

修士論文

入学試験倍率の年次変動ダイナミクスに関する
数理モデルの研究

A mathematical model for the annual dynamics of the admission rate

2019

内桶怜奈

Reina UCHIOKE

B8IM1006

東北大学大学院情報科学研究科 情報基礎科学専攻

Department of Computer and Mathematical Sciences

Graduate School of Information Sciences

Tohoku University

Aramaki-Aza-Aoba 6-3-09, Aoba-ku, Sendai, Miyagi 980-8579

JAPAN

目次

1	序	2
2	閾値モデルによる二者択一意思決定者頻度変動ダイナミクス	3
2.1	Granovetter (1978) の閾値モデル	3
2.2	閾値分布下の頻度変動ダイナミクスの数理モデリング	5
3	入学試験倍率の年次変動ダイナミクス	10
3.1	導入	10
3.2	入学試験および受験に関わる因子	11
3.3	入学試験および受験に関する仮定	12
3.4	年次変動ダイナミクスの数理モデリング	13
3.5	年次変動ダイナミクスモデルⅠ：学力順位によってのみ合格者が決定される場合	16
3.6	年次変動ダイナミクスモデルⅡ：学力に応じた不合格率が存在する場合	23
3.7	年次変動ダイナミクスモデルⅠの解析	26
3.8	考察	31
付録 A	年次変動ダイナミクスモデルⅡの合格率の数理モデリング	35
付録 B	年次変動ダイナミクスモデルⅡにおける $\langle z \rangle_t$ の有界性	35
付録 C	定理 3.4 の証明	36
付録 D	$\langle z \rangle^*$ の極大値の存在性の証明	37

1 序

近年、情報機器の発展やインターネットが手軽に利用できるようになり、世界規模の高度情報化社会が確立しつつある。総務省のデータによると、2010年にはおよそ10%だったスマートフォンの世帯保有率は、2017年には、およそ75%にまで上昇し、パソコンの世帯保有率を上回っている。現代の人々にとっては、スマートフォンがない生活は想像できないほどの必需品となっている（総務省、2019）。

個人間の相互作用を機序として生起する人口集団内の構造変異動態は、集合現象 (collective phenomenon) と呼ばれる。石井 (2003) は、次の3つの集合現象の範疇を挙げた。一つ目は、時間経過に伴って、未採用から採用の状態へと一方向的に変わる普及現象である。たとえば、冒頭に挙げたような、携帯電話に取って代わったスマートフォンの普及が挙げられる。二つ目は、2種の事柄のどちらか一方を選びかつ双方向的な選択の変更が許される過程であり、世論現象と呼ばれる。法改正に関する賛否の意見分布が、この例にあてはまる。三つ目は、個人が二つの状態 (未採用と採用、または、2種の採用) を移り変わる流行現象である。この流行現象には、さらに、反復性流行と交替性流行という分類がある。反復性流行とは、期間をおいて繰り返される流行であり、最近話題となっているタピオカドリンクのように、いわゆる「ブーム」を例として挙げられる。交替性流行とは、2種の事柄の採用状態の間を周期的に移り変わる流行を指し、女子学生の靴下の丈の流行が例として挙げられることがある。これらの集合現象には、いずれにも、「個人の意思決定」が関わっている。個人の意思決定が集合現象の機序となり、集団を構成する成員の個性の分布が集合現象の性質に大きな影響を与えられられる。

アメリカの社会学者 Mark Granovetter は、1978年、集合現象としての「普及」に関する概念的な基礎モデルを提案した（本論文第2章参照）。それ以前の集合現象のモデルでは、採用者と非採用者のランダムな接触によって普及が進む単純な過程を仮定していたが、Granovetter (1978) によるモデルでは、集団全体の状態 (普及率) が個人の意思決定に及ぼす影響を仮定し、各個人は自身のもつ「閾値」と集団全体の状態に依存して、意思決定を行う。「閾値」は、対象となる事柄を採用する意思決定を行うために個人がもつ基準の値として定義される。ある個人による採用の意思決定は、集団中の普及率が、その個人のもつ閾値によって定まる基準を超えるときに限り成される。基準を超えなければ、不採用の意思決定が成される。低い閾値をもつ個人は、流行に敏感で、新しもの好きという性質であり、高い閾値をもつ個人は、流行に疎く、慎重な性質であるとみなされ得る。Granovetter (1978) によるこの閾値モデルは、集団を成す個人の個性の違いを閾値の分布によって導入しており、集団内の不均質さが普及現象の性質を決める重要な因子であることを明示できる基礎モデルである。ただし、普及過程のしくみ (因果関係) を与えたモデルに過ぎず、時間経過に伴う構造の変異過程を表すモデルではなく、集合現象のダイナミクスモデルではない。本論文第2章では、そのアイデアを発展させ、集団内における普及現象の時間発展ダイナミクスを表す数理モデリングを検討し、構築される数理モデルの基本的な性質を述べる。集団における意思決定による集合現象の典型の一つとして、進学における（受験生による）志望校選択がある。入学試

験において、志願者数が1年おきに増減を繰り返す「隔年現象」が検出される例が少なからず知られている（小泉，2015）。倉元（2013）は、東北大学一般入試前期日程試験についての29年間の実データから、その隔年現象の存在を統計的に示した。一方、隔年現象が認められない募集単位もあり、隔年現象の出現は、受験生の心理的要因（前年度の高倍率を敬遠したり、低倍率に対して好感をもつ傾向など）だけでは説明することが難しいと考えられている（井上，2011）。

ある高校受験生を考えれば、ある高校を受験するか否かという二者択一の意味決定が必要である。今日、日本では受験産業が発達し、志望校選択において、受験生は、受験産業が提供する情報の影響を強く受けると考えられる（井上，2011；藤原，2012；今野，2017）。受験生は、自らの学力と当該の高校の過去の入試結果などの受験情報に影響を受けて、その意思決定を行うだろう。このとき、受験生を特徴付ける因子としての「学力」は、上記のGranovetter（1978）の閾値モデルにおける「閾値」と類似の因子とみなすこともできる。

本論文では、第2章において、Granovetter（1978）の閾値モデルのアイデアを発展させ、時間経過に伴う集団内の構造変異のダイナミクスを表す合理的な数理モデリングについて論じた後、第3章では、同様のアイデアを発展的に応用して、入学試験における受験倍率の年次変動ダイナミクスの数理モデリングについて検討する。構築された数理モデルについての解析から得られる基本的な結果が与える示唆を元に、受験倍率の年次変動の特性をもたらす要因に関する考察と、さらに発展的な研究に対する課題の提示を試みる。

2 閾値モデルによる二者択一意思決定者頻度変動ダイナミクス

2.1 Granovetter（1978）の閾値モデル

Granovetter（1978）は、デモや流行現象などの集団行動における参加・不参加または採択・不採択についての各個人の意思決定に関して、集団内に存在する採択者によって現れる社会的影響に基づくモデルを考えた。ここで、「社会的影響」とは、採択者による広告や扇動、あるいは、採択したことによる無意識な行動変化などを指している。たとえば、アパレルにおける特定の色やデザインの流行、感冒流行の兆しに対するマスク使用者頻度の増減などを想定できる。

ある集団における、ある事柄に関する各個人による二者択一の意味決定について次のように考える：

- その事柄に関する意思決定について、各個人がある基準をもっており、その基準に従ってのみ意思決定が行われる。
- 意思決定の基準は各個人で（一般的に）異なる。

さらに、集団内における採択者の存在が各個人の意思決定に与える影響を考える：

- 採択の意思決定を行った者の頻度が大きいほど、採択する意思決定を行う基準は満たされやすい。

これらの前提に基づいて、Granovetter (1978) では、以下の 6 つの仮定による二者択一的意思決定のモデリングが提案されている：

仮定 2.1 各個人の意思決定は、「社会的な影響の強さに対する閾値」に基づいて各個人の意思決定は成される。

仮定 2.2 社会的な影響の強さは集団内の採択者頻度に比例する。

仮定 2.3 各個人の閾値は一般的に異なる。

仮定 2.4 社会的な影響の強さが閾値を超えている場合に限り、採択の意思決定が行われ得る。

仮定 2.5 不採択の意思決定を行ったとしても、その後の採択・不採択の意思決定は独立に行われる。

仮定 2.6 採択者が採択した事柄を破棄することはない。(一旦採択者となった者は採択者であり続ける)

Granovetter (1978) による以上のモデリングに基づく採択者頻度の動態については、以下のよう

に概念的な例を考えることができる (友知, 2014)：

社会的な影響の強さを採択者頻度そのもので表すことにする。ある 100 人の集団において、閾値 0~10 % をもつ者は存在せず、閾値 11, 12, ..., 30 % をもつ者が 1 人ずつ、閾値 31, 32, ..., 40 % をもつ者が 2 人ずつ、閾値 41, 42, ..., 50 % をもつ者が 3 人ずつ、閾値 51, 52, ..., 60 % をもつ者が 2 人ずつ、閾値 61, 62, ..., 70 % をもつ者が 1 人ずつ、閾値 71~100 % をもつ者は存在しないという閾値分布を考える。

まず、(どのように定まったのかは問わず) 始めの採択者が 45 人いた場合 (この 45 人の閾値は全て 45 % 以下とする) を考える。採択者頻度は 45 % であり、与えられた閾値分布により、閾値 45 % 以下をもつ者は 55 人存在するので、いずれは新たに 10 人が採択の意思決定を行い、採択者頻度は 55 % を超えることになる。ところが、閾値 55 % 以下をもつ者は 80 人存在するので、いずれはさらに 25 人が採択の意思決定を行い、採択者頻度は 80 % を超えることが期待できる。閾値 80 % 以下をもつ者は 100 人、つまり集団全員であるから、いずれは集団全体が採択者のみで占められると考えられる。対照的に、初めに採択者が 40 人いた場合 (この 40 人の閾値は全て 40 % 以下とする) には、閾値 40 % 以下をもつ者は丁度 40 人であり、他の 60 人のもつ閾値は全て 40 % より大きい。よって、採択者が増加することはありません、採択者頻度は 40 % に留まる。

この例が示すように、Granovetter (1978) による閾値モデルは、集団内の閾値の分布に依存して、初期状態の違いが採択者頻度の動態に大きな差を生み出していることを示唆している (Yamaguti, 1994)。ただし、本節で述べた Granovetter (1978) の閾値モデルは、採択者頻度の時間変動を表す数理モデルとはいえない。採択者頻度の変化が時間経過に伴う状況変化と対応付けられているわけではないからである。次節では、この Granovetter (1978) による閾値モデルの考え方に基づいた採択者頻度の時間変動ダイナミクスを与える数理モデリングについて論じる。

2.2 閾値分布下の頻度変動ダイナミクスの数理モデリング

閾値の分布と意思決定のルール

Granovetter (1978) の閾値モデルの仮定 2.2 により、集団内の採択者頻度が P ($0 \leq P \leq 1$) であるとき、各個人の意思決定に対する社会的影響の強さが αP で与えられるものとする (α は正定数; $0 \leq \alpha P \leq \alpha$)。仮定 2.1 と 2.4 に基づき、閾値 ξ をもつ個人の意思決定のルールを、以下のよう

$$\begin{cases} \xi \leq \alpha P & \implies \text{その事柄を採択する意思決定を行い得る} \\ \xi > \alpha P & \implies \text{意思決定を行わない, もしくはその事柄を不採択とする意思決定を行う} \end{cases} \quad (1)$$

また、仮定 2.3 に基づき、考えている集団における閾値の分布を、次の分布関数によって与える：

$$F(x) = \text{Prob}(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \quad (2)$$

$F(x)$ は、考えている集団において、閾値が x 以下である個人の頻度 (無作為に抽出したある個人の閾値が x 以下である確率) を表す分布関数 (累積分布関数) であり、 f はその密度分布関数である。閾値の分布を表している関数 F もしくは f が集団の特性を表す。

ここで、非正の閾値 $\xi (\leq 0)$ をもつ者は、社会の状況に関わらずに必ず採択する者を表しており、 α より大きな閾値 $\xi (> \alpha)$ をもつ者は、決して、採択する意思決定が行われ得ない者 (たとえば、考えている事柄に無関係、あるいは、無関心な者) を表すが、本節では、より簡単な場合として、次の性質を満たす閾値分布を仮定する：

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi \leq 0) \\ \geq 0 & (0 < \xi \leq \alpha) \\ 0 & (\xi > \alpha) \end{cases}$$

よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = \int_0^{\alpha} f(\xi) d\xi = 1$$

であり、分布関数 F は、次の性質をもつ単調非減少かつ連続な関数である：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \geq 0 & (0 < x < \alpha) \\ 1 & (x \geq \alpha) \end{cases}$$

時点 t における採択者頻度

ある単位時間ステップ内（たとえば，1 日）で，考えている事柄を新たに採択する人数の期待値を考える。今，仮定 2.6 により，採択者頻度は非減少である。 N を集団全体の人数， P_t を時点 t における採択者頻度とすると， NP_t が時点 t における採択者数， $NF(x)$ が x 以下の閾値を持つ人数を意味する。 $1 - P_t$ が時点 t において採択をしていない者の頻度である。

仮定 2.4 によるルールを与える (1) からは，(初期の採択者を除く) 採択者のもつ閾値は αP 以下に限られるが，考えている集団における初期における採択者頻度 P_0 は，(1) とは無関係に，次のように与える：

$$P_0 := \int_0^\alpha \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi$$

$\varphi_0(\xi)$ は閾値 ξ をもつ者のうち，初期採択者として与えられる割合である。 $0 \leq \varphi_0(\xi) \leq 1$ であり，

$$0 < P_0 \leq \int_0^\alpha f(\xi) d\xi = 1$$

を満たす。仮定 2.6 により，採択者は採択者であり続けるので，初期採択者のうち，時点 t において αP_t を超える閾値をもつ人数は，

$$N \int_{\alpha P_t}^\alpha \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \quad (3)$$

で与えられる。初期採択者が，どのように定まるかについては様々な可能性が想定できるが，ここではその定め方を特定することなく，関数 φ_0 によって与えられる初期採択者頻度 P_0 を仮定として与える。

時点 t において採択していない者の人数

$N\{1 - F(\alpha P_t)\}$ は閾値が αP_t より大きい者の人数であるから，式 (3) により， αP_t を超える閾値をもつ部分集団において，採択をしていない者の人数は，

$$N\{1 - F(\alpha P_t)\} - N \int_{\alpha P_t}^\alpha \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \quad (4)$$

によって与えられる。一方， αP_t 以下の閾値をもつ部分集団において，初期採択者以外的人数は

$$NF(\alpha P_t) - N \int_0^{\alpha P_t} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi$$

によって与えられる。

また，初期採択者以外で時点 t までに採択者となった者の人数は $N(P_t - P_0)$ と表すことができ，仮定 2.4 による (1) により，これらの採択者は全て αP_t 以下の閾値をもつ者であるから， αP_t 以下の閾値をもつ部分集団の中で採択していない者の人数は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}
& \left\{ NF(\alpha P_t) - N \int_0^{\alpha P_t} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right\} - N(P_t - P_0) \\
&= NF(\alpha P_t) - N \int_0^{\alpha P_t} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi - NP_t + N \int_0^{\alpha} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \\
&= NF(\alpha P_t) - NP_t + N \int_{\alpha P_t}^{\alpha} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \tag{5}
\end{aligned}$$

果たして、式 (4) と (5) の和が、考えている集団内の採択をしていない者の人数 $N(1 - P_t)$ に等しく、次の恒等式が成り立っている：

$$\left[N\{1 - F(\alpha P_t)\} - N \int_{\alpha P_t}^{\alpha} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right] + \left[NF(\alpha P_t) - NP_t + N \int_{\alpha P_t}^{\alpha} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right] = N(1 - P_t)$$

単位時間ステップ内における新規採択者数の期待値

意思決定が行われうるには、考えている事柄に関わりをもつ機会が必要であり、そのような機会への遭遇の起こり易さは、集団内の採択者頻度 P に依存することが仮定できるだろう。そこで、単位時間ステップ内において、採択の基準を満たす閾値をもちながら未だ意思決定を行っていない個人が、採択の意思決定をする機会を得る確率を $B(P)$ とする ($0 \leq B(P) < 1$)。そして、機会が得られたときに意思決定が成される確率を γ とおく ($0 < \gamma \leq 1$)。意思決定の機会に遭遇した際でも、意思決定を行わない確率 $1 - \gamma$ は、意思決定という過程に入らない（意思決定をする状況でない）事象の確率である。

単位時間ステップ内において、考えている事柄の新規採択者数の期待値は $N(P_{t+1} - P_t)$ と表されるので、確率 $B(P_t)$ と γ を用いれば、式 (5) により次の等式が成り立つ：

$$N(P_{t+1} - P_t) = \gamma B(P_t) \left\{ NF(\alpha P_t) - NP_t + N \int_{\alpha P_t}^{\alpha} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right\} \tag{6}$$

採択者頻度の時間変動ダイナミクス

等式 (6) から、採択者頻度 P の時間変動を定める次の離散時間モデルが導出できる：

$$P_{t+1} = \{1 - \gamma B(P_t)\} P_t + \gamma B(P_t) F(\alpha P_t) + \gamma B(P_t) \int_{\alpha P_t}^{\alpha} \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \tag{7}$$

この離散時間モデルによる採択者頻度の時系列 $\{P_t\}$ は、次の定理で示される性質をもつ：

定理 2.1 $0 \leq P_0 \leq 1$ のとき、任意の $t \geq 0$ について $0 \leq P_t \leq 1$ である。

証明 式 (7) から、 $P_0 = 0$ のとき、任意の ξ に対して $\varphi_0(\xi) = 0$ であるから、恒等的に $P_t = 0$ となることは容易にわかる。 $0 < P_0 \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{1 - \gamma B(P_0)\}P_0 + \gamma B(P_0)F(\alpha P_0) + \gamma B(P_0) \int_{\alpha P_0}^{\alpha} \varphi_0(\xi)f(\xi)d\xi \\
&= \{1 - \gamma B(P_0)\}P_0 + \gamma B(P_0) \int_0^{\alpha P_0} f(\xi)d\xi + \gamma B(P_0) \int_{\alpha P_0}^{\alpha} \varphi_0(\xi)f(\xi)d\xi \geq 0
\end{aligned}$$

である。また、 $0 \leq \varphi_0(\xi) \leq 1$ であるから、次の不等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
P_1 &\leq \{1 - \gamma B(P_0)\}P_0 + \gamma B(P_0) \int_0^{\alpha P_0} f(\xi)d\xi + \gamma B(P_0) \int_{\alpha P_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \\
&= \{1 - \gamma B(P_0)\}P_0 + \gamma B(P_0) \int_0^{\alpha} f(\xi)d\xi \\
&= \{1 - \gamma B(P_0)\}P_0 + \gamma B(P_0) \\
&= P_0 + \gamma B(P_0)(1 - P_0)
\end{aligned} \tag{8}$$

$0 < P_0 < 1$ ならば、不等式 (8) の右辺は $\gamma B(P_0) (< 1)$ と 1 の内分点であるから 1 以下の正値であり、 $P_0 = 1$ なら 1 である。以上により、 $0 < P_1 \leq 1$ であることが示された。同様に、 $0 \leq P_t \leq 1$ のとき、 $0 \leq P_{t+1} \leq 1$ であることを示すことができるので、数学的帰納法により、定理 2.1 は証明された。

閾値分布が一様分布の場合の採択者頻度変動ダイナミクス

本節では閾値分布が一様分布で与えられる場合における数理モデル (7) による採択者頻度の時間変動ダイナミクスについて考える。次の密度分布関数 f を仮定する：

$$f(z) = \begin{cases} 0 & (z \leq 0) \\ \frac{1}{\theta\alpha} & (0 < z \leq \theta\alpha) \\ 0 & (z > \theta\alpha) \end{cases} \tag{9}$$

ここで、パラメータ θ については $0 < \theta \leq 1$ である。一様分布を与えるこの密度分布関数 f により、 $\theta\alpha$ より大きな閾値をもつ者は存在しない。対応する分布関数 F は、次のように与えられる：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{x}{\theta\alpha} & (0 < x \leq \theta\alpha) \\ 1 & (x > \theta\alpha) \end{cases} \tag{10}$$

意思決定の機会との遭遇のし易さは採択者が多いほど起こりやすいと仮定すれば、確率 $B(P)$ は、 P の単調増加関数である。最も単純な場合を仮定し、 $B(P_t) = bP_t$ とする (b は 1 以下の正定数)。さらに、ここでは、初期採択者は、閾値によらず等確率で選定されるものと仮定し、 $\varphi_0(\xi) = \varphi_0$ とする (φ_0 は 1 より小さい正定数)。

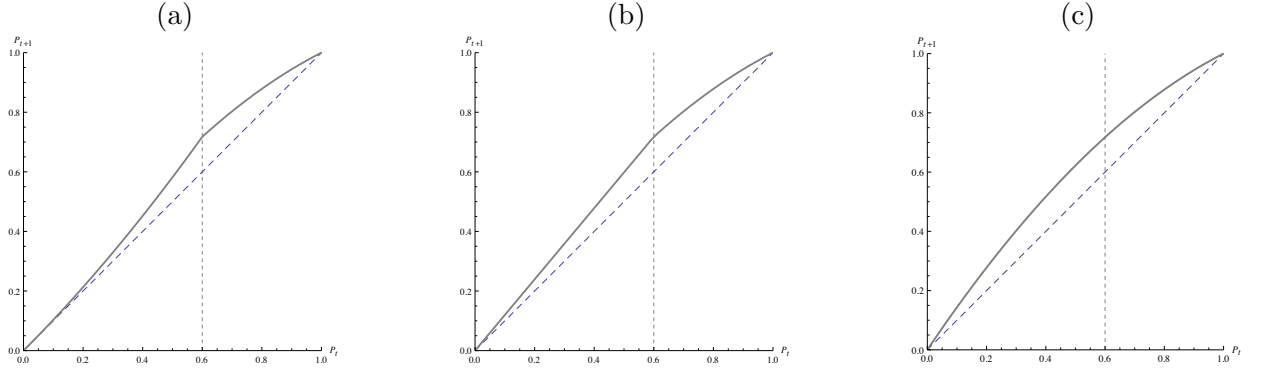


図 1: リターンマップ $\mathcal{F}(P_t)$ のグラフ。(a) $(\theta, \varphi_0) = (0.6, 0.00001)$, $\theta + \varphi_0 - 1 = -0.39999$; (b) $(\theta, \varphi_0) = (0.6, 0.4)$, $\theta + \varphi_0 - 1 = 0$; (c) $(\theta, \varphi_0) = (0.6, 0.99)$, $\theta + \varphi_0 - 1 = 0.54$ 。

以上の仮定により，式 (7) から，採択者頻度の時間変動ダイナミクスは，次式によって与えられる：

$$P_{t+1} = (1 - \gamma b P_t) P_t + \gamma b P_t F(\alpha P_t) + \gamma b \varphi_0 P_t \int_{\alpha P_t}^{\alpha} f(\xi) d\xi \quad (11)$$

式 (9) と (10) が定める閾値分布により， $0 < P_t \leq \theta$ のとき，式 (11) は，

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= \{1 - \gamma b P_t\} P_t + \gamma b P_t \frac{\alpha P_t}{\theta \alpha} + \gamma b P_t \varphi_0 \int_{\alpha P_t}^{\theta \alpha} \frac{1}{\theta \alpha} d\xi \\ &= (1 + \gamma b \varphi_0) \left(1 - \frac{\theta + \varphi_0 - 1}{\theta \varphi_0} \frac{\gamma b \varphi_0}{1 + \gamma b \varphi_0} P_t \right) P_t \end{aligned} \quad (12)$$

となる。また， $P_t > \theta$ のときには， $F(\alpha P_t) = 1$ であり，任意の $\xi > \alpha P_t$ について $f(\xi) = 0$ なので，式 (11) は，

$$P_{t+1} = (1 - \gamma b P_t) P_t + \gamma b P_t = (1 + \gamma b) \left(1 - \frac{\gamma b}{1 + \gamma b} P_t \right) P_t \quad (13)$$

となる。以上により，採択者頻度の時間変動ダイナミクスを与える次の数理モデルが得られた：

$$P_{t+1} = \mathcal{F}(P_t) = \begin{cases} (1 + \gamma b \varphi_0) \left(1 - \frac{\theta + \varphi_0 - 1}{\theta \varphi_0} \frac{\gamma b \varphi_0}{1 + \gamma b \varphi_0} P_t \right) P_t & (P_t \leq \theta) \\ (1 + \gamma b) \left(1 - \frac{\gamma b}{1 + \gamma b} P_t \right) P_t & (P_t > \theta) \end{cases} \quad (14)$$

図 1 が示すような式 (14) が与えるリターンマップ $\mathcal{F}$ による cobwebbing 法を用いれば，任意の初期値 $0 < P_0 < 1$ に対して，数列 $\{P_k\}$ が単調増加列であり， $t \rightarrow \infty$ において，1 に漸近収束することが容易に示される（図 2 参照）（Kaplan & Glass, 1995）。

特に， $\theta = 1$ の場合には，採択者頻度の時間変動ダイナミクス (14) は，

$$P_{t+1} = (1 + \gamma b \varphi_0) \left(1 - \frac{\gamma b \varphi_0}{1 + \gamma b \varphi_0} P_t \right) P_t$$

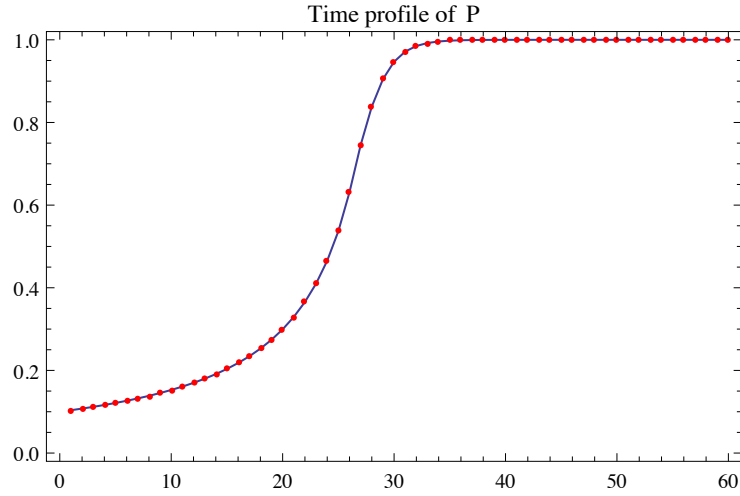


図 2: 採択者頻度 P の時間変動の例。 $(\gamma, b, \theta, \varphi_0) = (0.7, 0.7, 0.6, 0.01)$, $P_0 = 0.1$ 。

となり，いわゆる logistic 写像と数学的に同等である。パラメータの条件 $0 < \gamma \leq 1$, $0 < b \leq 1$, $0 < \varphi_0 < 1$ により， $1 < 1 + \gamma b \varphi_0 < 2$ が成り立つので，logistic 写像についてよく知られた数学的性質により，任意の $0 < P_0 < 1$ に対して， P_t は t の単調増加列であり， $t \rightarrow \infty$ において 1 に漸近収束する (Kaplan & Glass, 1995)。

3 入学試験倍率の年次変動ダイナミクス

3.1 導入

入学試験において，志願者数が 1 年おきに増減を繰り返す「隔年現象」が検出される例が少なからず知られている (小泉, 2015)。倉元 (2013) は，東北大学一般入試前期日程試験についての 29 年間の実データから，この隔年現象の存在を統計的に示し，前年度の倍率や志願者数の数値が志望校選択の重要な情報源となっていることによる影響の可能性に言及した。また，井上 (2011) は，隔年現象が認められない募集単位もあり，隔年現象の出現は受験生の心理的要因 (前年度の高倍率を敬遠したり，低倍率に対して好感をもつ傾向など) だけでは説明することが難しいと考え，著しい出願者数の増減は，当該募集単位の実態や評価を反映したものでなく，その支配的要因の一つとして，集計業者の合否判定予測の影響を考えた。さらに，受験生が出願先を決定する際に，合格の見込みを強く意識していることも反映されている可能性についても言及した。一方，小泉 (2015) は，受験者数に比べて偏差値の変動が少ないことを述べており，学校の人気が出ると，偏差値が上がり，翌年は高偏差値を避ける受験生・保護者の行動によって受験者数が減少することで隔年現象が現れる可能性について触れている。また，隔年現象は繰り返されるが，やがて収束して一定になるとも述べている。

わが国の高校生の進路選択について，荒牧 (2002) や藤原 (2012) は，いわゆる高校ランクに

よって強く規定され、その高校ランクが家庭背景と強く結びつく関係にあると述べた。また、今野 (2017) は、埼玉県における高校進学動態の教育地理学的分析を行い、学力、またはそれを推し量る指標としての偏差値に依拠した高校選択は、いまだ大きな影響力を持つと推測できることについて述べた。

進学における志望校選択は、(受験生による) 意思決定の典型の一つである。ある高校受験生を考えれば、ある高校を受験するか否かという二者択一の意味決定が必要である。今日、日本では受験産業が発達し、受験生は志望校選択の際、受験産業が提供する情報の影響を強く受けると考えられている (井上, 2011; 藤原, 2012; 今野, 2017)。受験生は、自らの学力と当該の高校の過去の入試結果などの受験情報に影響を受けて、その意思決定を行うだろう。このとき、受験生を特徴付ける因子としての「学力」は、第 2 章で述べた Granovetter (1978) の閾値モデルにおける「閾値」と類似する因子とみなすことができる。

本章では、上記のような受験生の志望校選択に係る動態を理論的に考察するための数理モデリングを検討し、受験状況の年次変動ダイナミクスに関する基礎的な数理モデルを構築する。構築された数理モデルについての数理的な解析により、その特性を明らかにし、入学試験倍率の年次変動ダイナミクスに関する理論的な示唆、および、さらに踏み込んだ理論研究の課題の提示を試みる。

3.2 入学試験および受験に関わる因子

受験対象者集団における学力分布

受験対象者集団における学力の分布は、次のように分布関数によって表すことができる：

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(\zeta) d\zeta \quad (15)$$

$F(z)$ は、考えている受験対象者集団において、 z 以下の学力をもつ受験対象者頻度を表しており、 $f(z)$ はその密度分布関数である。 $F(z)$ は単調非減少な非負値連続関数であり、次の条件を満たす：

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = 0; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 1 \quad (16)$$

受験者数と受験倍率

受験対象者総数を N とする。 t 年度入学試験において学力 z の受験対象者が³、ある学校 A を受験する確率を $\phi_t(z)$ で与える。このとき、学校 A の t 年度入学試験における受験者数の期待値 n_t は次のように表される：

$$n_t = N \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz \quad (17)$$

学校 A の合格定員を K_A で表すと、学校 A の t 年度入学試験における受験倍率 p_t は、

$$p_t = \frac{n_t}{K_A}$$

で与えられる。

受験者の学力分布

式 (17) を用いると、学力分布関数 (15) と受験確率 ϕ_t により、学校 A の t 年度入学試験における受験者の学力分布について、次の分布関数が導かれる：

$$\Psi_t(z) = \frac{\int_{-\infty}^z \phi_t(\zeta) f(\zeta) d\zeta}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\zeta) f(\zeta) d\zeta} \quad (18)$$

$\Psi_t(z)$ は、学校 A の t 年度入学試験において、 z 以下の学力をもつ受験者の頻度を与える。

受験者の学力平均値と分散値

学校 A の t 年度入学試験における受験者の学力平均値 $\bar{z}_t$ とその分散値 σ_t^2 は次式で与えられる：

$$\bar{z}_t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz}; \quad \sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (z - \bar{z}_t)^2 \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz} \quad (19)$$

合格者の学力平均値と分散値

学校 A の t 年度入学試験における学力 z の受験者の合格率を $q_t(z)$ とすれば、合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_t$ とその分散値 $\hat{\sigma}_t^2$ は次式で与えられる：

$$\langle z \rangle_t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz}; \quad \hat{\sigma}_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (z - \langle z \rangle_t)^2 q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz} \quad (20)$$

合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_t$ は合格者の学力平均値 $\bar{z}_t$ とは、通常異なっており、 $\langle z \rangle_t \geq \bar{z}_t$ である。

3.3 入学試験および受験に関する仮定

本論文では、入学試験および受験に関する以下の仮定の下で、ある学校 A の入学試験の受験状況の年次変動ダイナミクスについての数理モデリングを考える：

- 仮定 1 受験対象者総数 (N) および学校 A の合格定員 (K_A) は、年度によらず一定である。
- 仮定 2 各年度において、学校 A の受験を選択する受験者の割合が最も大きくなる学力値は、前年度の学校 A の受験・入試状況からの影響を受ける。
- 仮定 3 学校 A の受験者数が合格定員を超えない場合 (受験倍率が 1 以下の場合) には、受験者全員が合格する。
- 仮定 4 学校 A の受験者数が合格定員を超える場合 (受験倍率が 1 より大きい場合) であっても、合格定員増の操作は行わず、合格者数は必ず定員と等しい。

一般に、受験産業は、各学校の受験合格者について入手データを元にして、受験者へ提供する情報（目標偏差値、合格可能性判定など）を算出し、その情報を重要な材料として、受験者は志望校を決定していると考えられる（井上，2011；藤原，2012；今野，2017）。仮定 2 は，この理由に基づくものである。

3.4 年次変動ダイナミクスの数理モデリング

以下の数理モデリングにおいては，便宜のために，ガウス関数

$$G(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

を用いる。関数 $G(x)$ は，標準正規分布 $N(0, 1)$ の密度分布関数に等しく，以下の性質をもつ：

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} G(x)dx = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(ax + b) = \frac{1}{|a|}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} xG(x)dx = 0; \quad \int_0^{\infty} xG(x)dx = -\int_{-\infty}^0 xG(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$(c) G(ax + b)G(cx + d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(ad - bc)^2}{2(a^2 + c^2)} \right] G \left(\sqrt{a^2 + c^2} \left(x + \frac{ab + cd}{a^2 + c^2} \right) \right)$$

また，関数 G により定義される以下の関数も併せて用いる：

$$V(z) := \int_z^{\infty} G(\xi)d\xi \quad (21)$$

ここで， $\lim_{z \rightarrow -\infty} V(z) = 1, \lim_{z \rightarrow \infty} V(z) = 0$ である。

受験対象者集団における学力分布

入学試験の可否は受験者の相対学力で判定されるので，受験対象者集団における学力分布として，標準偏差値分布を仮定する。すなわち，平均値 50，標準偏差 10 の正規分布 $N(50, 10)$ によって与えられる受験対象者集団における学力分布を用いる。このとき，受験対象者集団における学力の密度分布関数 $f(z)$ は，関数 G を用いれば，次のように表すことができる：

$$f(z) = \frac{1}{10} G \left(\frac{z - 50}{10} \right) \quad (22)$$

受験対象者が学校 A を受験する確率

t 年度入学試験において，学力 z の受験対象者が学校 A を受験校に選択する確率 $\phi_t(z)$ を次のように与える：

$$\phi_t(z) = \varphi_t \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - m_t}{s_t} \right)^2 \right] = \varphi_t \sqrt{2\pi} G \left(\frac{z - m_t}{s_t} \right) \quad (23)$$

ここで、正値パラメータ (φ_t, m_t, s_t) は、学校 A の t 年度入学試験における受験者集団を特徴付けるパラメータである。関数 $\phi_t(z)$ は、 $\phi_t(z)/(s_t\varphi_t\sqrt{2\pi})$ が正規分布 $N(m_t, s_t)$ の密度分布関数に等しくなるが、何らかの分布関数として定義されているものではない。

$\phi_t(z)$ の最大値は、 $z = m_t$ における $\phi_t(m_t) = \varphi_t$ であり、確率を与える関数として、パラメータ φ_t は 1 以下の正値とする。学力値 m_t は、 t 年度入学試験において、学校 A の受験を選択する受験者の割合が、最も大きな学力値を意味する。また、 s_t は、学校 A の受験を選択する受験者の学力のばらつきを特徴付けるパラメータである。受験者が学校 A の受験を選択する傾向は、 s_t が小さいほど、学力値 m_t の近くでより偏って強い。

受験者数と受験倍率

学校 A の t 年度入学試験における受験者数の期待値 n_t を、関数 G の性質を用いて、式 (17) から以下のように導出できる：

$$\begin{aligned}
 n_t &= N \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz \\
 &= N \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t \sqrt{2\pi} G\left(\frac{z - m_t}{s_t}\right) \frac{1}{10} G\left(\frac{z - 50}{10}\right) dz \\
 &= N \frac{\varphi_t \sqrt{2\pi}}{10} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{z - m_t}{s_t}\right) G\left(\frac{z - 50}{10}\right) dz \\
 &= \frac{N\varphi_t}{10} \exp\left[-\frac{(m_t - 50)^2}{2(10^2 + s_t^2)}\right] \frac{1}{\sqrt{1/s_t^2 + 1/10^2}} \\
 &= \varphi_t \sqrt{\frac{(s_t/10)^2}{1 + (s_t/10)^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1 + (s_t/10)^2} \left(\frac{m_t - 50}{10}\right)^2\right] N \quad (24)
 \end{aligned}$$

よって、学校 A の t 年度入学試験における受験倍率 p_t は次のように表される：

$$p_t = \varphi_t \sqrt{\frac{(s_t/10)^2}{1 + (s_t/10)^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1 + (s_t/10)^2} \left(\frac{m_t - 50}{10}\right)^2\right] \frac{N}{K_A} \quad (25)$$

受験者の学力平均値

学校 A の t 年度入学試験における受験者の学力平均値 $\bar{z}_t$ は、式 (19) から、次のように得られる：

$$\bar{z}_t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz} = 50 \times \frac{m_t/50 + (s_t/10)^2}{1 + (s_t/10)^2} \quad (26)$$

受験者の学力分散値

学校 A の t 年度入学試験における受験者の学力分散 σ_t^2 は、次のように得られる：

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (z - \bar{z}_t)^2 \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz} - \bar{z}_t^2 = 10^2 \frac{(s_t/10)^2}{1 + (s_t/10)^2} \quad (27)$$

受験者の合格率

3.3 節で示した仮定 3 により、受験者数 n_t が定員 K_A を超えない場合、すなわち、受験倍率 p_t が 1 を超えない場合には、受験者全員が合格するので、合格率 $q_t(z)$ は次の条件を満たさなければならない：

$$\begin{cases} \text{任意の } z \text{ に対して} & q_t(z) = 1 & (n_t \leq K_A, \text{ i.e., } p_t \leq 1); \\ \text{ある } z \text{ に対して} & q_t(z) < 1 & (n_t > K_A, \text{ i.e., } p_t > 1) \end{cases} \quad (28)$$

よって、合格者数（の期待値）について、次式が成り立つ：

$$N \int_{-\infty}^{\infty} q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz = \min\{K_A, n_t\} = K_A \cdot \min\{1, p_t\} \quad (29)$$

すなわち、次式が成り立つ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz = \frac{K_A}{N} \cdot \min\{1, p_t\} = \begin{cases} \frac{n_t}{N} & \left(= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz \right) & (p_t \leq 1) \\ \frac{K_A}{N} & \left(< \frac{n_t}{N} \right) & (p_t > 1) \end{cases}$$

志望校の意思決定

3.3 節で述べた受験に関する仮定 2 から、学校 A を受験校として選択する意思決定が受ける、前年度の学校 A の受験・入試状況からの影響について、本論文の数理解モデリングでは、特に、この影響を受験確率 $\phi_t(z)$ に導入する。すなわち、式 (23) で与えられる受験確率 $\phi_t(z)$ を定めるパラメータ (φ_t, m_t, s_t) が、前年度の学校 A の受験・入試状況からの影響によって定まると仮定する。

ただし、本論文では、基本モデルを提案するという観点に立ち、この影響についての数理解モデリングによる最も単純なものとして、受験確率 $\phi_t(z)$ の最大値を与える学力値 m_t への影響のみを導入した数理解モデルについて考える。この数理解モデリングの仮定により、以後、パラメータ φ_t と s_t については、年度によらない定数とし、(数学的簡単化として) 学力値 m_t は、前年度の合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_{t-1}$ に等しいとする：

$$\varphi_t = \varphi, \quad s_t = s, \quad m_t = \langle z \rangle_{t-1} \quad (30)$$

この仮定の下、式 (24), (26), (30) から、以下の式が導かれる：

$$n_t = N\varphi S \exp \left[-\frac{1-S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle_{t-1} - 50}{10} \right)^2 \right] \quad (31)$$

$$p_t = CS \exp \left[-\frac{1-S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle_{t-1} - 50}{10} \right)^2 \right] \quad (32)$$

$$\bar{z}_t = (1-S^2)\langle z \rangle_{t-1} + 50S^2 \quad (33)$$

である。ただし、ここで、

$$C := \frac{\varphi}{K_A/N}; \quad S := \sqrt{\frac{(s/10)^2}{1+(s/10)^2}} \quad (34)$$

とおいた ($0 < S < 1$)。さらに式 (27) により、 $\sigma_t^2 = 10^2 S^2$ となる。このとき $0 < S < 1$ なので、受験者の学力分散は受験対象者の学力分散以下である ($\sigma_t^2 \leq 10^2$)。

年次変動ダイナミクスの初期条件

年次変動ダイナミクスを考える上で、初期条件として、0 年度の受験に関する状況を設定する必要がある。まず、0 年度入学試験において、学力 z の受験者が学校 A を受験校に選択する確率 $\phi_0(z)$ を、式 (23) により、

$$\phi_0(z) = \varphi \sqrt{2\pi} G \left(\frac{z - m_0}{s} \right), \quad (35)$$

受験倍率 p_0 を、式 (25) により、

$$p_0 = CS \exp \left[-\frac{1-S^2}{2} \left(\frac{m_0 - 50}{10} \right)^2 \right] \quad (36)$$

で与える。すると、式 (26) により、

$$\bar{z}_0 = (1-S^2)m_0 + 50S^2 \quad (37)$$

である。ただし、 m_0 は、前記の、受験者による志望校の意思決定とは独立に与えるものとする。0 年度の学校 A の受験者の学力分布は、式 (18) から、次の密度分布関数 ψ_0 によって与えられる：

$$\psi_0(z) = \frac{d\Psi_0(z)}{dz} = \frac{1}{10S} G \left(\frac{z - \bar{z}_0}{10S} \right) \quad (38)$$

3.5 年次変動ダイナミクスモデルⅠ：学力順位によってのみ合格者が決定される場合

本節では、A 校の受験者の学力順位のみによって合格者が決定される場合の数理モデリングを考える。たとえば、センター試験の結果によって受験対象者全体の学力分布が定められるとした場合に、センター試験の結果のみで入学試験の合否が決まる場合に対応している。

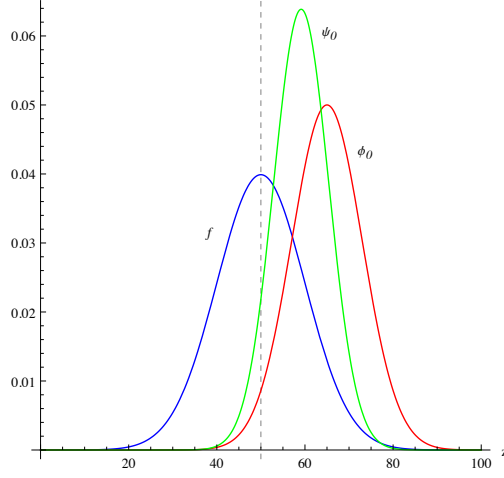


図 3: 受験対象者集団における学力分布 f , 0 年度の受験対象者が学校 A を受験する確率 ϕ_0 , 受験者の学力分布 ψ_0 。式 (22), (35), (38) 参照。 $(S, \phi) = (0.62, 0.05)$, $m_0 = 65$ 。

合格率と一般化学力順位

学校 A の t 年度入学試験の受験者のうち、学力が z 以上の人数、すなわち、学力 z をもつ受験者の一般化学力順位を $r_t(z)$ とすれば、式 (28) から、合格率 $q_t(z)$ は次のように定義される：

$$\begin{cases} r_t(z) \leq K_A \text{ を満たす任意の } z \text{ について} & q_t(z) = 1 \\ r_t(z) > K_A \text{ を満たす任意の } z \text{ について} & q_t(z) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

一般化学力順位 $r_t(z)$ は、次式で定義できる：

$$r_t(z) := N \int_z^\infty \phi_t(\zeta) f(\zeta) d\zeta \quad \left[= n_t \{1 - \Psi_t(z)\} \right] \quad (40)$$

この定義により、 $r_t(z)$ は次の性質を満たす：

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} r_t(z) = n_t; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} r_t(z) = 0 \quad (41)$$

式 (22) と (23) で与えられる f と ϕ_t を適用すれば、式 (31), 仮定 (30) と定義式 (40) から、以下の表式を導くことができる：

$$\begin{aligned} r_t(z) &= N \int_z^\infty \phi_t(\zeta) f(\zeta) d\zeta \\ &= N \int_z^\infty \varphi \sqrt{2\pi} G\left(\frac{\zeta - m_t}{s}\right) \frac{1}{10} G\left(\frac{\zeta - 50}{10}\right) d\zeta \\ &= \frac{N\varphi\sqrt{2\pi}}{10} \int_z^\infty G\left(\frac{\zeta - \langle z \rangle_{t-1}}{s}\right) G\left(\frac{\zeta - 50}{10}\right) d\zeta \\ &= \frac{N\varphi}{10} \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \int_z^\infty G\left(\frac{\zeta - \bar{z}_t}{10S}\right) d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(x = \frac{\zeta - \bar{z}_t}{10S} \text{とおく} \right) \\
& = N\varphi S \exp \left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)} \right] \int_{(z - \bar{z}_t)/(10S)}^{\infty} G(x) dx \\
& = N\varphi S \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1 + (s/10)^2} \left(\frac{\langle z \rangle_{t-1} - 50}{10} \right)^2 \right] V \left(\frac{z - \bar{z}_t}{10S} \right) \\
& = n_t V \left(\frac{z - \bar{z}_t}{10S} \right)
\end{aligned} \tag{42}$$

受験倍率が 1 以下の場合の合格者学力平均値

3.3 節で示した仮定 3 により, $p_t \leq 1$ の場合には, 受験者全員が合格するので, t 年度における学校 A の受験合格者の学力平均値は, 同年度の受験者の学力平均値 $\bar{z}_t$ に等しい:

$$\langle z \rangle_t = \bar{z}_t = (1 - S^2) \langle z \rangle_{t-1} + 50S^2 \tag{43}$$

受験倍率が 1 以下の場合の合格者学力分散値

3.3 節で示した仮定 3 により, $p_t \leq 1$ の場合には, 受験者全員が合格するので, t 年度における学校 A の受験合格者の学力分散は, 同年度の受験者の学力分散 σ_t^2 に等しい:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \sigma_t^2 = 10^2 S^2 \tag{44}$$

受験倍率が 1 より大きい場合の合格者学力平均値

上記の $p_t \leq 1$ の場合とは異なり, $p_t > 1$ の場合には, 合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_t$ は, 必ず, 受験者の学力平均値 $\bar{z}_t$ より大きくなる。3.3 節で示した仮定 4 により, 等式 $r_t(z_c) = K_A$ を成り立たせる値 z_c が合格者の学力の下限值である。すなわち, 式 (42) から, 合格者の学力下限値 z_c は次式によって定まる:

$$V \left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S} \right) = \frac{1}{p_t} \tag{45}$$

関数 V の定義 (21) により, $V((z - \bar{z}_t)/(10S))$ は, $z \rightarrow -\infty$ に対して $V \rightarrow 1$, $z \rightarrow \infty$ に対して $V \rightarrow 0$ を満たし, z について連続な単調減少関数であるから, $p_t > 1$ のとき, 等式 (45) を満たす z_c の値が唯一存在することは容易にわかる。 z_c より低い学力を持つ受験者は不合格なので, 任意の $z < z_c$ について, $q_t(z) = 0$ であり, 任意の $z \geq z_c$ について, $q_t(z) = 1$ である。

以上の数理モデリングから, 学校 A の t 年度における受験合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_t$ を次のように表すことができる:

$$\begin{aligned}
\langle z \rangle_t &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz} = \frac{\int_{z_c}^{\infty} z \phi_t(z) f(z) dz}{\int_{z_c}^{\infty} \phi_t(z) f(z) dz} = \frac{\int_{z_c}^{\infty} z \phi_t(z) f(z) dz}{r_t(z_c)/N} = \frac{N}{K_A} \int_{z_c}^{\infty} z \phi_t(z) f(z) dz
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_{z_c}^{\infty} z \phi_t(z) f(z) dz &= \frac{\varphi \sqrt{2\pi}}{10} \int_{z_c}^{\infty} z G\left(\frac{z - \langle z \rangle_{t-1}}{s}\right) G\left(\frac{z - 50}{10}\right) dz \\
&= \frac{\varphi}{10} \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \int_{z_c}^{\infty} z G\left(\frac{z - \bar{z}_t}{10S}\right) dz \\
&\quad \left(x = \frac{z - \bar{z}_t}{10S} \text{ とおく}\right) \\
&= \varphi S \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \int_{(z_c - \bar{z}_t)/(10S)}^{\infty} (10Sx + \bar{z}_t) G(x) dx \\
&= \frac{n_t}{N} \left\{ 10S \int_{(z_c - \bar{z}_t)/(10S)}^{\infty} x G(x) dx + \bar{z}_t \int_{(z_c - \bar{z}_t)/(10S)}^{\infty} G(x) dx \right\} \\
&= \frac{n_t}{N} \left\{ 10S G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + \bar{z}_t V\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) \right\} \\
&= \frac{10S n_t}{N} G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + \frac{n_t}{N} \cdot \bar{z}_t \cdot \frac{1}{p_t} \\
&= \left\{ 10S p_t G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + \bar{z}_t \right\} \frac{K_A}{N}
\end{aligned}$$

となり, 学校 A の t 年度における受験合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_t$ を次のように導くことができる:

$$\langle z \rangle_t = \bar{z}_t + 10S p_t G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) \quad (46)$$

受験倍率が 1 より大きい場合の合格者学力分散値

学校 A の t 年度入学試験における受験者の学力分散値は $\hat{\sigma}_t^2 = \langle z \rangle_t^2 - \{\langle z \rangle_t\}^2$ であり,

前述と同様の数理モデリングから, 学校 A の t 年度における受験合格者の学力分散 $\hat{\sigma}_t^2$ を次のように表すことができる:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{N}{K_A} \int_{z_c}^{\infty} z^2 \phi_t(z) f(z) dz - \langle z \rangle_t^2$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_{z_c}^{\infty} z^2 \phi_t(z) f(z) dz &= \frac{\varphi \sqrt{2\pi}}{10} \int_{z_c}^{\infty} z^2 G\left(\frac{z - \langle z \rangle_{t-1}}{s}\right) G\left(\frac{z - 50}{10}\right) dz \\
&= \frac{\varphi}{10} \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \int_{z_c}^{\infty} z^2 G\left(\frac{z - \bar{z}_t}{10S}\right) dz \\
&\quad \left(x = \frac{z - \bar{z}_t}{10S} \text{ とおく}\right) \\
&= \varphi S \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \int_{(z_c - \bar{z}_t)/(10S)}^{\infty} (10Sx + \bar{z}_t)^2 G(x) dx \\
&= \frac{n_t}{N} \left\{ 10^2 S^2 \int_{(z_c - \bar{z}_t)/(10S)}^{\infty} x^2 G(x) dx + 20S \bar{z}_t \int_{(z_c - \bar{z}_t)/(10S)}^{\infty} x G(x) dx \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{z}_t^2 \int_{(z_c - \bar{z}_t)/(10S)}^{\infty} G(x) dx \Big\} \\
& = \frac{n_t}{N} \left\{ 10^2 S^2 \frac{z_c - \bar{z}_t}{10S} G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + 20S \bar{z}_t^2 G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + (10^2 S^2 + \bar{z}_t^2) V\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) \right\} \\
& = \frac{n_t}{N} \left\{ (10S(z_c - \bar{z}_t) + 20S \bar{z}_t) G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + (10^2 S^2 + \bar{z}_t^2) V\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) \right\} \\
& = \frac{n_t}{N} (10S(z_c - \bar{z}_t) + 20S \bar{z}_t) G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + \frac{n_t}{N} (10^2 S^2 + \bar{z}_t^2) \frac{1}{p_t} \\
& = \frac{K_A}{N} \left\{ p_t (10S(z_c - \bar{z}_t) + 20S \bar{z}_t) G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + 10^2 S^2 + \bar{z}_t^2 \right\}
\end{aligned}$$

となり，学校 A の t 年度における受験合格者の学力分散 $\hat{\sigma}_t^2$ を次のように導くことができる：

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_t^2 &= p_t (10S(z_c - \bar{z}_t) + 20S \bar{z}_t) G\left(\frac{z_c - \bar{z}_t}{10S}\right) + 10^2 S^2 + \bar{z}_t^2 - \langle z \rangle_t^2 \\
&= 10^2 S^2 - (\langle z \rangle_t - z_c)(\langle z \rangle_t - \bar{z}_t) \\
&= 10^2 S^2 - (\langle z \rangle_t - \bar{z}_t - 10S\omega_t)(\langle z \rangle_t - \bar{z}_t)
\end{aligned} \tag{47}$$

年次変動ダイナミクス

$p_{t+1} \leq 1$ の場合は，3.3 節の仮定 3 により，受験生全員が合格者となるので， $\langle z \rangle_{t+1} = \bar{z}_{t+1}$ であり，式 (32) と (43) から，次の差分方程式系が導かれる：

$$\begin{cases} \langle z \rangle_{t+1} = \bar{z}_{t+1} \\ p_{t+1} = CS \exp \left[-\frac{1-S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle_t - 50}{10} \right)^2 \right] \end{cases} \tag{48}$$

$p_{t+1} > 1$ の場合は，式 (32)，(33)，(45)，(46) により，次の差分方程式系が導かれる：

$$\begin{cases} \langle z \rangle_{t+1} = 10SG(\omega_{t+1})p_{t+1} + \bar{z}_{t+1} \\ p_{t+1} = CS \exp \left[-\frac{1-S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle_t - 50}{10} \right)^2 \right] \end{cases} \tag{49}$$

ただし，

$$V(\omega_{t+1}) = \frac{1}{p_{t+1}} \tag{50}$$

結果として，年次変動ダイナミクスは，次の差分方程式系によって与えられる：

$$\bar{z}_{t+1} = (1 - S^2)\langle z \rangle_t + 50S^2 \quad (51)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = 10^2 S^2 \quad (52)$$

$$\langle z \rangle_{t+1} = \mathcal{F}(\langle z \rangle_t) = \begin{cases} \bar{z}_{t+1} & (p_{t+1} \leq 1) \\ \bar{z}_{t+1} + 10SG(\omega_{t+1})p_{t+1} & (p_{t+1} > 1) \end{cases} \quad (53)$$

$$p_{t+1} = CS \exp \left[-\frac{1 - S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle_t - 50}{10} \right)^2 \right] \quad (54)$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \begin{cases} \sigma_{t+1}^2 & (p_{t+1} \leq 1) \\ \sigma_{t+1}^2 - (\langle z \rangle_{t+1} - \bar{z}_{t+1} - 10S\omega_{t+1})(\langle z \rangle_{t+1} - \bar{z}_{t+1}) & (p_{t+1} > 1) \end{cases} \quad (55)$$

$$V(\omega_{t+1}) = \frac{1}{p_{t+1}} \quad (p_{t+1} > 1) \quad (56)$$

関数 V の置き換え

式 (53), (54), (56) が与える年次変動ダイナミクスにおいて, $p_{t+1} > 1$ の場合に現れる ω_{t+1} は, p_{t+1} の関数として方程式 $V(\omega_{t+1}) = 1/p_{t+1}$ によって陰に与えられている。そこで, 数学的に取り扱い易くするために, 関数 $V(\omega)$ を, 同様の性質をもつ次の関数 $W(\omega)$ で置き換える:

$$W(\omega) := \frac{1}{2} \left\{ 1 - \tanh \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \omega \right) \right\} = \frac{1}{e^{4\omega/\sqrt{2\pi}} + 1} \quad (57)$$

関数 $W(\omega)$ は, $V(\omega)$ と同様に, 性質

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} W(\omega) = 1; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} W(\omega) = 0 \quad (58)$$

をもつ C^∞ 級正值単調減少関数であり, 加えて, $W'(0) = V'(0) = -1/\sqrt{2\pi}$ を満たす。図 4 が示すように, $W(\omega)$ と $V(\omega)$ の関数値の差は十分に小さく, 本論文における理論的な考察を目的とした数理モデルにおける $V(\omega)$ の $W(\omega)$ への置き換えは, 数理モデリングの合理性を損なうものとは考えられず, この置き換えによって構築される以下の数理モデルによる年次変動ダイナミクスの特性が, 式 (53), (54), (56) が定める系の特性と本質的に異なる可能性は小さいと考えられる。

関数 W の導入により, 式 (56) における ω_{t+1} は, 次式によって置き換えられる:

$$\omega_{t+1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln(p_{t+1} - 1) \quad (59)$$

この結果, 次の年次変動ダイナミクスモデルが得られる:

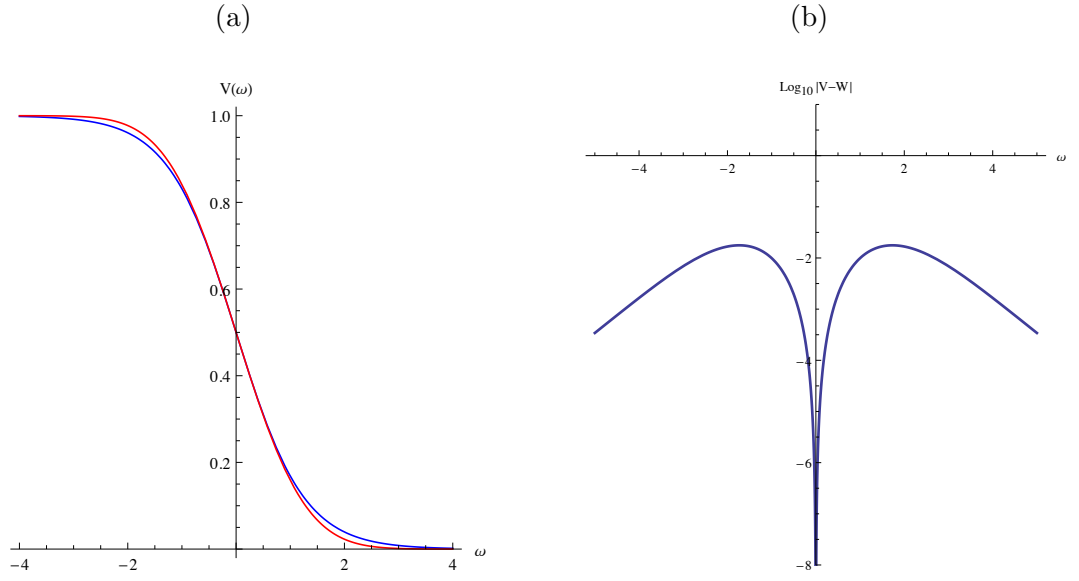


図 4: (a) $V(\omega)$ と $W(\omega)$ のグラフ ; (b) $V(\omega)$ と $W(\omega)$ の関数値の差の絶対値の常用対数値。

$$\bar{z}_{t+1} = (1 - S^2)\langle z \rangle_t + 50S^2 \quad (60)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = 10^2 S^2 \quad (61)$$

$$\langle z \rangle_{t+1} = \mathcal{F}(\langle z \rangle_t) = \begin{cases} \bar{z}_{t+1} & (p_{t+1} \leq 1) \\ \bar{z}_{t+1} + \frac{10S}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\pi}{16}\{\ln(p_{t+1} - 1)\}^2\right] p_{t+1} & (p_{t+1} > 1) \end{cases} \quad (62)$$

$$p_{t+1} = CS \exp\left[-\frac{1 - S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle_t - 50}{10}\right)^2\right] \quad (63)$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \begin{cases} \sigma_{t+1}^2 & (p_{t+1} \leq 1) \\ \sigma_{t+1}^2 - \left(\langle z \rangle_{t+1} - \bar{z}_{t+1} - 10S \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln(p_{t+1} - 1)\right) (\langle z \rangle_{t+1} - \bar{z}_{t+1}) & (p_{t+1} > 1) \end{cases} \quad (64)$$

年次変動ダイナミクスの初期条件

式 (36) と (37), および, 式 (45), (46) の導出と同様の計算過程によって, 次の連立方程式から初期値 $\langle z \rangle_0$ が定められる:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{z}_0 = (1 - S^2)m_0 + 50S^2 \\ \sigma_0^2 = 10^2 S^2 \\ \langle z \rangle_0 = 10SG(\omega_0)p_0 + \bar{z}_0 \\ p_0 = CS \exp \left[-\frac{1 - S^2}{2} \left(\frac{m_0 - 50}{10} \right)^2 \right] \\ \hat{\sigma}_0^2 = 10^2 S^2 - (\langle z \rangle_0 - \bar{z}_0 - 10S\omega_0)(\langle z \rangle_0 - \bar{z}_0) \\ V(\omega_0) = \frac{1}{p_0} \end{array} \right.$$

V を W に置き換えて, 式 (59) を用いれば, 式 (36) と合わせて, 次の初期値 $\langle z \rangle_0$, $\hat{\sigma}_0^2$ が定まる:

$$\langle z \rangle_0 = \left\{ \begin{array}{ll} (1 - S^2)m_0 + 50S^2 & (p_0 \leq 1) \\ 10Sp_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p_0 - 1)\}^2 \right] + (1 - S^2)m_0 + 50S^2 & (p_0 > 1) \end{array} \right. \quad (65)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \left\{ \begin{array}{ll} 10^2 S^2 & (p_0 \leq 1) \\ 10^2 S^2 - \left(\langle z \rangle_0 - \bar{z}_0 - 10S \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln(p_0 - 1) \right) (\langle z \rangle_0 - \bar{z}_0) & (p_0 > 1) \end{array} \right. \quad (66)$$

3.6 年次変動ダイナミクスモデルⅡ：学力に応じた不合格率が存在する場合

本節では, 受験対象者の学力 z が高いほど合格しやすいが, どんな学力の受験者も不合格になる可能性がある場合の数理モデリングを考える。可否が受験者の学力順位のみでは決まらない場合となり, 別途課された入学試験の成績が, 可否の決定因子として用いられる場合に対応している。

合格率

合格率 $q_t(z)$ として, 式 (40) で定義される一般化学力順位 $r_t(z)$ による次の関数を考える:

$$q_t(z) = \theta_t^{r_t(z)} = e^{r_t(z) \ln \theta_t} \quad (67)$$

この $q_t(z)$ は、一般化学力順位 $r_t(z)$ について単調減少であり、次の性質を満たすものとする：

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} q_t(z) = \theta_t^{n_t}; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} q_t(z) = 1 \quad (68)$$

条件 (28) により、 θ_t は以下の条件を満たさなければならない：

$$\begin{cases} \theta_t = 1 & (p_t \leq 1); \\ \theta_t < 1 & (p_t > 1) \end{cases} \quad (69)$$

$p_t \leq 1$ のときには、 $q_t(z) \equiv 1$ であるから、 $p_t > 1$ のときについて考える。式 (40) と (67) から、

$$\frac{\partial r_t(z)}{\partial z} = -N\phi_t(z)f(z); \quad \frac{\partial q_t(z)}{\partial z} = \theta_t^{r_t(z)}(\ln \theta_t) \frac{\partial r_t(z)}{\partial z} \quad (70)$$

であることにより、合格者数の期待値の表式

$$N \int_{-\infty}^{\infty} q_t(z)\phi_t(z)f(z)dz = \left[-\frac{q_t(z)}{\ln \theta_t} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1 - \theta_t^{n_t}}{\ln \theta_t} \quad (71)$$

が得られる。よって、式 (29) により、 $p_t > 1$ のとき、 θ_t は次式を満たさなければならない：

$$-\frac{1 - \theta_t^{n_t}}{\ln \theta_t} = K_A \quad (72)$$

条件 (69) を満たす、方程式 (72) の解 θ_t について考察することにより、次の結果が得られる (付録 A)：

μ についての方程式

$$1 - \mu^{n_t} + (\ln \mu) \min\{K_A, n_t\} = 0 \quad (73)$$

を満たす最も小さな正の実根を θ_t として、式 (67) によって $q_t(z)$ を定める：

学校 A の t 年度入学試験における受験者のうち、学力が z 以上の人数を正規化した一般化学力順位比率

$$\rho_t(z) := \frac{r_t(z)}{n_t} = 1 - \frac{N}{n_t} \Psi_t(z) = \frac{\int_z^{\infty} \phi_t(\zeta)f(\zeta)d\zeta}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\zeta)f(\zeta)d\zeta} \quad (74)$$

を定義すると、 $\rho_t(z)$ は、性質

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \rho_t(z) = 1; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \rho_t(z) = 0 \quad (75)$$

を満たす。さらに、 $\rho_t(z)$ は、 V を用いて、次のように表すことができる：

$$\rho_t(z) = V \left(\frac{z - \bar{z}_t}{10S} \right)$$

この一般化学力順位比率 $\rho_t(z)$ を用いれば、上記の方程式 (73) による合格率 $q_t(z)$ の数理モデリングを次のように書き換えることができる：

λ についての方程式

$$\ln \lambda + (1 - \lambda) \max\{1, p_t\} = 0 \quad (76)$$

を満たす最も小さな正の実根 λ_t を用いて、次のように $q_t(z)$ を定める：

$$q_t(z) = \lambda_t^{\rho_t(z)}$$

合格者の学力平均値

式 (20) で定義される学校 A の t 年度入学試験における合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_t$ の分母と分子は、それぞれ次のように導出できる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz = \frac{\lambda_t - 1}{\ln \lambda_t} \cdot \frac{n_t}{N} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} z q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} z \lambda_t^{\rho_t(z)} \phi_t(z) f(z) dz \\ &= \frac{\varphi \sqrt{2\pi}}{10} \int_{-\infty}^{\infty} z \lambda_t^{\rho_t(z)} G\left(\frac{z - \langle z \rangle_{t-1}}{s}\right) G\left(\frac{z - 50}{10}\right) dz \\ &= \frac{\varphi}{10} \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} z \lambda_t^{\rho_t(z)} G\left(\frac{z - \bar{z}_t}{10S}\right) dz \\ &\quad \left(x = \frac{z - \bar{z}_t}{10S} \text{ とおく}\right) \\ &= \varphi S \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} (10Sx + \bar{z}_t) \lambda_t^{\rho_t(10Sx + \bar{z}_t)} G(x) dx \\ &= \varphi S \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \left(10S \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda_t^{\rho_t(10Sx + \bar{z}_t)} G(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \bar{z}_t \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_t^{\rho_t(10Sx + \bar{z}_t)} G(x) dx\right) \\ &= \varphi S \exp\left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)}\right] \left(10S \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda_t^{V(x)} G(x) dx + \frac{\lambda_t - 1}{\ln \lambda_t} \bar{z}_t\right) \end{aligned} \quad (78)$$

よって、式 (20), (77), (78) により、学校 A の t 年度における受験合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_t$ は次のように表される：

$$\begin{aligned} \langle z \rangle_t &= 10S \frac{\ln \lambda_t}{\lambda_t - 1} \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda_t^{V(x)} G(x) dx + \bar{z}_t \\ &= 10S \frac{\ln \lambda_t}{\lambda_t - 1} \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda_t^{V(x)} G(x) dx + (1 - S^2) \langle z \rangle_{t-1} + 50S^2 \end{aligned} \quad (79)$$

$\langle z \rangle_t$ が有界であることは、容易に数学的に証明できる（付録 B）。

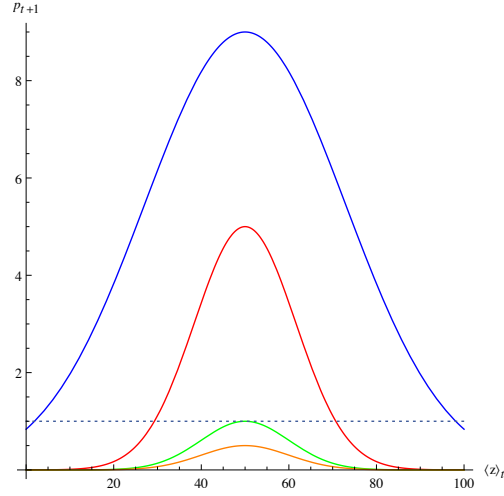


図 5: 合格者学力平均値 $\langle z \rangle_t$ と受験倍率 p_{t+1} の関係。下から $(S, C) = (0.05, 10.0)$, $(0.1, 10.0)$, $(0.3, 10.0)$, $(0.5, 10.0)$ 。年次変動ダイナミクスモデル I と II に共通。

年次変動ダイナミクス

式 (25), (76), (79) により, 次の差分方程式系が導出される :

$$\begin{cases} \langle z \rangle_{t+1} = \mathcal{F}(\langle z \rangle_t) = 10S \max\{1, p_{t+1}\} \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda_{t+1}^{V(x)} G(x) dx + (1 - S^2) \langle z \rangle_t + 50S^2 \\ p_{t+1} = CS \exp \left[-\frac{1 - S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle_t - 50}{10} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (80)$$

ただし, λ_{t+1} は, 次の λ についての方程式の最も小さな正の実根 :

$$\ln \lambda + (1 - \lambda) \max\{1, p_{t+1}\} = 0$$

3.7 年次変動ダイナミクスモデル I の解析

受験倍率の特性

系 (62) における受験倍率 p_{t+1} は, 上限値 CS をもち, 図 5 で例示されるような $\langle z \rangle_t$ への依存性をもつ。合格者学力平均値が偏差値 50 に近いほど, 受験倍率は高くなる。これは, 受験対象者集団における学力分布が正規分布 $N(50, 10)$ に従い, 偏差値 50 周辺の学力をもつ受験者の相対頻度が高く, $\langle z \rangle_t$ が 50 に近いほど, 式 (33) により, $\bar{z}_{t+1}$ もより 50 に近いので, 受験者の分布も 50 周辺で大きな値をもつ傾向があると考えられることと整合性をもつ結果である。

平衡点の存在性

$CS \leq 1$ の場合には、系 (62) における p_{t+1} を定める式から、(任意に与えられる初期値 p_0 に対して) 任意の $t > 0$ について $p_t \leq 1$ であることがわかるので、 $t > 0$ に対する年次変動ダイナミクスは、系 (48) が与える。よって、 $CS \leq 1$ の場合における平衡点 $(\langle z \rangle^*, p^*)$ は、

$$\begin{cases} \langle z \rangle^* &= (1 - S^2)\langle z \rangle^* + 50S^2 \\ p^* &= CS \exp \left[-\frac{1 - S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 \right] \\ (\hat{\sigma}^*)^2 &= (\sigma^*)^2 = 10^2 S^2 \end{cases} \quad (81)$$

を満たさなければならない。この方程式 (81) は容易に解けて、 $(\langle z \rangle^*, p^*) = (50, CS)$ である。 $CS \leq 1$ の場合には、 $\langle z \rangle_t = \bar{z}_t$ なので、 $\bar{z}^* = \langle z \rangle^* = 50$ である。

$CS > 1$ の場合における平衡点 $(\langle z \rangle^*, p^*)$ は、系 (62) から、次の方程式を満たさなければならない：

$$\begin{cases} \bar{z}^* &= (1 - S^2)\langle z \rangle^* + 50S^2 \\ \langle z \rangle^* &= 10Sp^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] + (1 - S^2)\langle z \rangle^* + 50S^2 \\ p^* &= CS \exp \left[-\frac{1 - S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 \right] \\ (\hat{\sigma}^*)^2 &= (\sigma^*)^2 - \left\{ \langle z \rangle^* - \bar{z}^* - 10S \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln(p^* - 1) \right\} (\langle z \rangle^* - \bar{z}^*) \end{cases} \quad (82)$$

このときの受験者の学力平均値の平衡値 $\bar{z}^*$ は式 (33) により

$$\bar{z}^* = (1 - S^2)\langle z \rangle^* + 50S^2 \quad (83)$$

で与えられる。これらの結果に基づいて、以下の 2 つの補題が得られる：

補題 3.1 $CS \leq 1$ のとき、 $p^* > 1$ なる平衡点は存在しない。

証明 $CS \leq 1$ のとき、 $p^* > 1$ なる平衡点 $(\langle z \rangle^*, p^*)$ が存在するとすると、式 (82) が満たされなければならない。しかし、式 (82) の第 1 式の右辺は、 $CS \leq 1$ のとき、必ず 1 以下であるから矛盾である。よって、この補題 3.1 は証明された。

補題 3.2 $CS > 1$ のとき、 $p^* \leq 1$ なる平衡点は存在しない。

証明 $CS > 1$ のとき、もしも、 $p^* \leq 1$ なる平衡点 $p = p^*$ が存在するならば、上記の議論により、 $p^* = CS$ でなければならないが、これは矛盾である。よって、補題 3.2 が証明された。

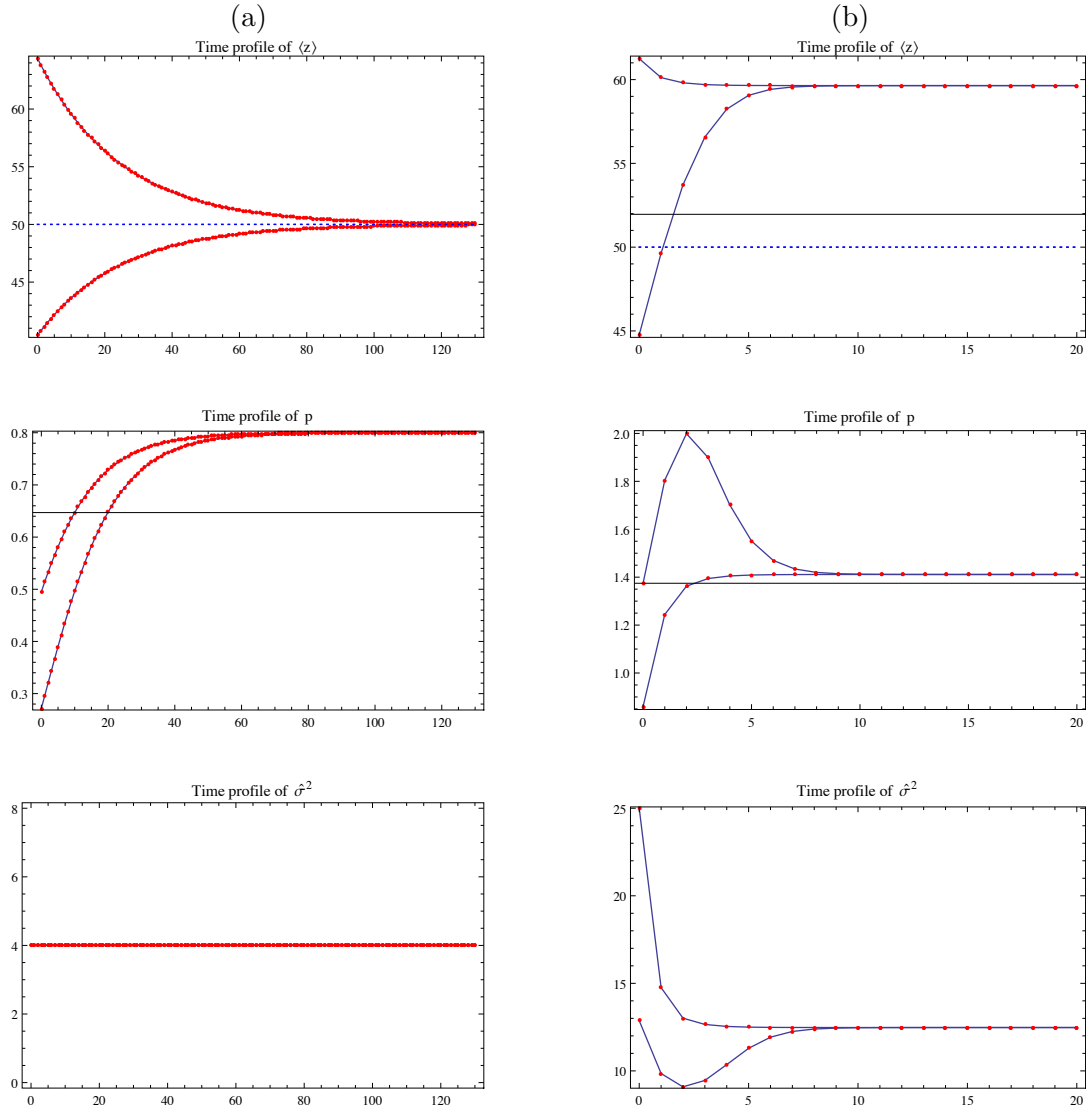


図 6: 年次変動ダイナミクス I の p_t と $\langle z \rangle_t$ と $\hat{\sigma}^2$ の年次変動。(a) $(S, C) = (0.2, 4.0)$, $(z_0, p_0, \sigma_0^2) = (40.4, 0.50), (64.4, 0.27)$; (b) $(S, C) = (0.5, 4.0)$, $(z_0, p_0, \sigma_0^2) = (44.8, 1.4), (61.3, 0.86)$ 。

以上の議論と補題により，次の定理が示された：

定理 3.3 $CS \leq 1$ ならば，平衡点 $(\langle z \rangle^*, p^*) = (50, CS)$ のみが存在する。

一方， $CS > 1$ のときには，次の定理が成り立つ（付録 C）：

定理 3.4 $CS > 1$ のとき， $p^* > 1$ なる平衡点のみが存在する。

存在する平衡点の数についての数学的解析は今後の課題であるが，数値計算による系 (62) の振る舞いは，その唯一性を示唆している。

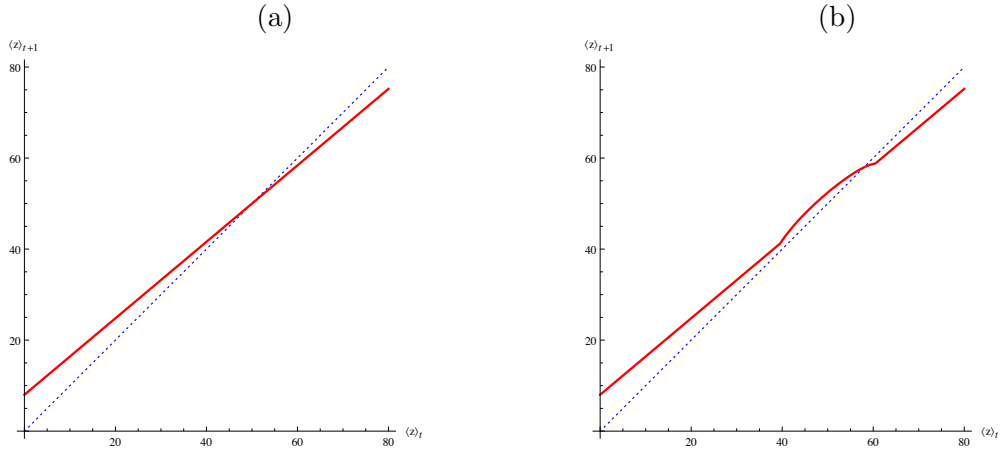


図 7: 年次変動ダイナミクス I における式 (62) が定めるリターンマップ $\langle z \rangle_{t+1} = \mathcal{F}(\langle z \rangle_t)$ 。(a) $(S, C) = (0.4, 2.0)$; (b) $(S, C) = (0.4, 4.0)$

平衡点の安定性

$CS \leq 1$ の場合、式 (62) により、任意の $t > 0$ において、 $p_t \leq 1$ が成り立つので、任意の $t > 1$ における年次変動ダイナミクスは系 (48) によって与えられる。このとき、系 (48) の第 1 式から、 $0 < S < 1$ ならば、式

$$\langle z \rangle_t = 50 + \{\langle z \rangle_1(1 - S^2) - 50\}(1 - S^2)^{t-1} \quad (t \geq 1)$$

が容易に導出できる。また、 $S = 1$ に対しては、 $\langle z \rangle_t = 50$ ($t \geq 1$) が導かれる。したがって、 $CS \leq 1$ の場合の系 (62) は、 $t > 1$ において、平衡点 $(\langle z \rangle^*, p^*) = (50, CS)$ に単調に漸近していくことがわかる。

一方、 $CS > 1$ の場合の式 (62) と (63) が定める系の振る舞いについての数学的解析は今後の課題であるが、数値計算は、やはり、十分に大きな $t > 0$ に対して、唯一の平衡点に単調に漸近する結果を示した (図 6)。さらに、式 (62) が定めるリターンマップ $\mathcal{F}$ のグラフを数値的に描いたものからも (cobwebbing 法に基づいて) 年次変動ダイナミクスが十分に大きな $t > 0$ に対して、唯一の平衡点に単調に漸近することが示唆される (図 7)。

平衡点の特性

図 8 と 10 に示された数値計算結果が示すように、合格者学力平均値の平衡値 $\langle z \rangle^*$ は、パラメータ C と S の値に強く依存する。

図 8 が示すようにパラメータ C と受験者学力平均値の平衡値 $\bar{z}^*$ 、合格者学力平均値の平衡値 $\langle z \rangle^*$ 、受験倍率の平衡値 p^* は正の相関をもつ。つまり、より大きな C に対し、それらはより大きくなる。

一方、パラメータ S への依存性については、図 10 が示すように、 $\bar{z}^*$ や $\langle z \rangle^*$ が極大となる特別

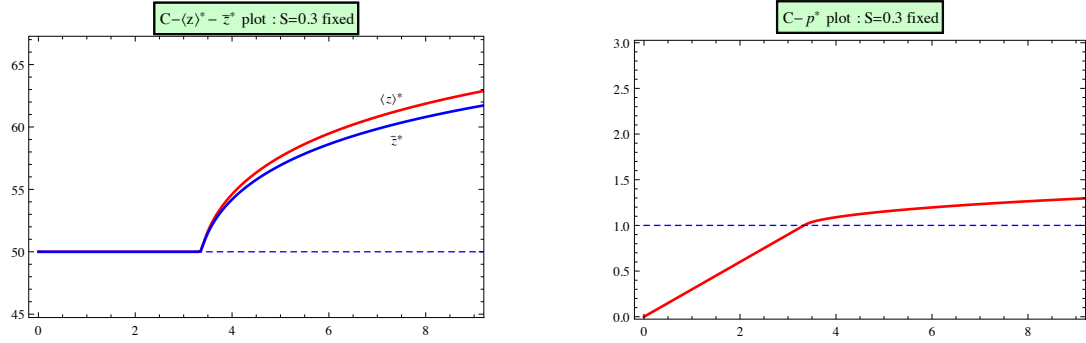


図 8: 合格者学力平均値の平衡値の平衡値, 受験者学力平均値の平衡値, 受験倍率の平衡値, $\langle z \rangle^*$, $\bar{z}^*$, p^* のパラメータ C 依存性。 $S = 0.3$ の場合の数値計算結果。

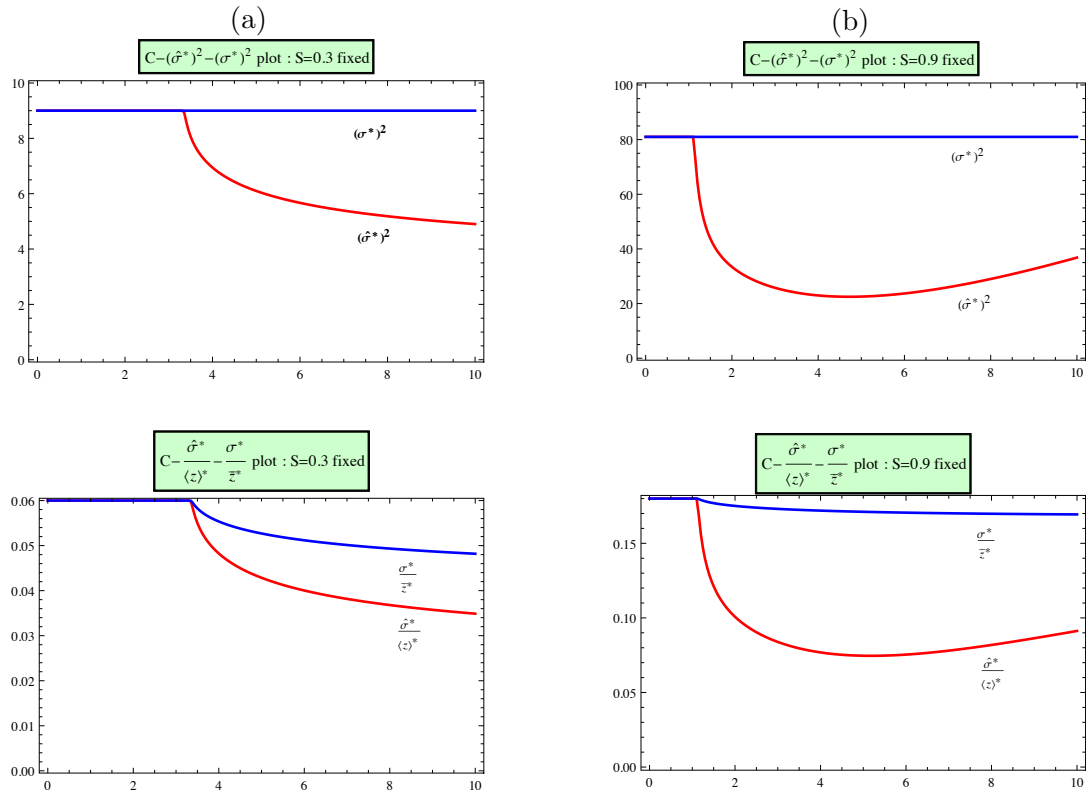


図 9: 合格者学力分散値の平衡値, 受験者学力分散値の平衡値, 合格者変動係数の平衡値, 受験者変動係数の平衡値, $(\hat{\sigma}^*)^2$, $(\sigma^*)^2$, $\hat{\sigma}^*/\langle z \rangle^*$, $\sigma^*/\bar{z}^*$ のパラメータ C 依存性。次の S の値による数値計算結果 : (a) $S = 0.3$; (b) $S = 0.9$ 。

なパラメータ値が現れ得る。受験者学力平均値の平衡値 $\bar{z}^*$ は、相対的に小さなある S の値に対して、必ず極大となる。一方、合格者学力平均値 $\langle z \rangle^*$ についての数値計算結果は、 S のある特別値における極大が表れるのは、 C の値が十分に大きな場合に限ることを示した（図 10(b)）。小さな C の値に対しては、 $\langle z \rangle^*$ の値は S と正の相関をもつのみである（図 10(a)）。

受験倍率の平衡値 p^* については、パラメータ S と正の相関をもつことが数値計算結果から示唆された（図 10）。

図 11 が示すように、 $\bar{z}^*$ と $\langle z \rangle^*$ の年次変動については、相関性が明らかであり、相互に密接な関係をもつことは明らかであるが、上記のとおり、 $\bar{z}^*$ と $\langle z \rangle^*$ の特性には明らかな違いが存在する。

3.8 考察

年次変動ダイナミクスモデル I の解析の結果では、受験倍率の隔年変動は現れず、平衡点に漸近していく振る舞いのみが示された。このモデル I の数理モデリングにおける仮定では「受験者の最も多くが集中する学力が前年度の学力平均値で決まる」ことのみが継年の受験状況の間の相関性を与えている。モデル I が表す動態の単純さは、この仮定の数理モデルへの導入の簡潔さが原因であると考えられる。モデル I では導入されなかった因子として、たとえば、受験生の意思決定に関する特性が、学力によって異なっている可能性がある。五十嵐（1999）は、偏差値レベルによって、大学受験への二極分化が起こっており、偏差値が 44.9 以下の大学では志願者数が減少し、偏差値が 55 以上の大学では逆に志願者数は増加する傾向にあることについて考察を行っている。また、内田ほか（2018）は、大学入試において、センター試験の自己採点と受験産業が示す大学・学部の難易度データが受験生の志望先の意思決定に強く関わる結果、受験倍率が平準化されることを述べている。

たとえば、本論文の数理モデルにおける、定数パラメータが継年的なダイナミクスへの依存性をもつ仮定が導入されるならば、隔年変動の出現の可能性について理論的に考察できる数理モデルが構築できるかもしれない。

年次変動ダイナミクスモデル I の解析から、受験者における学力範囲が中庸な場合に、受験者学力平均値の平衡値が最も大きくなる性質が得られた。受験者における学力範囲が広すぎても狭すぎても、受験者学力平均値の平衡値は、その最大値よりは小さい。この結果から、たとえば、受験者の過剰な呼び込みによる受験倍率の上乗せは、受験者学力平均値を下げ、必ずしも、合格者学力平均値を高くしないことが示唆される。

また、年次変動ダイナミクスモデル I の解析結果は、受験者学力平均値の平衡値が最大になる状況と合格者学力平均値の平衡値が最大になる条件が一致しないことを示した。学校教育の質を高める上では、合格者学力平均値が高い方が望ましいという見地に立てば、それを実現する上で、受験者学力平均値をより高くすることが、必ずしも適切な選択肢と言えない可能性を示唆している。

以上の考察は、年次変動ダイナミクスモデル I の解析結果に基づくものであるが、このモデル I では受験生の合否が受験時の学力のみで定まっており、入学試験の成績も加味された合否判定とはみなせない。つまり、学力は高いが入学試験で失敗して不合格になる可能性や、学力は高くないが

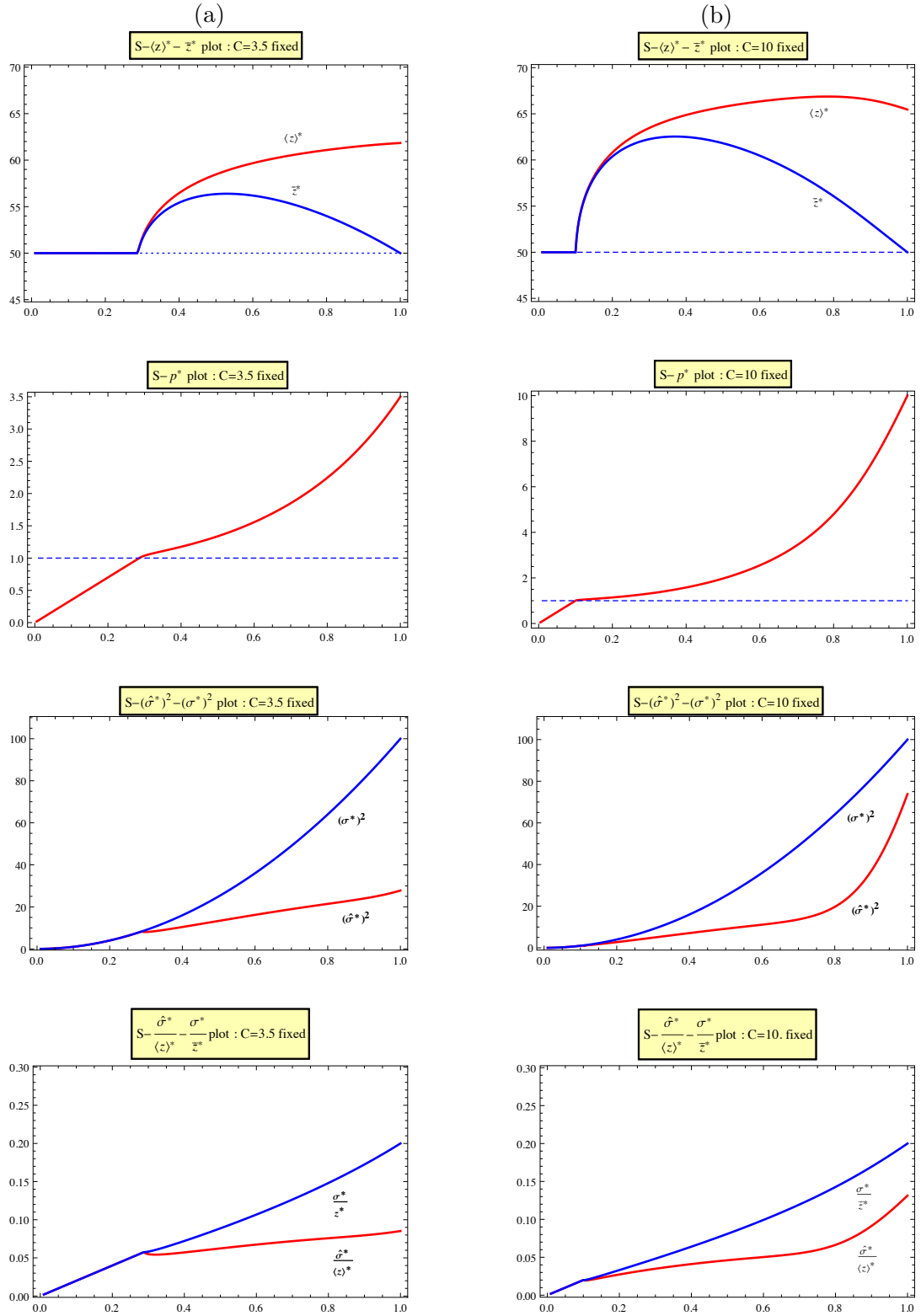


図 10: 合格者学力平均値の平衡値, 受験者学力平均値の平衡値, 受験倍率の平衡値, 合格者学力分散値の平衡値, 受験者学力分散値の平衡値, 合格者変動係数の平衡値, 受験者変動係数の平衡値, $\langle z \rangle^*$, $\bar{z}^*$, p^* , $(\hat{\sigma}^*)^2$, $(\sigma^*)^2$, $\hat{\sigma}^*/\langle z \rangle^*$, $\sigma^*/\bar{z}^*$ のパラメータ S 依存性。次の C の値による数値計算結果 : (a) $C = 3.5$; (b) $C = 10.0$ 。

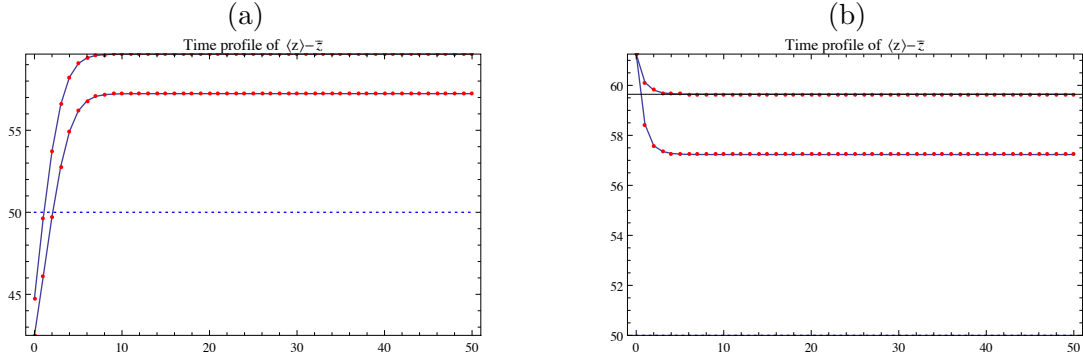


図 11: 年次変動ダイナミクス I の $\langle z \rangle_t$ と $\bar{z}_t$ の年次変動。(a) $(S, C) = (0.5, 4.0)$, $m_0 = 40$, $\langle z \rangle_0 = 44.8$, $\bar{z}_0 = 42.5$; (b) $(S, C) = (0.5, 4.0)$, $m_0 = 65$, $\langle z \rangle_0 = 61.3$, $\bar{z}_0 = 61.3$ 。

入学試験で努力が実って合格する可能性といった、合否に関する不確定な因子については考慮されていない。本論文 3.6 節では、そのような因子の影響を導入した基礎モデルとして、年次変動ダイナミクスモデル II を構築した。その解析については今後の課題であり、モデル I とモデル II の特性の違いを数理的に検討することにより、隔年変動の出現可能性も含めて、受験倍率の年次変動の特性についての考察についてもさらに進めることができると期待できる。

年次変動ダイナミクスモデル I について、本論文で定数とおいたパラメータ s を、前年度の合格者の学力平均値 $\langle z \rangle_{t-1}$ に依存して年次変動する値として、

$$s_t := s_{50} \exp[-\gamma(\langle z \rangle_{t-1} - 50)] \quad (84)$$

(s_{50} と γ は正値パラメータ) に置き換えると、図 12 に示すような、受験倍率 p_t の隔年現象が現れた。一方、一般的に非線形力学では、時間遅れの構造が入ると振動が起こりやすいことが知られており、たとえば、ある年の受験生の意思決定に、前年度卒業生の進学実績が影響を及ぼす場合を仮定すれば、受験倍率が単調にある値に収束する振る舞いだけではなく、周期解や、カオス変動などのより複雑な振る舞いが現れるかもしれない。

謝辞

本研究を遂行し学位論文をまとめるにあたり、お世話になった方々にこの場を借りてお礼申し上げます。瀬野裕美教授には、ご迷惑をおかけしたことも多々あったことと思いますが、この 2 年間の研究室生活全般でお世話になりました。なかなか研究が進まない自分を叱咤激励して終始適切な助言をくださり、学術的な文章の書き方の基本に至るまで本研究のすべての部分をご指導いただきました。ご指導を通じて、学問の厳しさ、数理生物学の奥深さを感じることができました。また、自分自身の至らなさを実感できたことは今後の努力の糧になるものであります。奈良坂須美恵さん、狩野千里さんを始めとした秘書さん方のおかげで、学生が大学院生活を快適に過ごすことができました。Emmanuel J. Dansu さん、Elza F. Sofia さん、Ishfaq Ahmad さん、Victor P. Schneider さん、謝 穎さん、David S. Högborg さんたち国際色豊かで優秀な瀬野研究室のメン

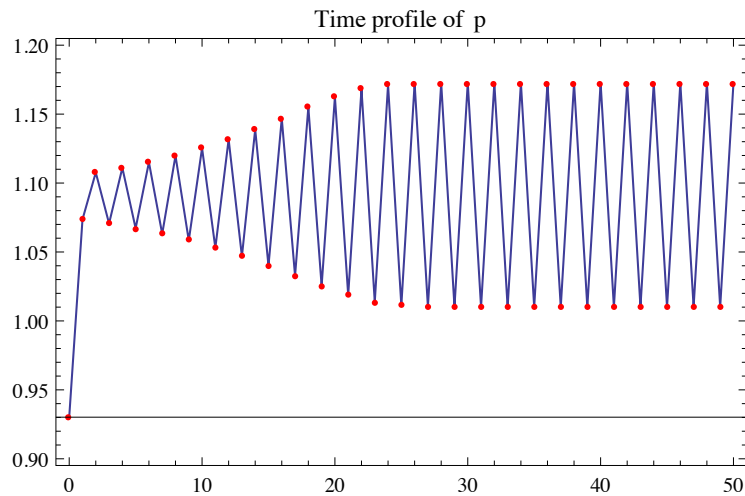


図 12: パラメータ s を式 (84) による s_t に置き換えた年次変動ダイナミクスモデル I による p_t の年次変動のある数値計算。 $(s_{50}, \gamma, C) = (20.0, 0.4, 4.0)$, $m_0 = 55$ 。

バーのおかげで、様々な意見を聞き学問的な刺激を受けたりするなど、日本にしながら非常に貴重な体験をさせていただきました。また、素晴らしい同期や後輩・先輩方にも恵まれ、充実した大学院生活を送ることができました。振り返ってみると、多くの方々の支えがあったからこそ、今の自分があるのだと心から思います。本当にありがとうございました。最後に、今まで育てどんなときでも支えてくれた家族に感謝いたします。

参考文献

- [1] 荒牧草平, 2002. 現代高校生の学習意欲と進路希望の形成— 出身階層と価値志向の効果に注目して —. 教育社会学研究, **71**: 5–23.
- [2] 藤原翔, 2012. 高校選択における相対的リスク回避仮説と学歴下降回避説の検証. 教育社会学研究, **91**: 29–49.
- [3] Granovetter, M., 1978. Threshold Models of Collective Behavior. *American Journal of Sociology*, **83**(6): 1420–1443.
- [4] 五十嵐直子, 1999. 大学志願決定要因の計量分析, 立命館経済学, **47**(6): 32–44.
- [5] 井上敏憲, 2011. 愛媛大学一般入試における志願者数変動の背景に関する一考察— 合格可能性を重視する受験生とそれを支える受験産業 —. 大学教育実践ジャーナル, **9**: 51–57.
- [6] 石井健一, 2003. 情報化の普及過程, 学文社, 東京.
- [7] Kaplan, D. and Glass, L., 1995. *Understanding Nonlinear Dynamics*, Springer, New York.
- [8] 小泉壮一郎, 2015. 読む中学進学 — 受験者数と偏差値の関係 —. 森上教育研究所.
- [9] 今野良祐, 2017. 埼玉県における高校進学動態の教育地理学的分析. 筑波大学付属坂戸高等学校研究部研究紀要, **54**: 51–60.

- [10] 倉元直樹, 2013. 志願動向の隔年現象抽出の試み— 時系列データ解析の適用 —. 大学入試研究ジャーナル, **23**: 37–43.
- [11] 総務省, 2019. 情報通信機器の保有状況 :
<https://www.soumu.go.jp/johotsusintokei/whitepaper/ja/h30/html/nd252110.html>
- [12] 友知政樹, 2019. 社会心理 なぜ流行が起こるのか — いき値, 小林 他 (編), 社会学入門 — 社会をモデルでよむ —, 第 6 章, pp.51–59, 朝倉書店, 東京.
- [13] 内田照久, 鈴木規夫, 橋本貴充, 荒井克弘, 2018. センター試験における大学合格率の停滞現象 — 自己採点による出願先の主体的選択が生み出す受験者の分散配置 —. 日本テキスト学会誌, **14**(1): 17–30.
- [14] Yamaguti, M., 1994. Discrete Models in Social Sciences. *Computer Math. Applic.*, **28**(10–12): 263–267.

付録 A 年次変動ダイナミクスモデル II の合格率の数理モデリング

γ を正定数として, 関数 $h_t(\mu) := 1 - \mu^{n_t} + \gamma \ln \mu$ を考える. μ についての方程式 $h_t(\mu) = 0$ の正の実根は, $\gamma < n_t$ ならば, 1 より小さな唯一の正值と 1 のみ, $\gamma = n_t$ ならば, 1 のみ, $\gamma > n_t$ ならば, 1 より大きな唯一の正值と 1 のみ (1 より小さな根は存在しない) であることを容易に示すことができる. したがって, $p_t > 1$ のとき, 方程式 $h_t(\mu)|_{\gamma=K_A} = 0$ の最も小さな正の実根を θ_t として定めれば条件 (69) を満たすような方程式 (72) の根が得られる. なぜならば, 方程式 $h_t(\theta_t)|_{\gamma=K_A} = 0$ は, 方程式 (72) と同等だからである. 併せて, 方程式 $h_t(\mu)|_{\gamma=n_t} = 0$ の最も小さな正の実根が 1 であることも示されたことから, 式 (72) において K_A を n_t に置き換えた方程式を満たす θ_t は 1 である. 以上の議論から, 方程式 (73) の最も小さな正の実根を θ_t として, 合格率 (67) を定めればよいという結果が得られる.

付録 B 年次変動ダイナミクスモデル II における $\langle z \rangle_t$ の有界性

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} z q_t(z) \phi_t(z) f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot 1 \cdot \phi_t(z) f(z) dz \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |z \phi_t(z) f(z)| dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |z| \phi_t(z) f(z) dz \\
&= \frac{\varphi \sqrt{2\pi}}{10} \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)} \right] G \left(\frac{z - \bar{z}_t}{10S} \right) dz \\
&= \frac{\varphi}{10} \exp \left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} |z| G \left(\frac{z - \bar{z}_t}{10S} \right) dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(x = \frac{z - \bar{z}_t}{10S} \text{とおく} \right) \\
&= \varphi S \exp \left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} |10Sx + \bar{z}_t| G(x) dx \\
&\leq \varphi S \exp \left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} (10S|x| + |\bar{z}_t|) G(x) dx \\
&= \varphi S \exp \left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)} \right] \left(10S \int_{-\infty}^{\infty} |x| G(x) dx + |\bar{z}_t| \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx \right) \\
&= \varphi S \exp \left[-\frac{(\langle z \rangle_{t-1} - 50)^2}{2(10^2 + s^2)} \right] \left(10S \frac{2}{\sqrt{2\pi}} + |\bar{z}_t| \cdot 1 \right) < \infty
\end{aligned}$$

付録 C 定理 3.4 の証明

系 (62) により, $\langle z \rangle_t$ の年次変動ダイナミクスを与えるリターンマップ $\mathcal{F}$ は, 次のように定義されている:

$$\mathcal{F}(x) := \begin{cases} (1 - S^2)x + 50S^2 & (\mathcal{P}(x) \leq 1) \\ \frac{10S}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P}(x) \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(\mathcal{P}(x) - 1)\}^2 \right] + (1 - S^2)x + 50S^2 & (\mathcal{P}(x) > 1) \end{cases}$$

ただし,

$$\mathcal{P}(x) := CS \exp \left[-\frac{1 - S^2}{S} \left(\frac{x - 50}{10} \right)^2 \right] \quad (85)$$

である。 $\mathcal{D} := \{x | \mathcal{P}(x) > 1\}$ とすると, $\mathcal{D}$ が空でないためには, $CS > 1$ であることが必要条件となる。

今, $CS > 1$ の場合についてのみ考えると, $\mathcal{D}$ は, 以下で定義される x_s^* と x_s^{**} による开区間 (x_s^*, x_s^{**}) と同値である:

$$x_s^* = 50 - 10\sqrt{\frac{\ln CS}{1 - S^2}}; \quad x_s^{**} = 50 + 10\sqrt{\frac{\ln CS}{1 - S^2}}$$

すなわち,

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} x + S^2(50 - x) & (x \leq x_s^* \text{ or } x \geq x_s^{**}) \\ \frac{10S}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P}(x) \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(\mathcal{P}(x) - 1)\}^2 \right] + (1 - S^2)x + 50S^2 & (x_s^* < x < x_s^{**}) \end{cases}$$

と表すことができる。また, $\mathcal{F}(x)$ が $\mathbb{R}$ 上連続であることも容易に示すことができる。

すると, $x \leq x_s^*$ に対しては, $x < 50$ であるから, $\mathcal{F}(x) > x$ が成り立ち, $x \geq x_s^{**}$ に対しては, $x < 50$ であるから, $\mathcal{F}(x) < x$ が成り立つ。よって, $x \leq x_s^*$ または $x > x_s^{**}$ において $\mathcal{F}(x) = x$ は成立しない。このことは, 補題 3.2 の内容と同等のものを示すものである。さらに, $\mathcal{F}(x)$ の連続性により, 区間 (x_s^*, x_s^{**}) に $\mathcal{F}(x) = x$ を満たす点が存在することを示している。

付録 D $\langle z \rangle^*$ の極大値の存在性の証明

$CS > 1$ のとき ($0 < S < 1$ により $C > 1$), 系 (82) により以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} \langle z \rangle^* &= \frac{10}{\sqrt{2\pi}} \frac{p^*}{S} \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] + 50 \\ p^* &= CS \exp \left[-\frac{1-S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (86)$$

ここで, 系 (86) の第 1 式を S で偏微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle z \rangle^*}{\partial S} &= \frac{10}{\sqrt{2\pi}} C \left(S \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 - \frac{1-S^2}{10} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right) \frac{\partial \langle z \rangle^*}{\partial S} \right) \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] \\ &+ \frac{10}{\sqrt{2\pi}} C \exp \left[-\frac{1-S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 \right] \left(-\frac{\pi}{8} \right) \frac{\ln(p^* - 1)}{p^* - 1} \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] \frac{\partial p^*}{\partial S} \end{aligned} \quad (87)$$

さらに第 2 式も同様に,

$$\frac{\partial p^*}{\partial S} = C \exp \left[-\frac{1-S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 \right] \left\{ 1 + S \left(S \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 - \frac{1-S^2}{10} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right) \frac{\partial \langle z \rangle^*}{\partial S} \right) \right\} \quad (88)$$

となる。

式 (87), (88) を用いると以下のことが求まる。

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 1/C+0} \frac{\partial \langle z \rangle^*}{\partial S} &= \lim_{S \rightarrow 1/C+0} \frac{\frac{10}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] \left(-\frac{C\pi}{8} \frac{\ln(p^* - 1)}{p^* - 1} \right)}{\frac{10}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] \frac{C^2 - 1}{C^2} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right) \left(1 - \frac{\pi}{8} \frac{\ln(p^* - 1)}{p^* - 1} \right) + 1} > \infty \end{aligned} \quad (89)$$

同様に, 式 (87), (88) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle z \rangle^*}{\partial S} &= \frac{\frac{10C}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] \left(1 - \frac{C\pi}{8} \frac{\ln(p^* - 1)}{p^* - 1} \right) + \frac{10C^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{-\pi}{8} \frac{\ln(p^* - 1)}{p^* - 1} \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right]}{\frac{10C}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] \frac{1-S^2}{10} \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right) \left(1 - \frac{C\pi}{8} \frac{\ln(p^* - 1)}{p^* - 1} \right) + 1} \end{aligned}$$

なので,

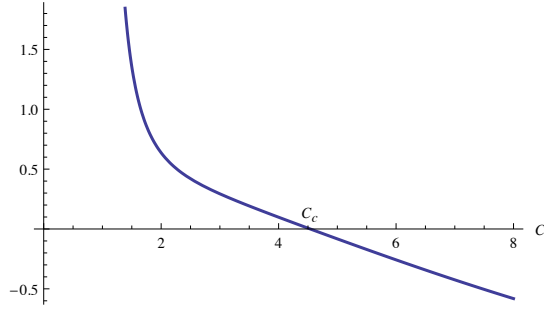


図 13: 式 (92) の右辺の明らかに正である部分以外の式 $\mathcal{F}(C)$ 。

$$\lim_{S \rightarrow 1-0} \frac{\partial \langle z \rangle^*}{\partial S} = \lim_{S \rightarrow 1-0} \frac{10}{\sqrt{2\pi}} C \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(p^* - 1)\}^2 \right] \left\{ \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 - \frac{C\pi \ln(p^* - 1)}{8(p^* - 1)} \left(1 + \left(\frac{\langle z \rangle^* - 50}{10} \right)^2 \right) \right\} \quad (90)$$

となる。系 (86) により $S \rightarrow 1 - 0$ のとき

$$\begin{cases} \langle z \rangle^* \rightarrow \frac{10}{\sqrt{2\pi}} C \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(C - 1)\}^2 \right] + 50 \\ p^* \rightarrow C \end{cases} \quad (91)$$

なので,

$$\Xi(C) := \exp \left[-\frac{\pi}{16} \{\ln(C - 1)\}^2 \right]$$

とすると

$$\lim_{S \rightarrow 1-0} \frac{\partial \langle z \rangle^*}{\partial S} = \lim_{S \rightarrow 1-0} \frac{10}{\sqrt{2\pi}} C \Xi(C) \left\{ \frac{C^2}{2\pi} \Xi(C)^2 - \frac{C\pi \ln(C - 1)}{8(C - 1)} \left(1 + \frac{C^2}{2\pi} \Xi(C)^2 \right) \right\} \quad (92)$$

となる。

式 (92) の右辺の明らかに正である部分以外を

$$\mathcal{F}(C) := \frac{C^2}{2\pi} \Xi(C)^2 - \frac{C\pi \ln(C - 1)}{8(C - 1)} \left(1 + \frac{C^2}{2\pi} \Xi(C)^2 \right) \quad (93)$$

と定義し、図 (13) で表される。

よって、あるしきい値 $C_c = 4.538$ が存在し、 $C > C_c$ のときに式 (92) は負になる。以上のことから、 $C > C_c$ のときに $\langle z \rangle^*$ は極大値をもつことが示された。