta}$ であり、 $\delta > 1$ のとき、 $\alpha_{\omega_1, \delta} < \alpha_{\omega_2, \delta}$ であることは、式 (4) による $Q(\omega, \delta)$ の定義により容易にわかる。

ただし、 $\delta = 1$ の場合、任意の k/ℓ に対して $Q(k/\ell, 1) = 1$ であるから、行動選択の基準は、与えられた α の値のみにより定まる。すなわち、 $\delta = 1$ ならば、行動選択の基準が最近接生徒のとっている行動に依存せず、授業の「雰囲気」のみにより定まり、任意の生徒の行動選択は、 $\alpha < 1$ ならば規範遵守行動を、 $\alpha \geq 1$ ならば規範逸脱行動を選択する意思決定となる。

$\delta \neq 0, 1$ の場合について、教室内の規範逸脱行動の広がりに関する以下の定理を示すことができる。

定理 4.1 $\delta \neq 0, 1$ の場合、 $\alpha < \min_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に向かう遷移が起こる。 $\alpha \geq \max_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態に向かう遷移が起こる。

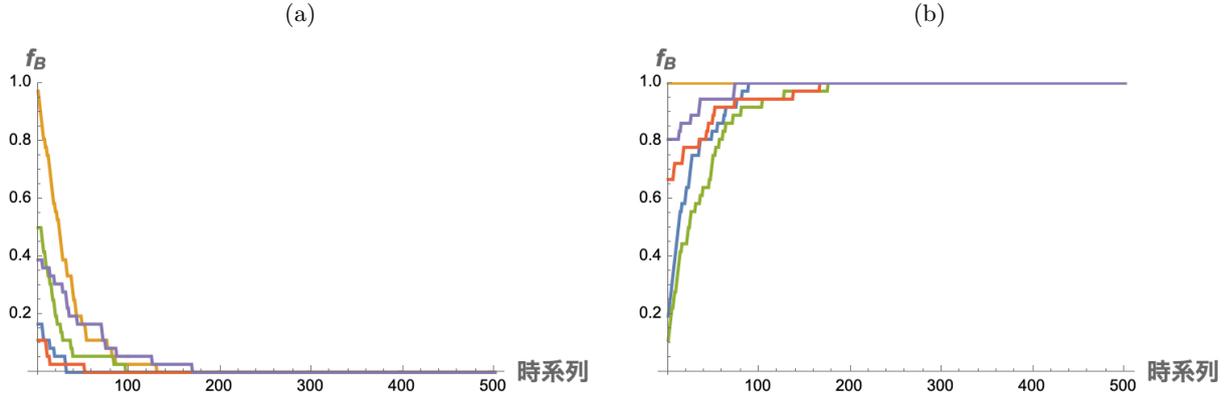


図 3: 6×6 雰囲気翻弄モデルについての規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B の時系列の数値計算。異なる 5 つの初期状態に対する数値計算。(a) $\alpha = 0.6$; (b) $\alpha = 1.4$ 。

証明 $\alpha < \min_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、任意の生徒の行動選択が基準 (10) を満たし、規範遵守行動が選択されるので、初期状態によらず、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調状態に向かう遷移が起こる。 $\alpha \geq \max_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、任意の生徒の行動選択が基準 (11) を満たし、規範逸脱行動が選択されるので、初期状態によらず、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調状態に向かう遷移が起こる。□

定理 4.1 により、 $\delta \neq 0, 1$ の場合、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとっている初期状態からであっても、 $\alpha < \min_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に向かう。また、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態に対しても、 $\alpha \geq \max_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態に向かう。

教室内における規範逸脱行動と規範遵守行動の遷移について、教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B の平衡値を次のように定義する。

定義 4.2 教室内の行動選択の繰り返しにより、規範逸脱行動をとる生徒の割合 f_B が特定の値に収束するならば、その収束値を f_B^* により表す。

たとえば、定理 4.1 で示された場合のように、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に落ち着く遷移が起こる場合、 $f_B^* = 0$ であり、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態に陥る遷移が起こる場合、 $f_B^* = 1$ である。

4.3 雰囲気翻弄モデル

4.2 節で述べたように、 $\delta = 1$ の場合、行動選択の基準は α のみにより定まり、最近接生徒のとっている行動に依存しない。本論文では、この場合の数理モデルを雰囲気翻弄モデルと呼ぶ。雰囲気翻弄モデルの行動選択の基準は (10), (11) により与えられ、状態遷移に関する以下の定理が得られる。

定理 4.3 雰囲気翻弄モデルについては、初期状態によらずに、 $\alpha < 1$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。 $\alpha \geq 1$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に向かう遷移が起こる。

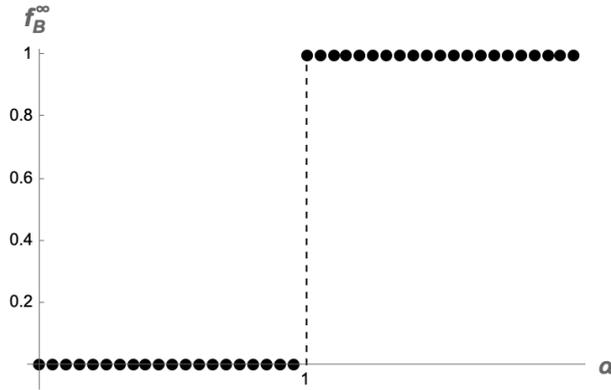


図 4: 6×6 雰囲気翻弄モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行 100 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数がランダムに与えられる場合。

図 3, 4 は, 6×6 雰囲気翻弄モデルによる数値計算結果である。定理 4.3 により, 雰囲気翻弄モデルでは, $\alpha < 1$ ならば, 教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとっている初期状態に対しても, 教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に落ち着く遷移が起こる。また, $\alpha \geq 1$ ならば, 教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態に対しても, 教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に陥る遷移が起こる。

4.4 多数決モデル

$\delta = 0$ の場合, $Q(k/\ell, 0) = (1 - k/\ell)/(k/\ell)$ であり, 行動選択の基準は, 最近接生徒のうち規範逸脱行動をとっている生徒の割合 k/ℓ のみにより定まる。本論文では, この場合の数理モデルを多数決モデルと呼ぶ。多数決モデルの性質については, 次の補題が得られる:

補題 4.4 多数決モデルにおいて, 教室内の生徒全員が規範遵守行動もしくは規範逸脱行動をとっている初期状態からは, 他方の行動は現れない。

証明 教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている状態では, 任意の生徒の行動選択において $k = 0$ なので, (4) から, $Q(k/\ell, 0) = Q(0, 0) = \infty$ により, 基準 (10) に従い, 規範遵守行動が選択される。すなわち, 教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている状態においては, すべての生徒が, とっている行動を変更し得ない。

教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとっている状態では, 任意の生徒の行動選択において $k = \ell$ なので, 定義 (8) により, 選択行動の価値指数は,

$$V_O^{[\ell]}(\ell) = D\ell = 0; \quad V_B^{[\ell]}(\ell) = S\ell$$

である。よって, 必ず, $V_O^{[\ell]}(\ell) < \alpha V_B^{[\ell]}(\ell)$ が成り立ち, 規範逸脱行動が選択される。したがって, 教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとっている状態においては, すべての生徒が, とっている行動を変更し得ない。□

さらに, 次の定理が得られる。

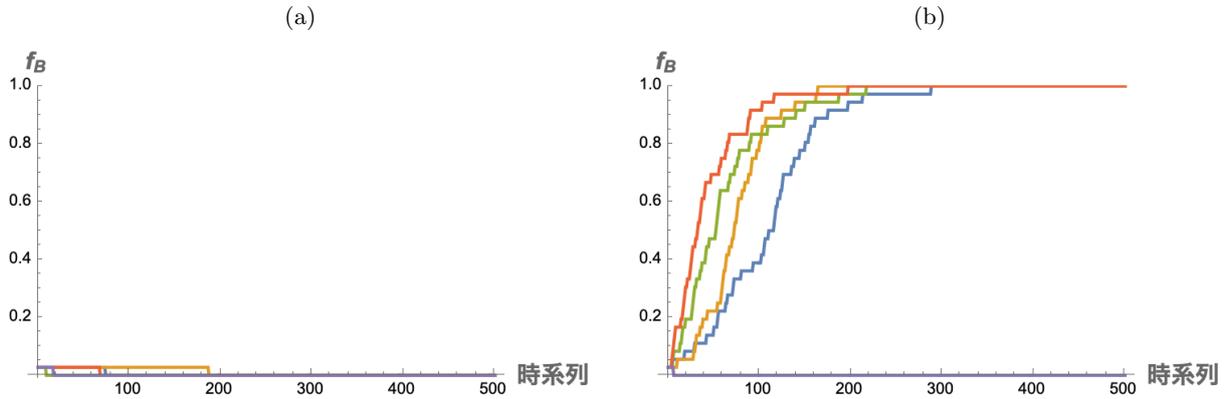


図 5: 6×6 多数決モデルについての規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B の時系列の数値計算。教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている異なる 5 つの初期状態に対する数値計算。(a) $\alpha = \alpha_{3/8} = 5/3$; (b) $\alpha = \alpha_{1/8} = 7$ 。

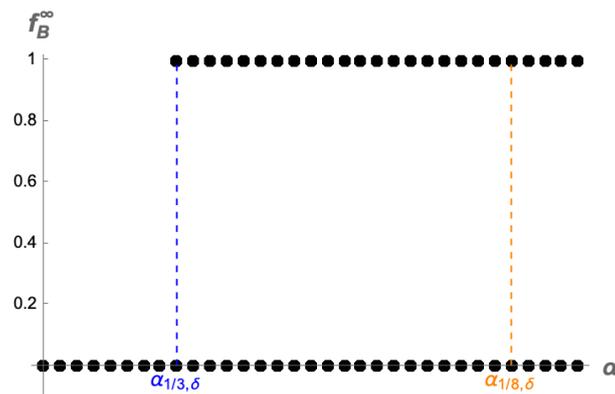


図 6: 6×6 多数決モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起こり得る初期状態でそれぞれ 10 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。

定理 4.5 多数決モデルにおいて、 $\alpha < \alpha_{1/3,0}$ ならば、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。

証明 教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れるためには、補題 4.4 により、 $k = 1$ を満たす生徒の行動選択において、規範逸脱行動が選択されることが必要である。 $\alpha_{1/3,0}$ は、 $k = 1$ の「教室の角の座席」に座る生徒の行動選択の基準値であり、4.2 節で述べたように、 $\delta = 0$ の場合、 $\alpha_{\omega,0}$ が ω について単調減少なので、 $k = 1$ なる生徒の行動選択の基準値が取り得る $\alpha_{1/3,0}$, $\alpha_{1/5,0}$, $\alpha_{1/8,0}$ のうちで最も小さい。よって、 $\alpha < \alpha_{1/3,0}$ ならば、 $k = 1$ なる生徒の行動選択においては、必ず、規範遵守行動が選択される。一方、初期状態において規範逸脱行動をとっている生徒の行動選択では、 $k = 0$ なので、補題 4.4 の証明で記したように、規範遵守行動が選択される。したがって、教室内の

生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に落ち着く遷移が起こる (図 5, 6 参照)。□

また、次の定理を得ることもできる。

定理 4.6 多数決モデルにおいて、 $\alpha \geq \alpha_{1/8,0}$ ならば、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、その生徒の最近接生徒 1 人が規範逸脱行動をとる 2 人目になれば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に向かう遷移が起こる。一方、規範逸脱行動をとっている最初の生徒が、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れる前に、行動を規範遵守行動に変更する意思決定を行なった場合には、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。

証明 $\alpha \geq \alpha_{1/8,0}$ なので、最近接生徒のうち少なくとも 1 人が規範逸脱行動をとっていれば、行動選択において、規範逸脱行動が選択される。補題 4.4 の証明に記した議論に従い、最近接生徒全員が規範遵守行動をとるならば、行動選択では、規範遵守行動が選択される。教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、その生徒を最近接生徒に含む生徒の行動選択において、規範逸脱行動が選択されるが、最近接生徒に規範逸脱行動をとる生徒がいない生徒の行動選択においては、規範遵守行動が選択される。よって、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒となり得るのは、初期状態において規範逸脱行動をとっている生徒の最近接生徒に限られる。したがって、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れれば、規範逸脱行動をとる 2 人の生徒は互いに他方の最近接生徒でなければならない。それらの 2 人の生徒の行動選択においては、必ず、規範逸脱行動が選択され、規範逸脱行動を継続する。このことから、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れた後、規範逸脱行動をとる生徒が減ることはない。すなわち、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に陥る遷移が起こる。一方、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れる前に、初期状態において規範逸脱行動をとっている生徒が行動選択をした場合には、規範遵守行動が選択されるため、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に落ち着く遷移が起こる。□

4.5 天邪鬼モデル

$D > S$ ($\delta > 1$) の場合には、価値指数の定義 (8) において、選択行動と異なる行動をとっている最近接生徒からの影響が相対的に大きい。本論文では、この場合の数理モデルを天邪鬼モデルと呼ぶ。式 (8) において、 $S \rightarrow 0$ のとき、選択行動と同じ行動からの影響は受けず、異なる行動をとっている最近接生徒からの影響のみで行動選択が行われる。この場合については、特別に、極天邪鬼モデルと呼ぶ。

定理 4.1 により、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとっている初期状態からでも、 $\alpha < \min_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。また、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態からでも、 $\alpha \geq \max_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に向かう遷移が起こる。そして、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega,\delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ の場合については、次の定理が得られる。

定理 4.7 天邪鬼モデルにおいて、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega,\delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ ならば、初期状態によらずに、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態 ($0 < f_B^* < 1$) に至る遷移が起こる。極天邪鬼モデルについても同様である。

証明 $\delta > 1$ なので、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega,\delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ は $\alpha_{0,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1,\delta}$ と書き換えられる。 $\alpha < \alpha_{1,\delta}$ の場合、最近接生徒全員が規範逸脱行動をとっている生徒の行動選択においては、規範遵守行動が選択される。 $\alpha \geq \alpha_{0,\delta}$

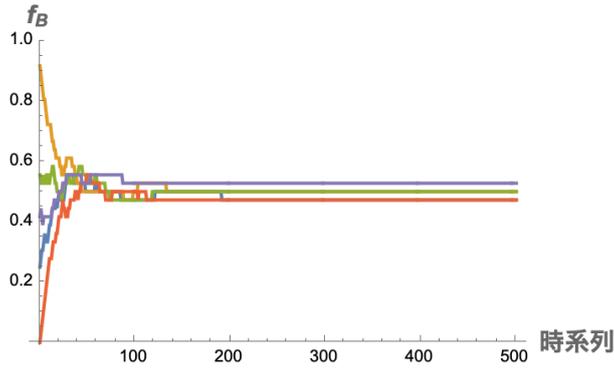


図 7: 6×6 天邪鬼モデルについての規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B の時系列の数値計算。異なる 5 つの初期状態に対する数値計算。 $\delta = 1.4$, $\alpha = \alpha_{4/8} = 1$ 。

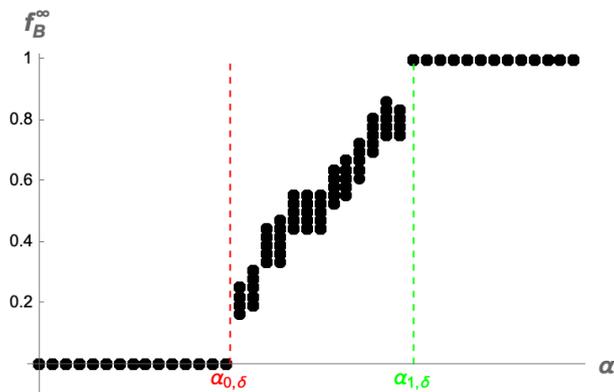


図 8: 6×6 天邪鬼モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 1.4$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行 100 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数がランダムに与えられる場合。

の場合、最近接生徒全員が規範遵守行動をとっている生徒の行動選択においては、規範逸脱行動が選択される。よって、教室内の生徒全員が規範遵守行動もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態に向かう遷移は起こらず、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態 ($0 < f_B^* < 1$) に至る遷移が起こる (図 7, 8 参照)。 □

4.6 協調モデル

$S > D$ ($0 < \delta < 1$) の場合には、であるから、価値指数の定義 (8) において、選択行動と同じ行動をとっている最近接生徒からの影響が相対的に大きい。本論文では、この場合の数理モデルを協調モデルと呼ぶ。

定理 4.1 により、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとっている初期状態からでも、 $\alpha < \min_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。また、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態からでも、 $\alpha \geq \max_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行

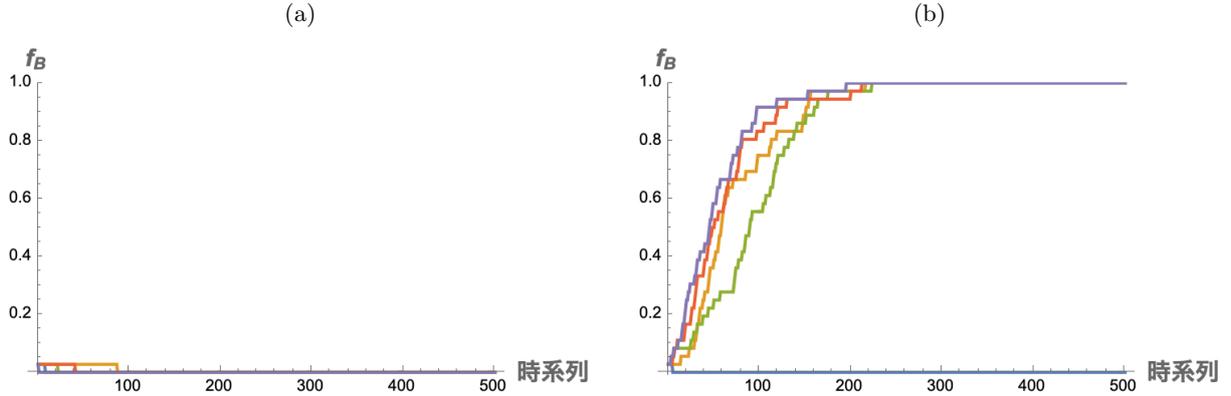


図 9: 6×6 協調モデルについての規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B の時系列の数値計算。教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている異なる 5 つの初期状態に対する数値計算。 $\delta = 0.6$ 。(a) $\alpha = \alpha_{3/8} = 17/15$; (b) $\alpha = \alpha_{1/8} = 19/13$ 。

動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に向かう遷移が起こる。そして、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega, \delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ の場合については、次の補題が成り立つ。

補題 4.8 協調モデルにおいて、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega, \delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動もしくは規範逸脱行動をとっている初期状態からは、他方の行動は現れない。

証明 $0 < \delta < 1$ なので、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega, \delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ は $\alpha_{1, \delta} \leq \alpha < \alpha_{0, \delta}$ と書き換えられる。教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態では、任意の生徒の行動選択において $k = 0$ であり、 $\alpha = \alpha_{0, \delta}$ は $k = 0$ を満たす生徒の行動選択の基準値である。よって、 $\alpha < \alpha_{0, \delta}$ ならば、 $k = 0$ なる生徒の行動選択においては、必ず、規範遵守行動が選択されるので、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている状態からは、すべての生徒が、とっている行動を変更し得ない。教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとっている初期状態では、任意の生徒の行動選択において $k = l$ であり、 $\alpha = \alpha_{1, \delta}$ は $k = l$ を満たす生徒の行動選択の基準値である。よって、 $\alpha \geq \alpha_{1, \delta}$ ならば、 $k = l$ なる生徒の行動選択においては、必ず、規範逸脱行動が選択されるので、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとっている状態からは、すべての生徒が、とっている行動を変更し得ない。□

さらに、次の定理が得られる。

定理 4.9 協調モデルにおいて、 $\alpha < \alpha_{1/3, \delta}$ ならば、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。

証明 教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れるためには、補題 4.8 により、 $k = 1$ を満たす生徒の行動選択において、規範逸脱行動が選択されることが必要である。 $\alpha_{1/3, \delta}$ は、 $k = 1$ の「教室の角の座席」に座る生徒の行動選択の基準値であり、4.2 節で述べたように、 $0 < \delta < 1$ の場合、 $\alpha_{\omega, \delta}$ が ω について単調減少なので、 $k = 1$ なる生徒の行動選択の基準値が取り得る $\alpha_{1/3, \delta}$, $\alpha_{1/5, \delta}$, $\alpha_{1/8, \delta}$ のうちで最も小さい。よって、 $\alpha < \alpha_{1/3, \delta}$ ならば、 $k = 1$ なる生徒の行動選択においては、必ず、規範遵守行動が選択される。一方、初期状態において規範逸脱行動をとっている生徒の行動選択では、 $k = 0$ なので、補題 4.8 の証明で記したように、規範遵守行動が選択される。したがって、教室

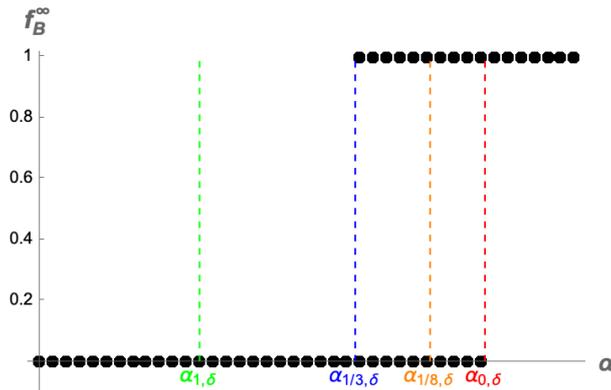


図 10: 6×6 協調モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 0.6$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起り得る初期状態でそれぞれ 10 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。

内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に落ち着く遷移が起こる (図 9, 10 参照)。□

定理 4.10 $\alpha_{1/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ ならば、協調モデルにおいて、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、その生徒が最近接生徒のうちから規範逸脱行動をとる 2 人目の生徒が現れた場合には、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に陥る遷移が起こる。一方、規範逸脱行動をとっている最初の生徒が、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れる前に、行動を規範遵守行動に変更する意思決定を行なった場合には、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に落ち着く遷移が起こる。

証明 $\alpha_{1/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ なので、最近接生徒のうち少なくとも 1 人規範逸脱行動をとっている生徒がいれば、行動選択において、規範逸脱行動が選択される。補題 4.8 の証明に記した議論に従い、最近接生徒全員が規範遵守行動をとるならば、行動選択では、規範遵守行動が選択される。教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、その生徒を最近接生徒に含む生徒の行動選択においては、規範逸脱行動が選択されるが、最近接生徒に規範逸脱行動をとる生徒がいない生徒の行動選択においては、規範遵守行動が選択される。よって、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒となり得るのは、初期状態において規範逸脱行動をとっている生徒の最近接生徒に限られる。したがって、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れれば、規範逸脱行動をとる 2 人の生徒は互いに他方の最近接生徒でなければならない。それらの 2 人の生徒の行動選択においては、必ず、規範逸脱行動が選択され、規範逸脱行動を継続する。このことから、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れた後、規範逸脱行動をとる生徒が減ることはない。すなわち、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に陥る遷移が起こる。一方、2 人目の規範逸脱行動をとる生徒が現れる前に、初期状態において規範逸脱行動をとっている生徒が行動選択をした場合には、規範遵守行動が選択されるため、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に落ち着く遷移が起こる。□

4.7 3×3 モデル

3×3 セルオートマトンモデルとは、3.2 節で述べた「3つのタイプの最近接生徒」を全て含む最小サイズのモデルである。ここでは、3×3 モデルについて、解析的に得られる結果について述べる。6×6 モデルの特性を理解する上で、3×3 モデルについて得られた結果が有用であることを後に示す。

平衡状態

定理 4.1, 4.3, 4.7 から、以下の定理が得られる。

定理 4.11 3×3 モデルにおいては、 $\delta \neq 0, 1$ の場合、初期状態によらずに、 $\alpha < \min_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。 $\alpha \geq \max_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に向かう遷移が起こる。

証明は定理 4.1 と同様である。

定理 4.12 3×3 モデル (雰囲気翻弄モデル) においては、 $\delta = 1$ の場合、初期状態によらずに、 $\alpha < 1$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。 $\alpha \geq 1$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 1$) に向かう遷移が起こる。

証明は定理 4.3 と同様。

定理 4.13 3×3 モデル (天邪鬼モデル) においては、 $\delta > 1$ の場合、初期状態によらずに、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega, \delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega, \delta}$ ならば、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態 ($0 < f_B^* < 1$) に至る遷移が起こる。

証明は定理 4.7 と同様。

教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態に対する平衡状態については、次の補題が成り立つ (補題 4.15 の証明は付録 A)。

補題 4.14 3×3 モデルにおいては、 $0 \leq \delta < 1$ の場合、 $\alpha < \alpha_{1/3, \delta}$ ならば、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に向かう遷移が起こる。

証明は定理 4.5 と 4.9 と同様。

補題 4.15 3×3 モデルにおいては、 $0 \leq \delta < 1$ の場合、 $\alpha \geq \alpha_{1/3, 0}$ または $\alpha_{1/3, \delta} \leq \alpha < \alpha_{0, \delta}$ ならば、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$ or 1) に向かう遷移が起こる。どちらの状態に行き着くかは確率的に決まる。

定理 4.11, 4.12, および、補題 4.14, 4.15 により、次の定理が得られた (図 11b 参照)。

定理 4.16 3×3 モデルにおいては、 $0 \leq \delta \leq 1$ の場合、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態に至る遷移が起こる ($f_B^* = 0$ or 1)。

以下の結果により、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態に対する平衡状態について、図 11a に示される相図を得ることができる。図 11a において、 $\delta = 0$ (3×3 多数決モデル) の場合については、補題 4.14 と 4.15 からの結果が示される。 $0 < \delta < 1$ (3×3 協調モデル) の場合については、定理

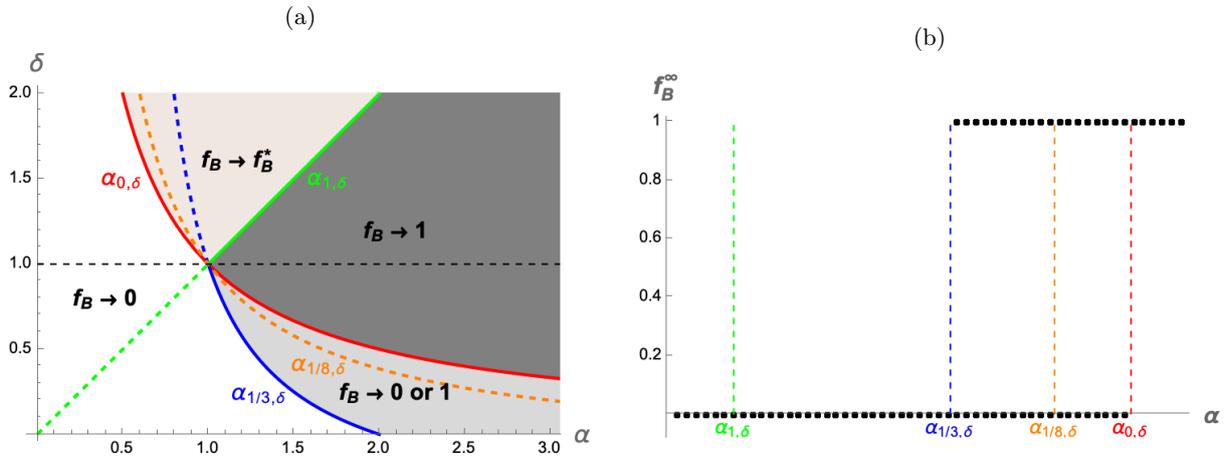


図 11: (a) 3×3 モデルについて、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態に対する平衡状態の (α, δ) 依存性。「 $f_B \rightarrow f_B^*$ 」の領域においては $f_B^* \in (0, 1)$; (b) 3×3 協調モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 0.6$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 300 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起り得る初期状態でそれぞれ 10 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。

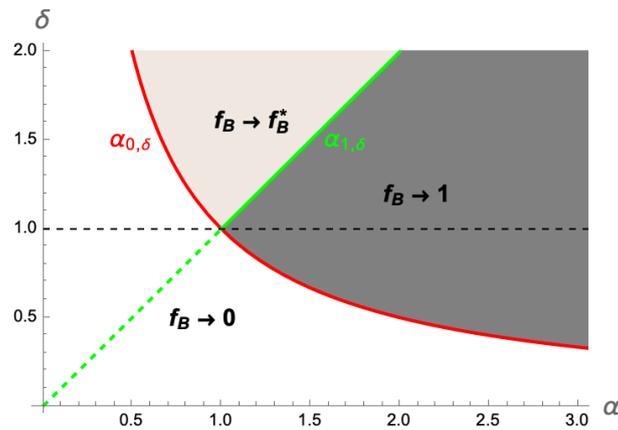


図 12: 3×3 モデルについて、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態に対する平衡状態の (α, δ) 依存性。「 $f_B \rightarrow f_B^*$ 」の領域においては $f_B^* \in (0, 1)$ 。

4.11 および補題 4.14 と 4.15 からの結果が示される。 $\delta = 1$ (3×3 雰囲気翻弄モデル) の場合については、定理 4.12 の結果が示される。 $\delta > 1$ (3×3 天邪鬼モデル) の場合については、定理 4.13 の結果が示される。

教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態に対する平衡状態については、次の定理が得られる。

定理 4.17 3×3 モデル (多数決モデル) において、 $\delta = 0$ の場合、教室内の生徒全員が規範遵守行動もしくは規範逸脱行動をとっている初期状態からは、他方の行動は現れない。

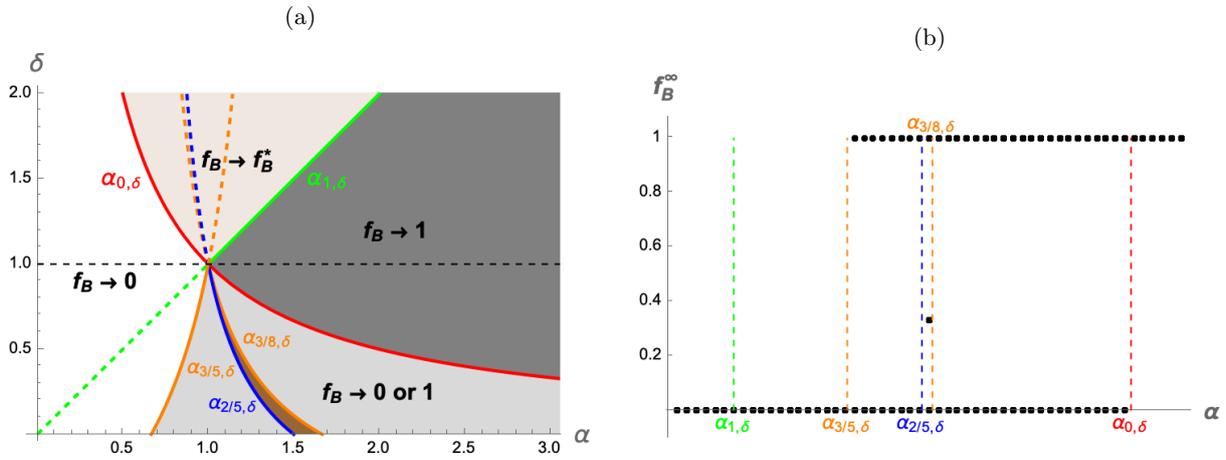


図 13: (a) 3×3 モデルについて、教室内の生徒 2 人が規範逸脱行動をとっている初期状態に対する平衡状態の (α, δ) 依存性。「 $f_B \rightarrow f_B^*$ 」の領域においては $f_B^* \in (0, 1)$; (b) 3×3 協調モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 0.6$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して行動選択 300 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行 500 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 2 人として与えられる場合。

証明は補題 4.4 と同様。また、定理 4.1 と補題 4.8 から次の定理も得られる。

定理 4.18 $\delta < 1$ における 3×3 モデル (協調モデル) において、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態からは、 $\alpha < \alpha_{0,\delta}$ ならば、規範逸脱行動をとる生徒は現れない ($f_B^* = 0$)。 $\alpha \geq \alpha_{0,\delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態に陥る遷移が起こる ($f_B^* = 1$)。

以上の結果により、教室内の生徒生徒全員が規範逸脱行動をとっている初期状態に対する平衡状態について、図 12 に示される相図を得ることができる。図 12 において、 $\delta = 0$ (3×3 多数決モデル) の場合については、定理 4.17 の結果が示される。 $0 < \delta < 1$ (3×3 協調モデル) の場合については、定理 4.18 の結果が示される。 $\delta = 1$ (3×3 雰囲気翻弄モデル) の場合については、定理 4.12 の結果が示される。 $\delta > 1$ (3×3 天邪鬼モデル) の場合については、定理 4.13 の結果が示される。

教室内の生徒 2 人が規範逸脱行動をとっている初期状態に対する平衡状態については、次の定理が得られる (証明は付録 B 参照)。

定理 4.19 3×3 モデルにおいて、 $0 \leq \delta < 1$ の場合、 $\alpha_{2/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{3/8,\delta}$ ならば、教室内の生徒 2 人が規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$ or 1) に向かう遷移が起こる場合がある。あるいは、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態 ($f_B^* = 1/3$) に至る遷移が起こる場合もあり、 α によらないある一定の割合に行き着く。 α が $\alpha_{2/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{3/8,\delta}$ 以外の範囲のときには、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$ or 1) に向かう遷移が起こる (図 13b 参照)。

以上の結果により、教室内の生徒 2 人が規範逸脱行動をとっている初期状態に対する平衡状態について、図 13a に示される相図を得ることができる。図 13a において、 $0 \leq \delta < 1$ (3×3 多数決モデルおよび協調モデル) の場合については、定理 4.19 の結果が示される。 $\delta = 1$ (3×3 雰囲気翻弄モデル) の場合については、定

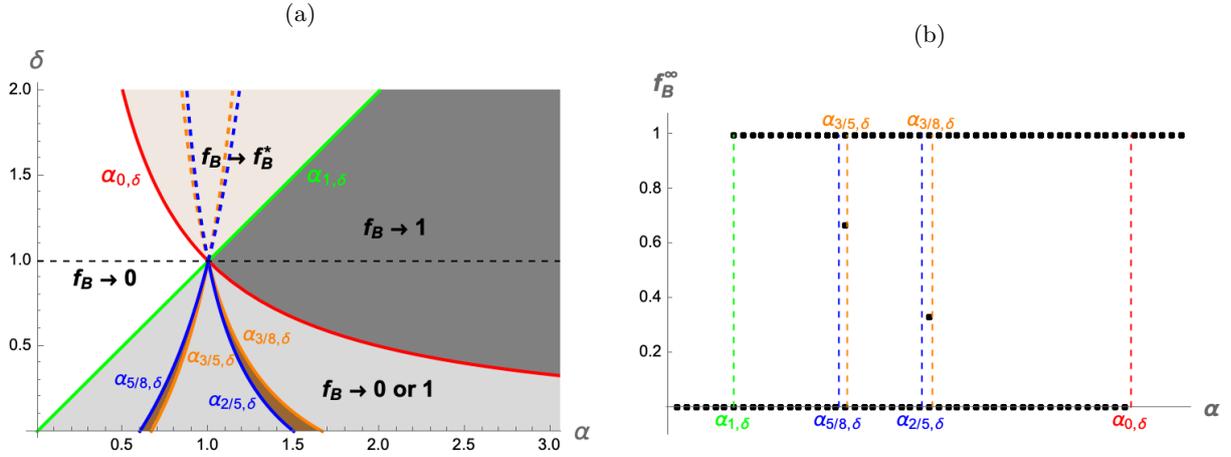


図 14: (a) 3×3 モデルについて、教室内の生徒 3 人以上が規範逸脱行動をとっている初期状態に対する数値計算により示唆される平衡状態の (α, δ) 依存性。「 $f_B \rightarrow f_B^*$ 」の領域においては $f_B^* \in (0, 1)$; (b) 3×3 協調モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 0.6$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して行動選択 300 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行 1000 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 3 人以上として与えられる場合。

理 4.12 の結果が示される。 $\delta > 1$ (3×3 天邪鬼モデル) の場合については、定理 4.13 の結果が示される。

また、教室内の生徒 3 人以上が規範逸脱行動をとっている初期状態からの状態遷移については、図 14b として示した数値計算結果が、 $\alpha_{5/8} \leq \alpha < \alpha_{3/5}$ ならば、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態に至る遷移が起こることを示した。このことから、図 14a に示した平衡状態の相図が得られた。

平衡状態における規範逸脱行動の頻度の期待値

3×3 モデルにおいて、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態は、9 通りある。初期状態がランダムに定まるとすれば、それぞれの初期状態が現れる確率は等しい。すなわち、各初期状態は確率 $1/9$ で生起する。行動選択の機会がランダムに生起すると仮定しているので、平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^* を確率変数と考えることができる。

今、

$$f_B^* = f_{B,k}^* := \frac{k}{9} \quad (k = 0, 1, \dots, 9)$$

となる確率を p_k^* と表せば、 f_B^* の期待値 $\langle f_B^* \rangle$ が次のように定義できる：

定義 4.20

$$\langle f_B^* \rangle := \sum_{k=0}^9 p_k^* f_{B,k}^* = \sum_{k=0}^9 p_k^* \frac{k}{9} = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^9 k p_k^*$$

3×3 天邪鬼モデルでは、定理 4.13 により、初期状態によらずに、 $\alpha_{0,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1,\delta}$ ならば、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態に至る遷移が起こる。すなわち、 $\alpha_{0,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1,\delta}$

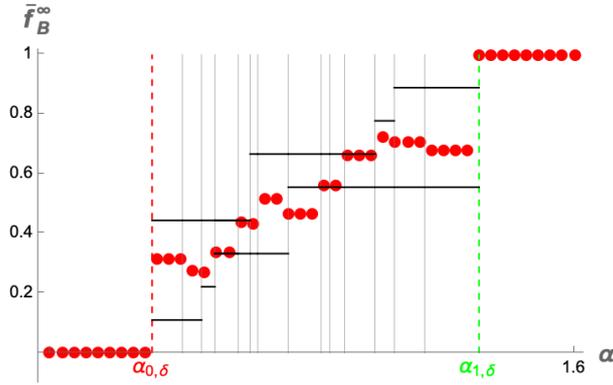


図 15: 3×3 天邪鬼モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の平均値 \bar{f}_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 1.4$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 250 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起り得る初期状態でそれぞれ 1000 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。黒の横線は付録 D の表 3 における各区間における f_B^* の最小値と最大値である。

ならば、 $p_0^* = 0$, $p_9^* = 0$ である。また、定理 4.11 により、 $\alpha < \alpha_{0,\delta}$ ならば、 $p_0^* = 1$, $p_j^* = 0$ ($j > 0$) であり、 $\alpha \geq \alpha_{1,\delta}$ ならば、 $p_9^* = 1$, $p_j^* = 0$ ($j < 9$) である。よって、 3×3 天邪鬼モデルについては、

$$\langle f_B^* \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha < \alpha_{0,\delta}; \\ \sum_{k=1}^8 p_k^* f_{B,k}^* & \text{if } \alpha_{0,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1,\delta}; \\ 1 & \text{if } \alpha \geq \alpha_{1,\delta} \end{cases}$$

である。

$\alpha_{0,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1,\delta}$ の場合について、状態遷移の系統樹をしらみ潰しに調べることで、付録 D に示した通り、現れ得る平衡状態を求めることはできたが、系統樹における状態遷移にはループも含まれ、本研究では、それぞれの平衡状態が現れる確率を解析的に導くことまではできなかった。図 15 は、対応して、数値計算による平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の平均値 \bar{f}_B^∞ を示すものである。

3×3 多数決モデルおよび協調モデル、雰囲気翻弄モデルにおいては、定理 4.16 により、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$ or 1) に向かう遷移が起こる。すなわち、 $p_j^* = 0$ ($0 < j < 9$) である。よって、併存平衡状態になり得ない ($0 \leq \delta \leq 1$) 場合については、

$$\langle f_B^* \rangle = p_9^* \tag{12}$$

である。

教室内の生徒全員が規範遵守行動をとっている初期状態において、 3×3 多数決モデルでは、定理 4.17 により、規範逸脱行動をとる生徒は現れないので、 $p_0^* = 1$, $p_9^* = 0$ となる。 3×3 協調モデルでは、定理 4.18 により、 $\alpha < \alpha_{0,\delta}$ ならば、規範逸脱行動をとる生徒は現れないので、 $p_0^* = 1$, $p_9^* = 0$ となる。一方、 $\alpha \geq \alpha_{0,\delta}$

表 1: 3×3 多数決モデルにおける教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からの平衡状態の生起確率

α	p_0^*	p_9^*
$(0, \alpha_{1/3,0})$	1	0
$[\alpha_{1/3,0}, \alpha_{2/8,0})$	$\frac{497}{675} \doteq 0.7362 \dots$	$\frac{178}{675}$
$[\alpha_{2/8,0}, \alpha_{1/5,0})$	$\frac{19}{27} \doteq 0.7037 \dots$	$\frac{8}{27}$
$[\alpha_{1/5,0}, \alpha_{1/8,0})$	$\frac{307}{1215} \doteq 0.2526 \dots$	$\frac{908}{1215}$
$[\alpha_{1/8,0}, +\infty)$	$\frac{16}{81} \doteq 0.1975 \dots$	$\frac{65}{81}$

表 2: 3×3 協調モデルにおける教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からの平衡状態の生起確率

α	p_0^*	p_9^*
$(0, \alpha_{1/3,\delta})$	1	0
$[\alpha_{1/3,\delta}, \alpha_{2/8,\delta})$	$\frac{497}{675} \doteq 0.7362 \dots$	$\frac{178}{675}$
$[\alpha_{2/8,\delta}, \alpha_{1/5,\delta})$	$\frac{19}{27} \doteq 0.7037 \dots$	$\frac{8}{27}$
$[\alpha_{1/5,\delta}, \alpha_{1/8,\delta})$	$\frac{307}{1215} \doteq 0.2526 \dots$	$\frac{908}{1215}$
$[\alpha_{1/8,\delta}, +\infty)$	$\frac{16}{81} \doteq 0.1975 \dots$	$\frac{65}{81}$
$[\alpha_{0,\delta}, +\infty)$	0	1

ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態状態に陥る遷移が起こるので、 $p_0^* = 0$ 、 $p_9^* = 1$ となる。

教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態において、 3×3 多数決モデルおよび協調モデルについては、補題 4.14 により、 $\alpha < \alpha_{1/3,\delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に落ち着く遷移が起こるので、 $p_0^* = 1$ 、 $p_9^* = 0$ となる。また、補題 4.15 により、 $\alpha \geq \alpha_{1/3,0}$ または $\alpha_{1/3,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態に至る遷移が起こるので、表 1, 2 で示したように、 α の範囲で p_0^* 、 p_9^* が定まる (付録 C, 図 16 参照)。 3×3 協調モデルについては、定理 4.11 により、 $\alpha \geq \max_{\omega} \alpha_{\omega,\delta} = \alpha_{0,\delta}$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる状態に陥る遷移が起こるので、 $p_0^* = 0$ 、 $p_9^* = 1$ となる。 3×3 雰囲気翻弄モデルについては、定理 4.12 により、初期状態によらずに、 $\alpha < 1$ ならば、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に落ち着く遷移が起こり、 $\alpha \geq 1$ ならば、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態に陥る遷移が起こる。すなわち、 $\alpha < 1$ の場合には、 $p_0^* = 1$ 、 $p_9^* = 0$ となり、 $\alpha \geq 1$ の場合には、 $p_0^* = 0$ 、 $p_9^* = 1$ となる。

求めた期待値から、 α が大きいほど教室内の生徒は規範逸脱行動をとり易く、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる状態に陥る確率が高いと言える。逆に、 α が小さいほど教室内の生徒は規範遵守行動をとり易く、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる状態に落ち着く確率が高いと言える。

併存平衡状態

定理 4.13 により、 3×3 天邪鬼モデルにおいては、初期状態によらずに、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega,\delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ ならば、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態に至る遷移が起こる。数値計算

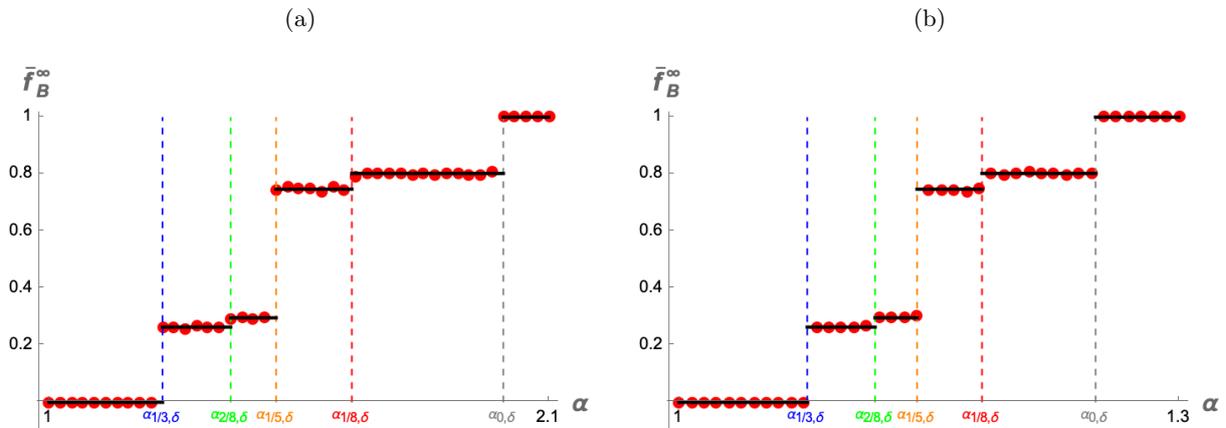


図 16: 3×3 協調モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の平均値 \bar{f}_B^∞ の α 依存性に関する数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 500 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起り得る初期状態でそれぞれ 1000 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。黒の横線は f_B^* の期待値 $\langle f_B^* \rangle$ 。 (a) $\delta = 0.5$; (b) $\delta = 0.8$ 。

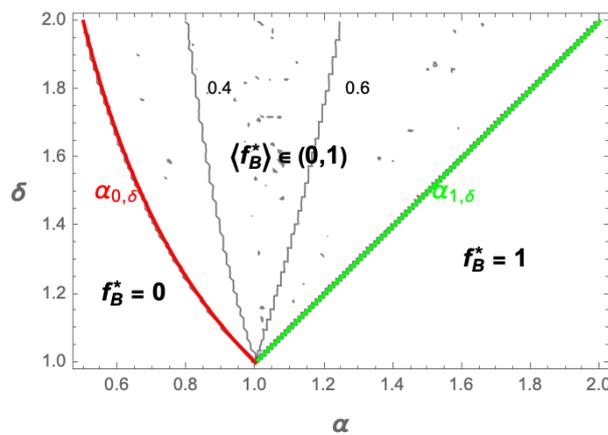


図 17: 3×3 天邪鬼モデルにおける併存状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^* に対する f_B^∞ の平均値 \bar{f}_B^∞ の $\bar{f}_B^\infty = 0.4, 0.6$ 等高線プロット。各 α および δ の値に対して行動選択 500 回の試行を起り得る初期状態でそれぞれ 1 回のプロットによる。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数は 1 人とした。

により図 17 のような等高線図が得られた。

得られた等高線図からわかるように、併存状態においても、 α が大きいと教室内の生徒は規範逸脱行動をとり易くなり、平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合が高い。逆に、 α が小さいと教室内の生徒は規範遵守行動をとり易くなり、平衡状態で規範遵守行動をとっている生徒の割合が高い。

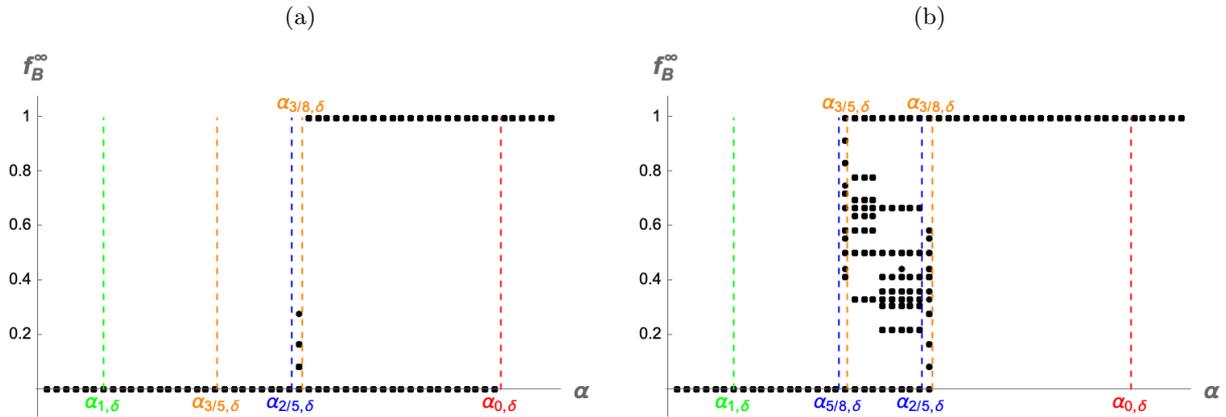


図 18: 6×6 協調モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 0.6$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して行動選択 300 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行 1000 回の結果をすべてプロットした。(a) 初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 2 人として与えられる場合；(b) 初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 3 人以上として与えられる場合。

4.8 6×6 モデル

6×6 モデルは、実際の教室に対応する大きさを持つ。ここでは、4.7 節の初期状態に依存した平衡状態における相図が 6×6 モデルでも適用できるか考える。

教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態

3×3 モデルにおいては、補題 4.15 により、 $\alpha \geq \alpha_{1/3,0}$ または $\alpha_{1/3,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ ならば、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$ or $f_B^* = 1$) に向かう遷移が起こることが示されているが、 $n \times n$ モデルでは示されていない。

6×6 モデルにおいては、図 6, 10 として示される数値計算結果により、 $\alpha \geq \alpha_{1/3,0}$ または $\alpha_{1/3,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ のとき、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$ or $f_B^* = 1$) に向かう遷移が起こる可能性が示唆される結果を得た。よって、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態では、 6×6 モデルにおいても、図 11a のような相図が適用できる可能性が示唆された。

教室内の生徒 2 人以上が規範逸脱行動をとっている初期状態

図 18a として示される数値計算結果により、教室内の生徒 2 人が規範逸脱行動をとっている初期状態において、 $0 < \delta < 1$ の場合について、 $\alpha_{3/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{2/5,\delta}$ のとき、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$) に落ち着く遷移が起こる結果が得られた。 $\alpha_{2/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{3/8,\delta}$ のとき、教室内の生徒全員が同じ行動をとる同調平衡状態に至る遷移が起こるか、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態 ($f_B^* = 0$ or $f_B^* = 1$ or $f_B^* \in (0,1)$) に至る遷移が起こる結果が得られた。

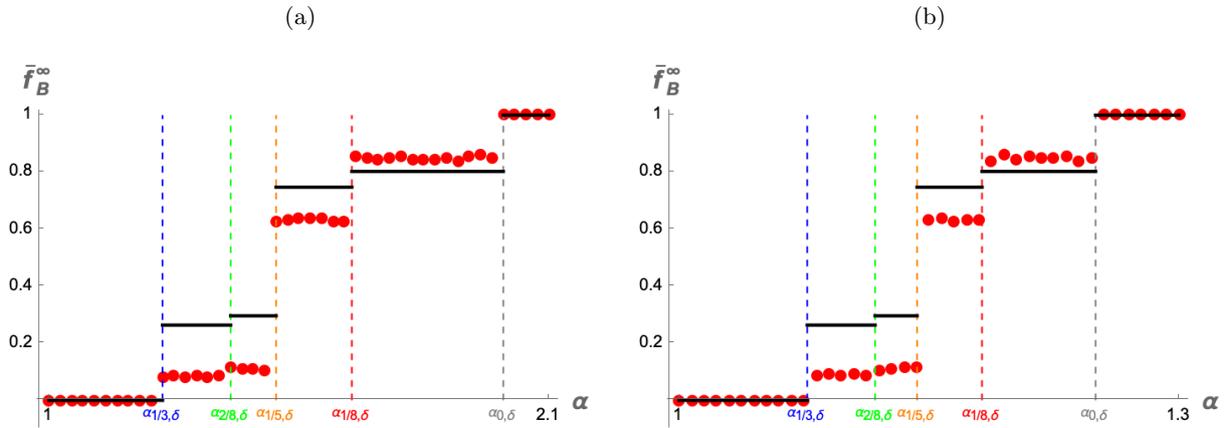


図 19: 6×6 協調モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の平均値 \bar{f}_B^∞ の α 依存性に関する数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起り得る初期状態でそれぞれ 100 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。黒の横線は 3×3 協調モデルにおける f_B^* の期待値 $\langle f_B^* \rangle$ 。(a) $\delta = 0.5$; (b) $\delta = 0.8$ 。

$\alpha_{3/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{3/8,\delta}$ 以外の範囲の場合には、 3×3 モデルと同様の結果となった。

同様に、図 18b による数値計算結果より、教室内の生徒 3 人以上が規範逸脱行動をとっている初期状態において、 $0 < \delta < 1$ の場合について、 $\alpha_{5/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{3/8,\delta}$ のとき、教室内の生徒全員が同じ行動をとる同調平衡状態に至る遷移が起こるか、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態 ($f_B^* = 0$ or $f_B^* = 1$ or $f_B^* \in (0, 1)$) に至る遷移が起こる結果が得られた。 $\alpha_{3/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ のとき、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態 ($f_B^* = 0$ or $f_B^* = 1$) に至る結果が得られた。 $\alpha_{1,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ 以外の範囲では、 3×3 モデルと同様の結果となった。

平衡状態における規範逸脱行動の頻度

教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から行き着く平衡状態については、 6×6 モデルにおいても、図 11a のような相図が適用できる可能性が示唆された。図 19 では、図 16 と同様の数値計算による平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の平均値 \bar{f}_B^∞ を求めた。数値計算結果より、 3×3 協調モデルにおける f_B^* の期待値 $\langle f_B^* \rangle$ と同じ α の範囲によって変化し得るものであることがわかった。ただし、教室の大きさの違いから値自体は異なった。

併存平衡状態

6×6 天邪鬼モデルにおいても、定理 4.7 により、初期状態によらずに、 $\min_{\omega} \alpha_{\omega,\delta} \leq \alpha < \max_{\omega} \alpha_{\omega,\delta}$ ならば、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態に至る遷移が起こる。数値計算により図 20 のような等高線図が得られた。図 17 と比較すると、同一視できる結果になっており、併存平衡状態における等高線図は、教室の大きさによらない可能性が示唆された。

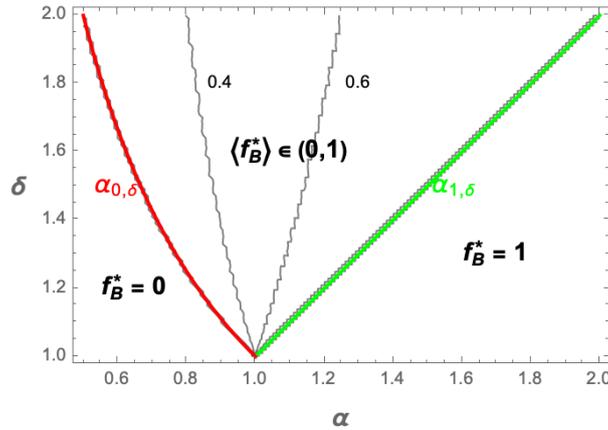


図 20: 6×6 天邪鬼モデルにおける併存状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^* に対する f_B^∞ の平均値 \bar{f}_B^∞ の $\bar{f}_B^\infty = 0.4, 0.6$ 等高線プロット。各 α および δ の値に対して行動選択 1000 回の試行を起し得る初期状態でそれぞれ 1 回のプロットによる。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数は 1 人とした。

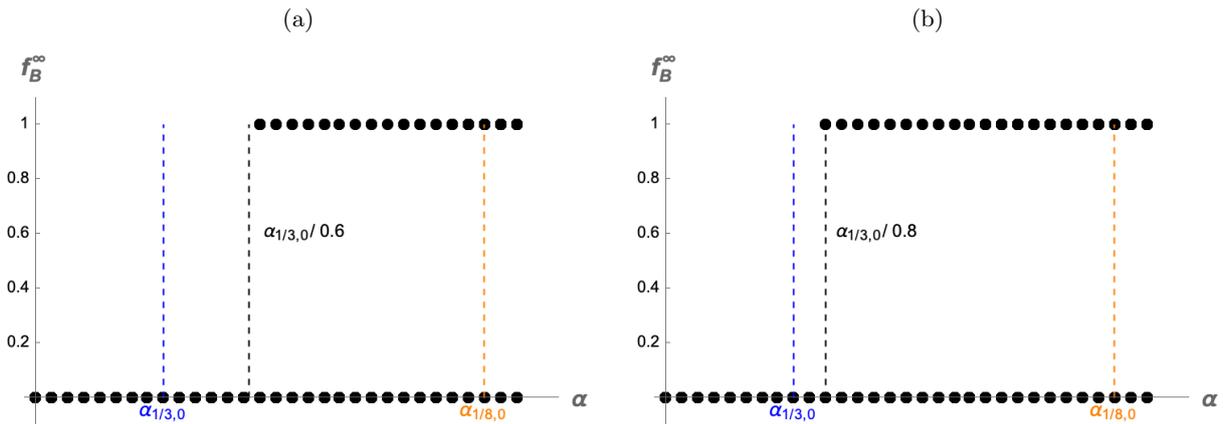


図 21: 6×6 多数決モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起し得る初期状態でそれぞれ 10 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。(a) $\varepsilon = 0.6$; (b) $\varepsilon = 0.8$ 。

5 行動の変更に抵抗のあるモデル

$\varepsilon < 1$ の数理モデルについては、平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する数値計算結果において、 α に対する基準値が 4 章のモデルにおけるそれと明らかに異なる。4 章のモデルよりも規範逸脱行動は広がりにくい。また、より小さな ε で規範逸脱行動はより広がりにくくなり、規範逸脱行動が広がる場合には、 α がより大きい必要がある (図 21, 22, 23, 24 参照)。さらに、4 章のモデルでは現れなかった教室内の生徒全員が初期状態から自らのとっている行動を変更しない場合も、新たに現れた (図 25

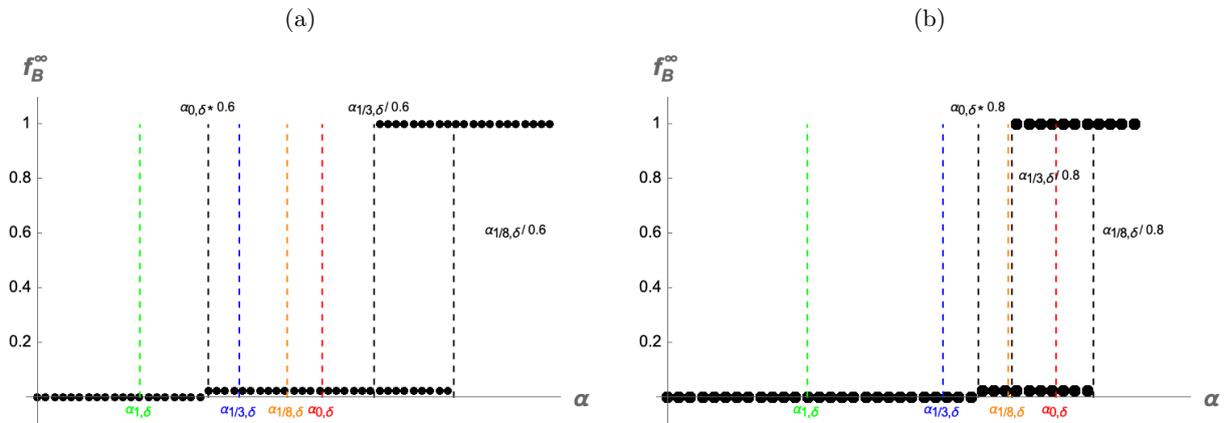


図 22: 6×6 協調モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 0.6$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起り得る初期状態でそれぞれ 10 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。(a) $\varepsilon = 0.6$; (b) $\varepsilon = 0.8$ 。

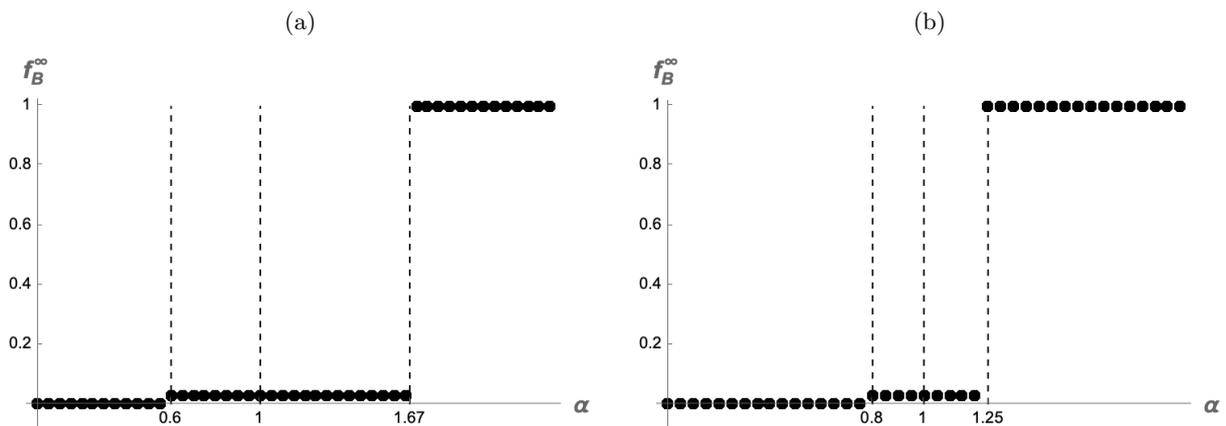


図 23: 6×6 雰囲気翻弄モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起り得る初期状態でそれぞれ 10 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。(a) $\varepsilon = 0.6$; (b) $\varepsilon = 0.8$ 。

参照)。

6 考察

行動の変更に抵抗がないモデルの解析結果により、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態において、 3×3 モデルについての解析結果が、 6×6 モデルでも適用できる可能性が示唆された。選択行動に対して周りの生徒と違う行動を選択する傾向が強い (大きい δ) 場合には、教室内の規範逸脱行動は消

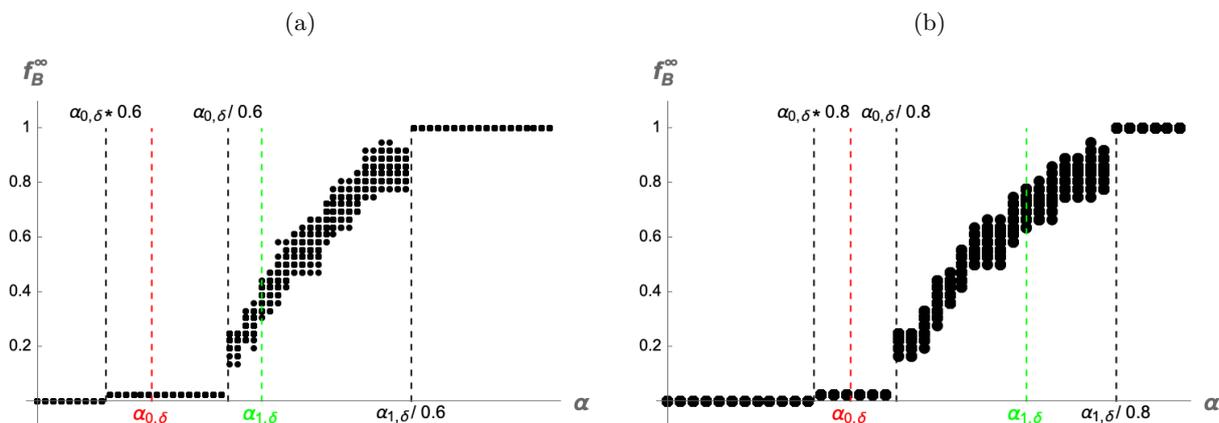


図 24: 6×6 天邪鬼モデルにおける平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^∞ の α 依存性に関する $\delta = 1.4$ を用いた数値計算結果。各 α の値に対して、行動選択 1000 回の結果で得られる f_B の値を調べる試行を起り得る初期状態でそれぞれ 10 回の結果をすべてプロットした。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数が 1 人として与えられる場合。(a) $\varepsilon = 0.6$; (b) $\varepsilon = 0.8$ 。

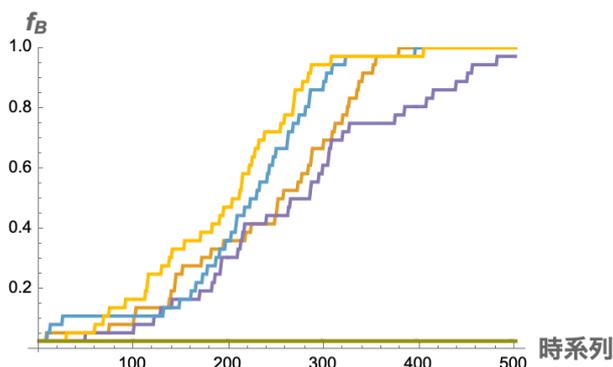


図 25: 6×6 協調モデル ($\varepsilon = 0.8$) についての規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B の時系列の数値計算。教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている異なる 10 個の初期状態に対する数値計算。 $\delta = 0.6$, $\alpha = 1.6$ 。

失しにくく、周りの生徒と同じ行動を選択する傾向が強い (小さい δ) 場合には、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる状態、もしくは規範遵守行動をとる状態のいずれかに至る。これは、行動選択が生徒の今とっている行動には依存せず、周りの生徒のとっている行動の影響のみにより定まると仮定したからであり、周りの生徒と違う行動を選択する傾向が強い生徒で構成される教室では、周りの生徒の多くが規範遵守行動をとっている場合でも規範逸脱行動をとる傾向があるため、教室内の規範逸脱行動は消失しにくいのである。

また、規範逸脱行動が規範遵守行動に対して相対的に選択され易い (大きい α) 場合には、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる状態に陥り、規範遵守行動が規範逸脱行動に対して相対的に選択され易い (小さい α) 場合には、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる状態に落ち着くことがわかった。これは、 α を規範逸脱行動が相対的に選択され易い程度を表すパラメータとして導入したからであり、当たり前の結果ではあるが平衡状態における α への依存性から、 α は多くの意味を持つ。

出口 [7] では、教室内の雰囲気は個人の行動選択に影響を与える可能性が示唆され、本論文でも同様の可能性が示唆された。 α がまさに授業中の雰囲気への依存性を表し、文化祭や体育祭のような学校行事や受験の直前期では α は大きく、規範逸脱行動が起こり易くなる。受験の直前期であっても、授業内容が受験勉強とは乖離したものであれば、内職をしだす生徒が現れ始めるので α は大きい。一方で、授業内容が受験勉強と直結するものであれば、生徒が授業に集中するので α は小さい。小・中学校では、同じ授業内容でも休み時間や給食のような楽しい時間の直前であれば、集中力が切れる児童や生徒が多くなるので α は大きい。すなわち、 α は授業の質や生徒の関心度も表している。

生徒の質にも依存し、高校では、比較的勉強熱心な生徒が多い進学クラスでは α は相対的に大きく、それ以外のクラスでは α は相対的に小さい。また、教室の環境条件にも依存し、暖房の効いた教室では、室温温度と CO_2 濃度の上昇により居眠りをする生徒が増えるように、 α は大きい。これは、藤原・長尾 [5] の結果の再現ができると捉えることができる。

周りの生徒と同じ行動を選択する傾向が強い場合には、 α が大きくても教室内で規範逸脱行動が広がらない可能性はあるが、天邪鬼モデルについての解析結果からわかるように α が大きく、周りの生徒と違う行動を選択する傾向が強い生徒の多いクラスでは、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる状態に陥りかねないことが示された。これが、想定されるクラスの中で最も規範逸脱行動が広がり得るケースである。

さらに、初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数により平衡状態の分類ができたことから、 α だけでなく初期状態も教室内の雰囲気を反映し得る。文化祭や体育祭のような学校行事や受験の直前期では初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数は多く、授業参観では少ない。

実際の教室では、一番前の座席に座る生徒は周りの生徒から影響を受けにくく、規範逸脱行動もとりにくい。逆に、一番後ろの座席に座る生徒は周りの生徒から影響を受けやすく、規範逸脱行動もとり易い。よって、座席による最近接生徒の分類を増やすことで、新しい平衡状態が現れることが予想される。

行動選択が自分の行動に依存するモデルにおいては、単純化のために規範遵守行動をとっている生徒と規範逸脱行動をとっている生徒とで ε を区別しなかったが、区別することにより、新しい平衡状態が現れることが予想される。

謝辞

本研究を遂行し学位論文を執筆するにあたり、瀬野裕美教授には温かく丁寧なご指導を賜りましたこと、ここに感謝の意を表します。理解力の乏しい私に対しても、熱心に2年間ご指導いただき、研究内容だけでなく、学問への向き合い方や学術的な論文の執筆の仕方まで幅広くご教授いただきました。

瀬野研究室では、先輩である Victor P. Schneider さん、謝穎さん、傅智琮さんに日々励ましの言葉と、輪読セミナーに向けてアドバイスをいただきました。同期の Akshat Goyal さん、肖陽さんとは切磋琢磨しながら研究に励むことができました。国際色豊かな研究室で2年間過ごせたことはかけがえのない経験です。

研究に行き詰まったときには、東北大学大学院情報科学研究科数学教室の皆さんをはじめ多くの方々に相談に乗っていただきました。2年間たくさんの方々に支えていただき、本修士論文を書き上げられたことに感謝いたします。

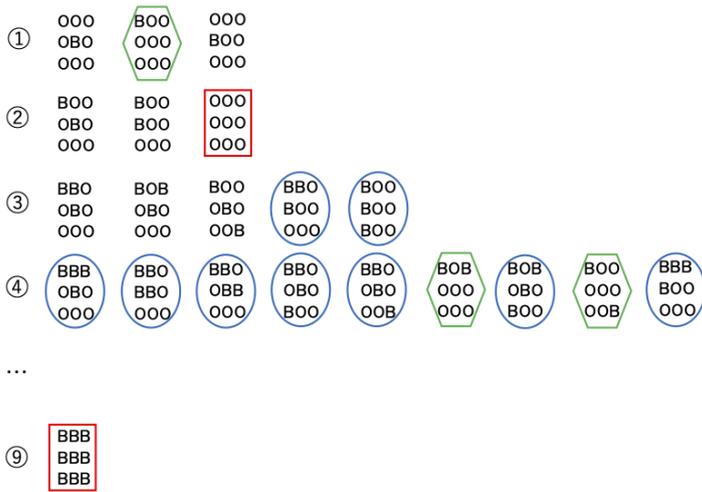
参考文献

- [1] 田村達, 2016. 反社会的行動・規範逸脱行動の抑制に関する探索的検討 —「悪いこと」を思いとどまった経験について—. 岩手県立大学社会福祉学部紀要 **18**(3), 47–56.
- [2] 北折充隆, 2006. 授業中の私語に関する研究 —悪質性評価の観点から—. 金城学院大学論集. 人文科学編 **3**(1), 1–8.
- [3] Cialdini, R. B., Kallgren, C. A., and Reno, R. R., 1991. A Focus Theory of Normative Conduct: A Theoretical Refinement and Reevaluation of the Role of Norms in Human Behavior. *Advances in Experimental Social Psychology* **47**, 201–234.
- [4] 卜部敬康, 佐々木薫, 1999. 授業中の私語に関する集団規範の調査研究. 教育心理学研究 **47**(3), 282–292.
- [5] 藤原巧未, 長尾和彦, 2019. 授業中に居眠りをする学生の割合と CO2 濃度の比較. 第 81 回全国大会講演論文集 **1**, 501–502.
- [6] 出口拓彦, 2012. 教員および仲間集団が教室における規範逸脱行動に及ぼす影響: 派閥サイズモデルによるシミュレーション. 教育実践開発研究センター研究紀要 **21**, 65–73.
- [7] 出口拓彦, 2016. 教育場面における規範逸脱行動に対する態度: 推測された他者の態度に着目して. 次世代教員養成センター研究紀要 **2**, 1–8.
- [8] Deguchi, T., 2019. Analyzing the spread of rule-breaking behavior, focusing on talking in class, based on decision matrices in a critical mass model with local interaction. *The Japanese Journal of Experimental Social Psychology* **58**, 105–110.
- [9] 出口拓彦, 2021. ローカルな相互作用による限界質量モデルを用いた教室における規範逸脱行動拡散過程の分析 —実際の座席位置を反映した授業における私語のシミュレーション—. 奈良教育大学紀要 (人文・社会科学) **70**, 13–23.
- [10] 板木好弘, 2015. 私語伝播の数理モデリングによる微分方程式の導出とその大域解析. 島根大学大学院総合理工学研究科平成 27 年度修士論文.

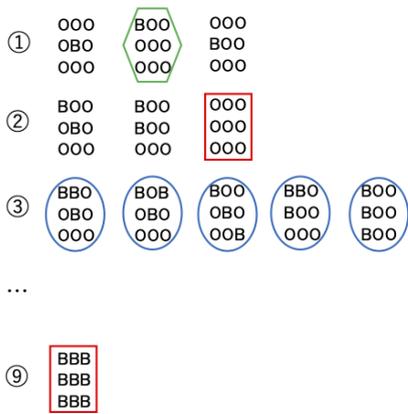
付録 A 補題 4.15 の証明

3×3 多数決モデルおよび協調モデルにおいて, 教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からの行動選択による, 生徒の行動の遷移図が α の範囲によって行き着く平衡状態を分類できる。なお, 以下の説明では, 生徒の行動が継続する場合を除いている。

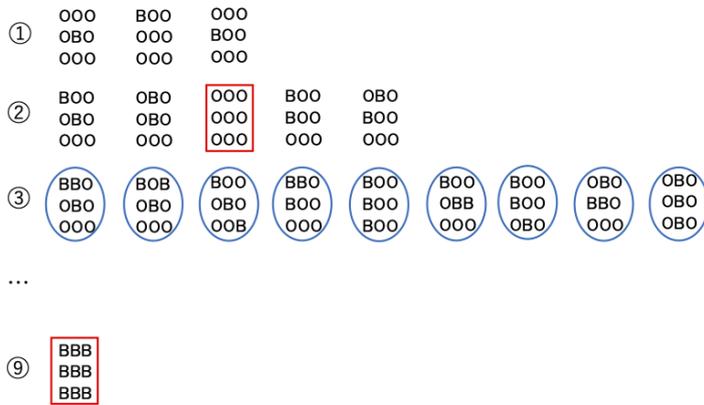
まず, $\alpha_{1/3, \delta} \leq \alpha < \alpha_{2/8, \delta}$ の場合には,



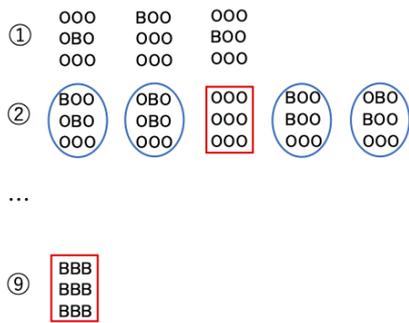
と表される。教室内の生徒がとる行動が緑の六角形で囲まれた状態に行き着くと、平衡状態で教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に落ち着き、青の楕円で囲まれた状態に行き着くと、平衡状態で教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態に陥る。赤の長方形で囲まれた状態が平衡状態である。同様に、 $\alpha_{2/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1/5,\delta}$ の場合には、



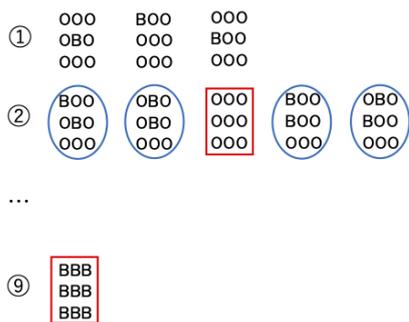
と表され、 $\alpha_{1/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1/8,\delta}$ の場合には、



と表される。多数決モデルについて、 $\alpha \geq \alpha_{1/8,0}$ の場合には、



と表され、協調モデルについて、 $\alpha_{1/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ の場合には、



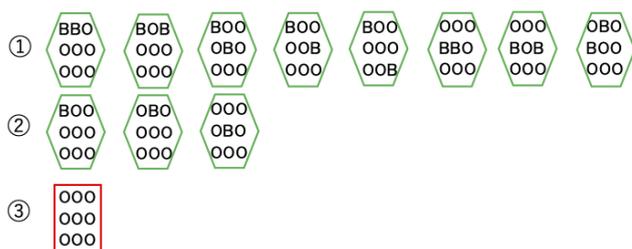
と表される。

以上の遷移図から、 $\alpha \geq \alpha_{1/3,0}$ または $\alpha_{1/3,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ のとき、教室内の生徒1人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる状態に至る。よって、補題 4.15 は示された。

付録 B 定理 4.19 の証明

3 × 3 多数決モデルおよび協調モデルにおいて、教室内の生徒 2 人が規範逸脱行動をとっている初期状態からの行動選択による、生徒の行動の遷移図が α の範囲によって行き着く平衡状態を分類できる。なお、以下の説明では、生徒の行動が継続する場合を除いている。

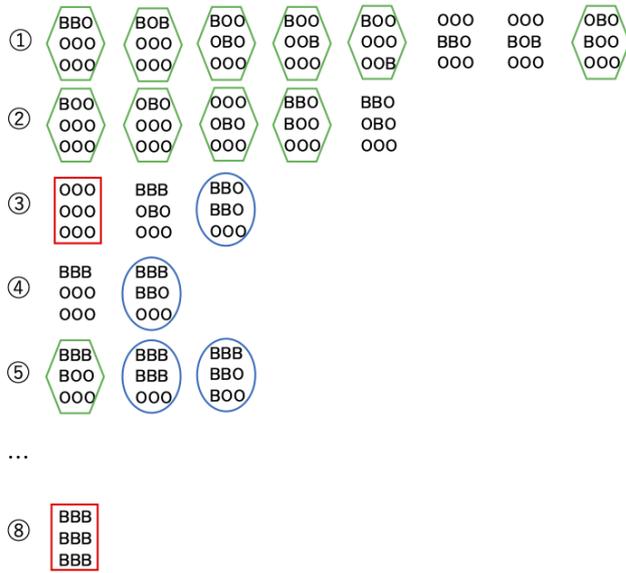
まず、 $\alpha < \alpha_{2/3,\delta}$ の場合には、



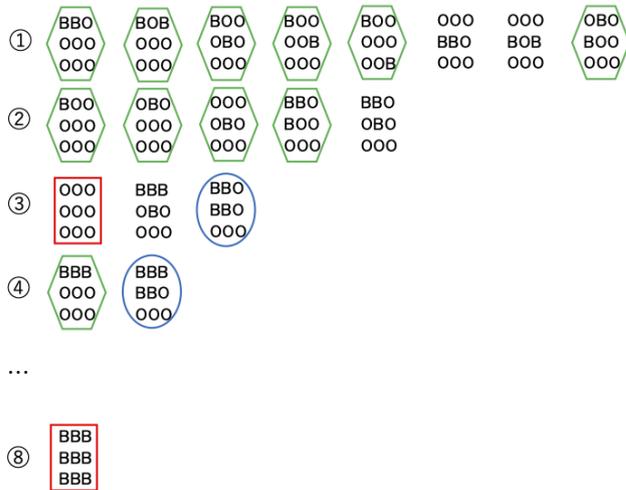
と表される。教室内の生徒がとる行動が緑の六角形で囲まれた状態になると、平衡状態で教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に落ち着く。赤の長方形で囲まれた状態が平衡状態である。同様に、 $\alpha_{2/3,\delta} \leq \alpha < \alpha_{3/5,\delta}$ の場合には、



と表され、 $\alpha_{3/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{4/8,\delta}$ の場合には、



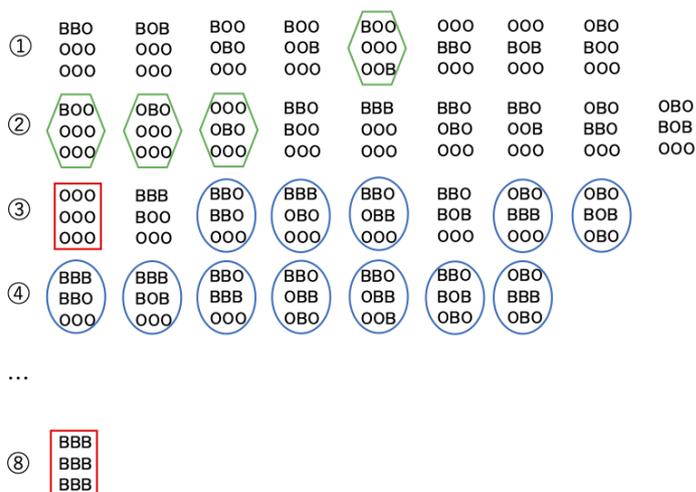
と表される。青の楕円で囲まれた状態になると、平衡状態で教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態に陥る。 $\alpha_{4/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{2/5,\delta}$ の場合には、



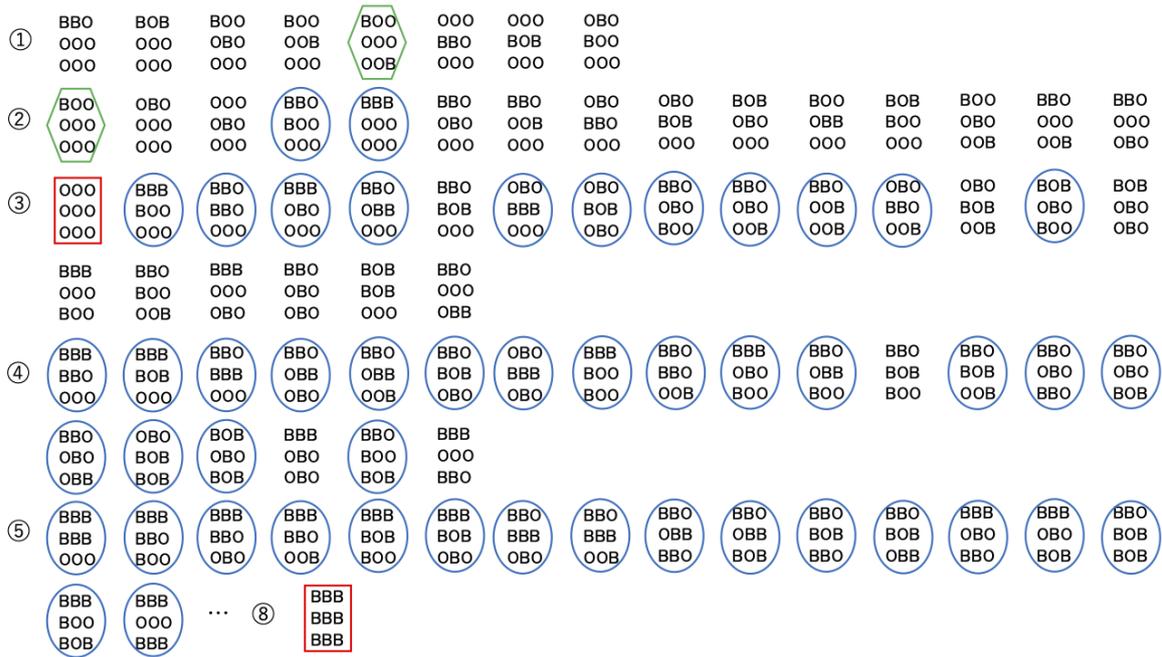
と表され、 $\alpha_{2/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{3/8,\delta}$ の場合には、



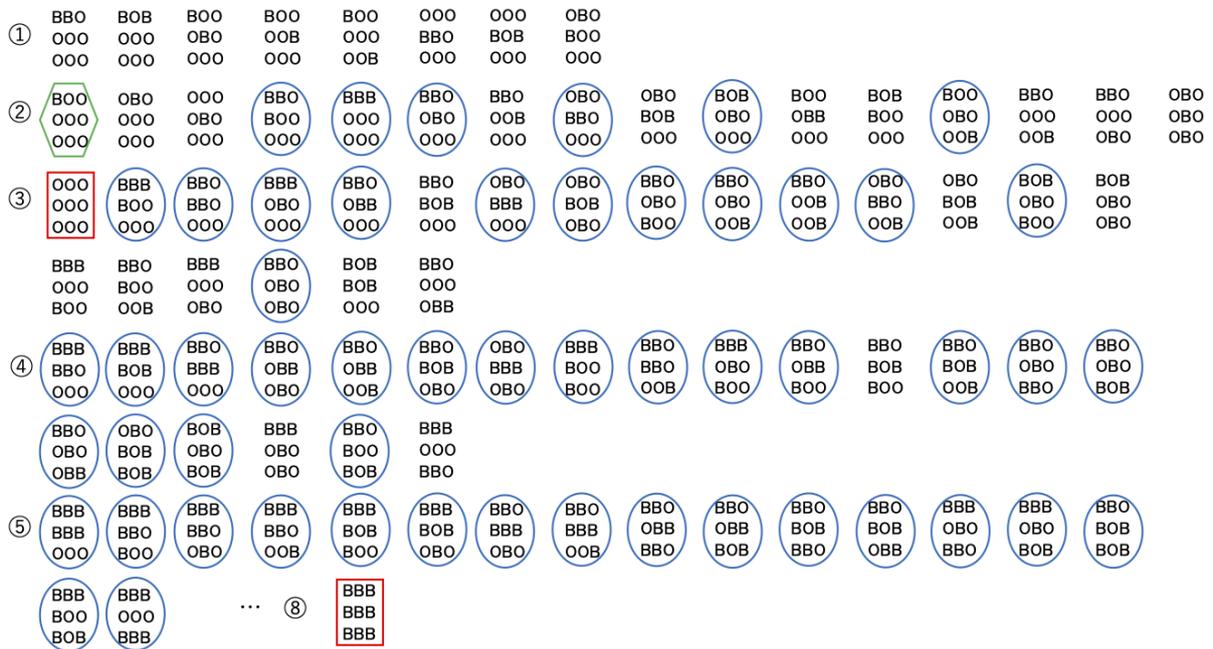
と表される。黄の五角形で囲まれた状態になると、平衡状態で教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に落ち着くか、もしくは教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態に至る。紫の三角形で囲まれた状態になると、平衡状態で教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる同調平衡状態に陥るか、もしくは教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態に至る。 $\alpha_{3/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1/3,\delta}$ の場合には、



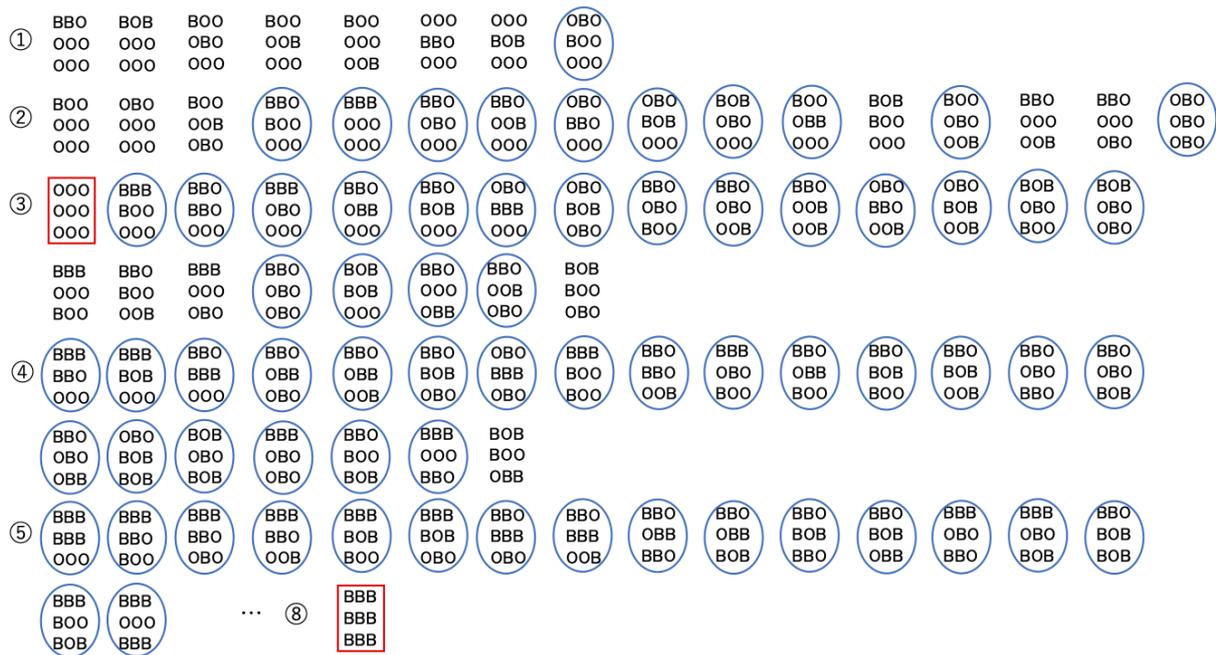
と表され、 $\alpha_{1/3,\delta} \leq \alpha < \alpha_{2/8,\delta}$ の場合には、



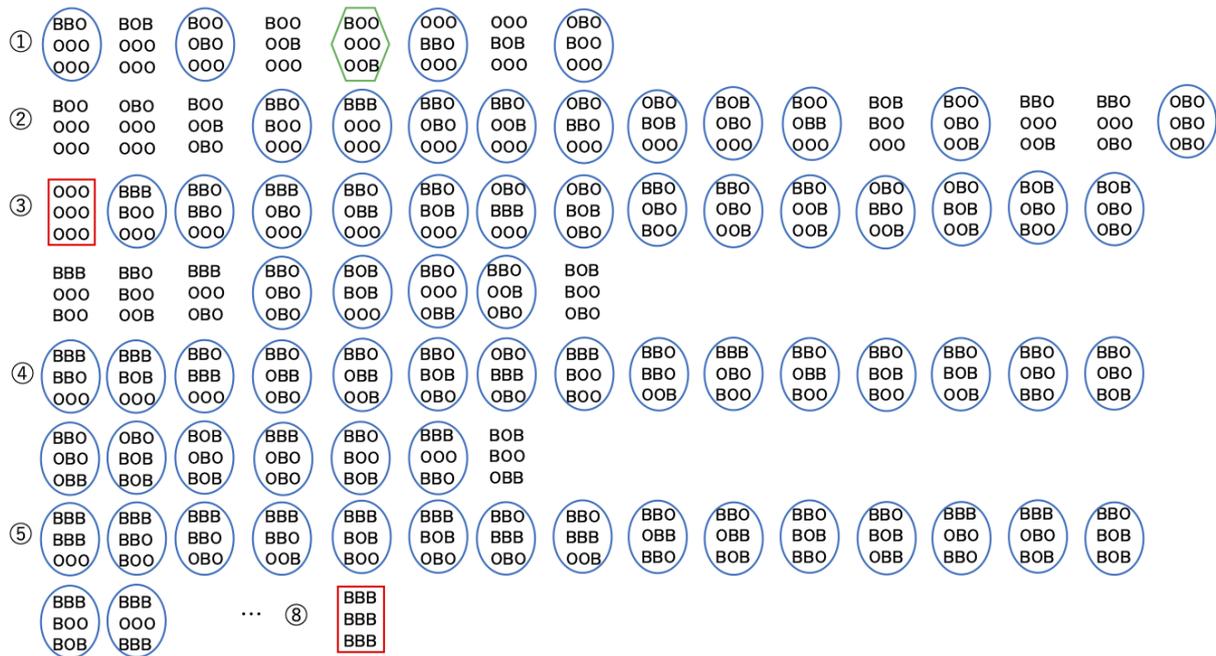
と表される。 $\alpha_{2/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1/5,\delta}$ の場合には,



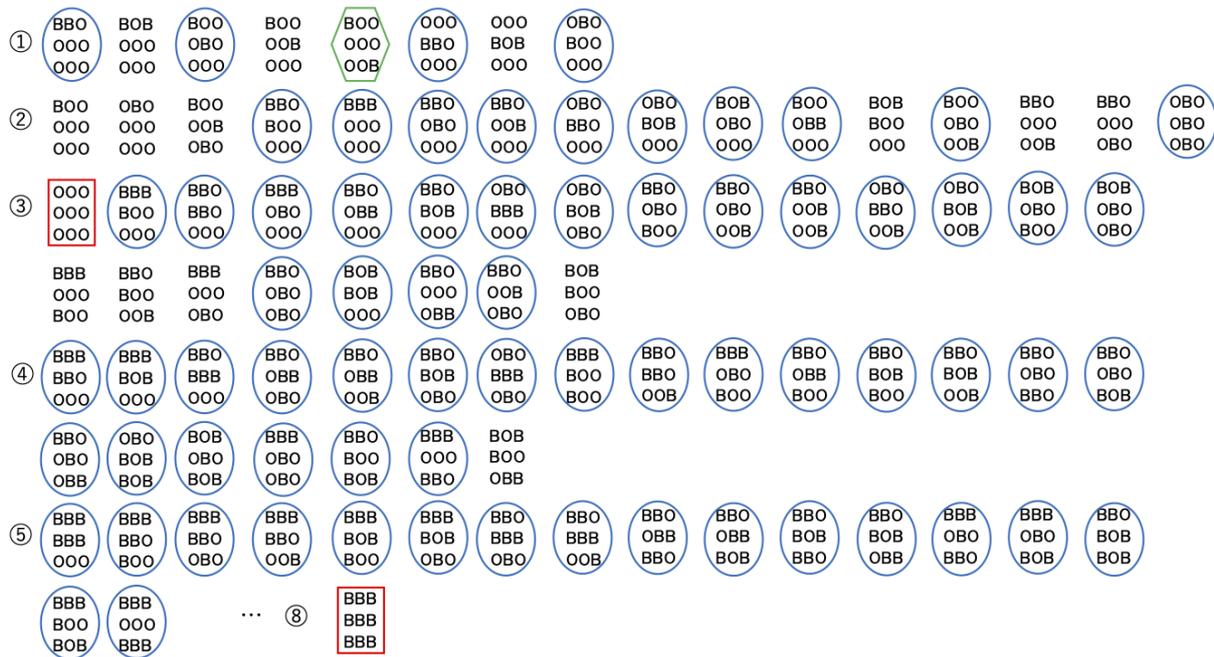
と表され、 $\alpha_{1/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1/8,\delta}$ の場合には,



と表される。多数決モデルについて、 $\alpha \geq \alpha_{1/8,0}$ の場合には、



と表され、協調モデルについて、 $\alpha_{1/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ の場合には、



と表される。

以上の遷移図から、 $0 \leq \delta < 1$ かつ $\alpha < \alpha_{3/5,\delta}$ のとき、教室内の生徒 2 人が規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる同調平衡状態に落ち着く。 $0 \leq \delta < 1$ かつ $\alpha_{3/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{2/5,\delta}$ または $\alpha \geq \alpha_{3/8,0}$ または $\alpha_{3/8,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ のとき、教室内の生徒 2 人が規範逸脱行動をとっている初期状態からは、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態に至る。 $0 \leq \delta < 1$ かつ $\alpha_{2/5,\delta} \leq \alpha < \alpha_{3/8,\delta}$ のとき、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる、もしくは規範逸脱行動をとる同調平衡状態に至る場合がある。あるいは、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態に至る場合もあり、 α によらないある一定の割合に行き着く。よって、定理 4.19 は示された。

付録 C 状態遷移確率と期待値の導出

3×3 多数決モデルおよび協調モデルにおいて、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態からは、 $\alpha \geq \alpha_{1/3,0}$ または $\alpha_{1/3,\delta} \leq \alpha < \alpha_{0,\delta}$ ならば、平衡状態で規範逸脱行動をとっている生徒の割合 f_B^* の期待値 $\langle f_B^* \rangle$ を図 26 の行動の遷移に関する系統樹から求めることができる。これらの系統樹は、付録 A の遷移図からそれぞれ生成される。例として、図 26a から、 $\alpha_{1/3,\delta} \leq \alpha < \alpha_{2/8,\delta}$ における $\langle f_B^* \rangle$ を求める。

「教室の角の座席」に座る生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる状態に落ち着く確率 p_0^{*3} を求めると、起こり得る初期状態は 4 通りだから

$$p_0^{*3} = 4 \times \frac{1}{9} \times 1 = \frac{4}{9}$$

「教室の角以外の端の座席」に座る生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる状態に落ち着く確率 p_0^{*5} を求めると、起こり得る初期状態は 4 通りだから

$$p_0^{*5} = 4 \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{20}{81}$$

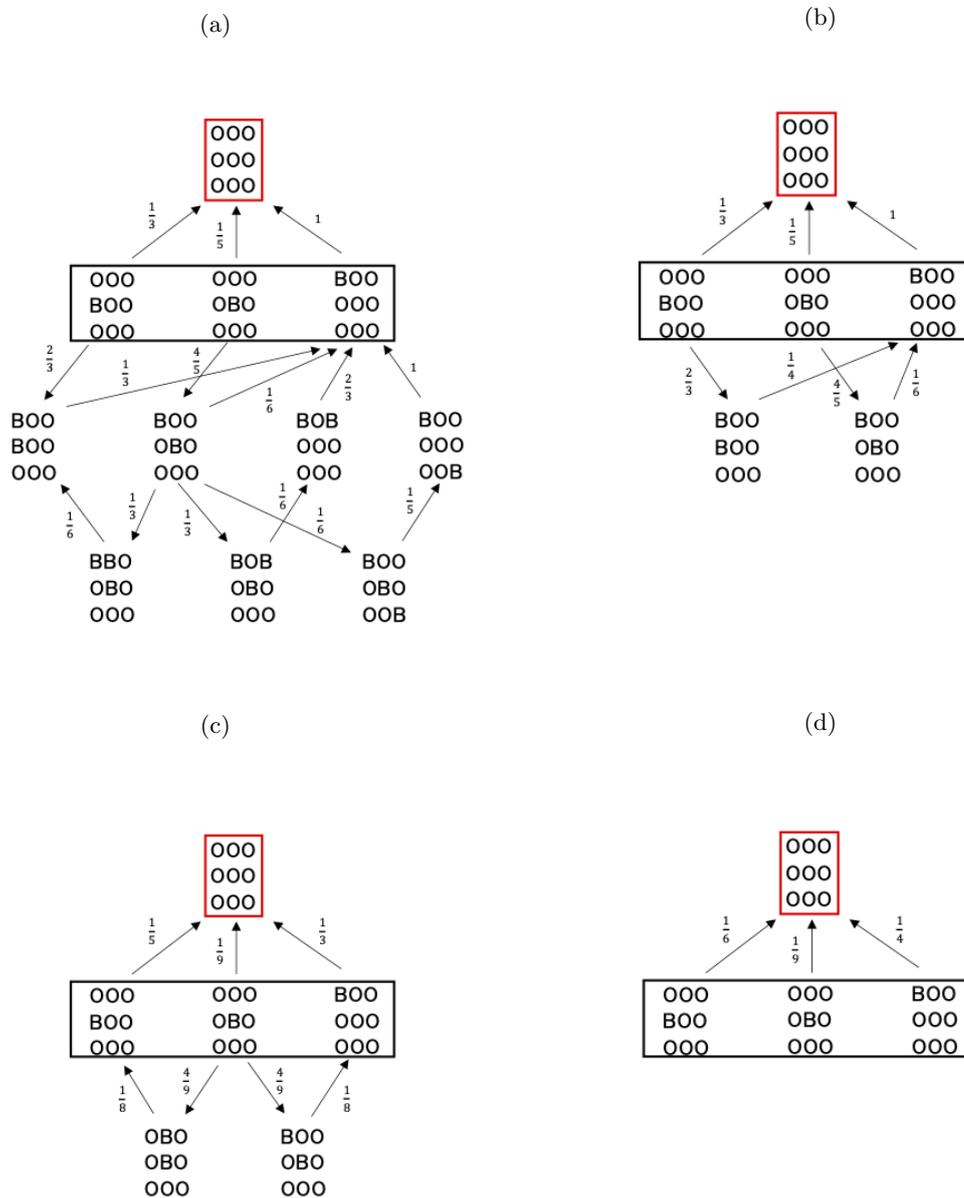


図 26: 3×3 多数決モデルおよび協調モデルにおける行動の遷移に関する系統樹。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数は 1 人とした。(a) $\alpha_{1/3, \delta} \leq \alpha < \alpha_{2/8, \delta}$; (b) $\alpha_{2/8, \delta} \leq \alpha < \alpha_{1/5, \delta}$; (c) $\alpha_{1/5, \delta} \leq \alpha < \alpha_{1/8, \delta}$; (d) $\alpha \geq \alpha_{1/8, 0}$ および $\alpha_{1/8, \delta} \leq \alpha < \alpha_{0, \delta}$ 。

「四方を座席に囲まれる座席」に座る生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる状態に落ち着く確率 p_0^{*8} を求めると、

$$p_0^{*8} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \times \frac{4}{5} \times \left\{ \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times 1 \right) + \frac{1}{6} \times \left(1 + \frac{1}{5} \times 1 \times 1 \right) \right\} = \frac{91}{2025}$$

よって、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、教室内の生徒全員が規範遵守行動をとる状態に落ち着く確率 p_0^* は、

$$p_0^* = p_0^{*3} + p_0^{*5} + p_0^{*8} = \frac{4}{9} + \frac{20}{81} + \frac{91}{2025} = \frac{497}{675}$$

すなわち、教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から、教室内の生徒全員が規範逸脱行動をとる状態に陥る確率 p_9^* は、

$$p_9^* = 1 - p_0^* = \frac{178}{675}$$

式 (12) により、 $\langle f_B^* \rangle$ は

$$\langle f_B^* \rangle = p_9^* = \frac{178}{675}$$

と求まる (表 2 参照)。他の系統樹でも同様の方法で $\langle f_B^* \rangle$ を計算することができる。

付録 D 3×3 天邪鬼モデルで現れる併存平衡状態

定理 4.13 により、 3×3 天邪鬼モデルにおいては、 $\alpha_{0,\delta} \leq \alpha < \alpha_{1,\delta}$ ならば、初期状態によらずに、教室内で規範遵守行動と規範逸脱行動をとる生徒が併存する併存平衡状態への遷移が起こる ($0 < f_B^* < 1$)。教室内の生徒 1 人のみが規範逸脱行動をとっている初期状態から現れ得る併存平衡状態は、状態分岐を調べ尽くすことにより得ることができ、 α の値に依存して、現れ得る併存状態が異なる。その解析結果を表 3 に示す。

表 3: 3×3 天邪鬼モデルで現れ得る併存平衡状態の α 依存性。初期状態における教室内で規範逸脱行動をとっている生徒の数は 1 人の場合。

α	併存平衡状態				
$(\alpha_{0,\delta}, \alpha_{1/8,\delta})$	OOO	OOO	BOB	BOB	
	OBO	BOB	OOO	OOO	
	OOO	OOO	OBO	BOB	
$[\alpha_{1/8,\delta}, \alpha_{1/5,\delta})$	OOO	OOO	BOB	BOB	
	OBO	BOB	OOO	OOO	
	OOO	OOO	OBO	BOB	
$[\alpha_{1/5,\delta}, \alpha_{2/8,\delta})$	OOO	BOB	BOO	BOB	
	BOB	OOO	OOB	OOO	
	OOO	OBO	OBO	BOB	
$[\alpha_{2/8,\delta}, \alpha_{1/3,\delta})$	OOO	BOB	BOO	BOB	
	BBB	OOO	OOB	OOO	
	OOO	OBO	OBO	BOB	
$[\alpha_{1/3,\delta}, \alpha_{3/8,\delta})$		OOO	BOB		
		BBB	OOO		
		OOO	BOB		
$[\alpha_{3/8,\delta}, \alpha_{2/5,\delta})$		OOO	BOB	BOB	
		BBB	OOO	OBO	
		OOO	BOB	OBO	
$[\alpha_{2/5,\delta}, \alpha_{4/8,\delta})$	OOO	BOB	OBO	BOB	BBO
	BBB	OBO	BOB	BOB	OOB
	OOO	OBO	OBO	OBO	BOB
					BBB
$[\alpha_{4/8,\delta}, \alpha_{3/5,\delta})$	OOO	BOB	BOB	BBO	BOB
	BBB	OBO	BOB	OOB	OBO
	OOO	OBO	OBO	BOB	BOB
					BBB
$[\alpha_{3/5,\delta}, \alpha_{5/8,\delta})$		BOB	OBO	BBB	
		BOB	BBB	OOO	
		OBO	OBO	BBB	
$[\alpha_{5/8,\delta}, \alpha_{2/3,\delta})$		OBO	BBB		
		BBB	OOO		
		OBO	BBB		
$[\alpha_{2/3,\delta}, \alpha_{6/8,\delta})$	OBO	BBB	BBO	BOB	BOB
	BBB	OOO	OBB	BBB	BBB
	OBO	BBB	BOB	OBO	
$[\alpha_{6/8,\delta}, \alpha_{4/5,\delta})$	OBO	BBO	BOB	BBB	
	BBB	OBB	BBB	OBO	
	OBO	BOB	OBO	BBB	
$[\alpha_{4/5,\delta}, \alpha_{7/8,\delta})$	OBO	BOB	BBB	BBB	
	BBB	BBB	OBO	BOB	
	OBO	OBO	BBB	BBB	
$[\alpha_{7/8,\delta}, \alpha_{1,\delta})$	OBO	BOB	BBB	BBB	
	BBB	BBB	OBO	BOB	
	OBO	OBO	BBB	BBB	