BAYERISCHE JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Fakultät für Mathematik und Informatik

Konkave Funktionen der geometrischen Funktionentheorie

Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Mathematikers
(Dipl.-Math.)

vorgelegt von: Rintaro Ono
geboren am 21. Januar 1984
in Tokyo (Japan)

Würzburg 2011

Institut für Mathematik - Lehrstuhl IV
Prof. Dr. St. Ruscheweyh

Betreuer: Prof. Dr. St. Ruscheweyh
Erstgutachter: Prof. Dr. St. Ruscheweyh
Zweitgutachter:
Eingereicht am: 17. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Laufe des letzten Jahrhunderts wurden im Bereich der geometrischen Funktionentheorie viele interessante Thesen bewiesen, die sich mit holomorphen Funktionen befassen, welche den Einheitskreis auf konvexe Gebiete abbilden. Verständlicherweise liefert ihr Pendant, Funktionen deren Bildgebiet konkav - also das Komplement konvex - ist, dabei nicht minder faszinierende Aussagen.

In den ersten Abhandlungen von A.W. Goodman 1956 in [10] und dann u.a. von J. Miller 1970 in [13], bzw. 1980 in [14] wurden Aussage bewiesen, die direkt aus der Konkavität gefolgert wurden. Die Betrachtung wurde 1994 von Livingston in [12] fortgeführt, wobei es zum ersten Mal zu einer analytischen Charakterisierung konkaver Funktionen kam, die einen Pol im Einheitskreis besitzen. Diese erwies sich insofern als hilfreich, als dass der Schwerpunkt auf Koeffizientenabschätzungen der Abbildungen in Abhängigkeit von der Polstelle gelegt wurde. Die Funktionen wurden dabei wahlweise um den Ursprung oder um ihre Polstelle entwickelt.

Die Theorie wurde in den Jahren 2002 bis 2007 von F.G. Avkhadiev und K.-J. Wirths in [1], [3], [4] und [19] erweitert. Neben diversen Abschätzungen von Koeffizienten konkaver Funktionen, die teilweise auf Vermutungen von Livingston zurückzuführen sind, erfolgten auch generelle Aussagen, die für weiterführende Betrachtungen eine zentrale Rolle spielen.

In der vorliegenden Arbeit erfolgt nun eine Zusammenstellung der wichtigsten Aussagen über konkave Funktionen und eine detaillierte Ausarbeitung der Beweise.

Im ersten Kapitel werden zunächst die analytischen Charakterisierungen näher ins Auge gefasst. Diese bilden in den Abhandlungen die theoretische Grundlage, lassen sich jedoch in geschlossener Form in der Literatur nicht direkt auffinden. Gleichzeitig erfolgt ein Vergleich mit den konvexen Funktionen, die aus geometrischen Gründen mit den konkaven Funktionen eng verbunden sind. Die Theorie der Winkelableitungen und pseudo-hyperbolischen Kreise dient dabei als Hilfsmittel.

Das zweite Kapitel behandelt Koeffizientenabschätzungen konkaver Funktionen, die eine Entwicklung um den Ursprung besitzen. Von entscheidendem Interesse ist hier der Zusammenhang zwischen der Polstelle $p \in]0;1[$ der Funktion und dem maximalen, bzw. minimalen Wert eines Koeffizienten. Für die Beweise wird kurz auf die Theorie der Quasi-Subordination und der Hardy-Räume eingegangen.

Als Alternative zur Taylorreihenentwicklung um den Ursprung bietet sich die Laurententwicklung der Funktion um den Pol. Diese Betrachtung erfolgt im dritten Kapitel. Hierbei interessiert man sich wieder für die Abhängigkeit Koeffizienten konkaver Funktionen von der Polstelle.

Herrn Prof. Dr. St. Ruscheweyh danke ich ganz herzlich für die geduldige Betreuung dieser Arbeit und die Anregung dieses Themengebietes. Bei Herrn Prof. Dr. K.-J. Wirths möchte ich mich für die freundlichen Hinweise auf seine Veröffentlichungen bedanken. Nicht zuletzt geht mein Dank an Johannes Krantz, Stefan Liebler, Jochen Meyer und Martin Sonntag für ihre Freundschaft, auf die man sich immer verlassen konnte.

Notationen

In dieser Arbeit werden die folgenden Notationen verwendet.

Symbol	Erläuterung
$\mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z\rvert < 1\}$; offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$
$\mathbb{D}_r$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z\rvert < r\}$; offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Radius $r \in]0, \infty]$
$\overline{\mathbb{D}}$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z\rvert \leq 1\}$; abgeschlossene Einheitskreisscheibe
Δ	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z\rvert > 1\}$; Äußeres des Einheitskreises
Ω	ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$
$\mathcal{H}(\Omega)$	$\{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ holomorph in $\Omega\}$; Menge der holomorphen Funktionen in einem Gebiet Ω
$\mathcal{H}_0(\Omega)$	$\{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ holomorph in Ω, $f(0) = 1\}$; Menge der normierten, holomorphen Funktionen in einem Gebiet Ω
$\mathcal{S}$	$\{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f$ schlicht, $f(0) = 0, f'(0) = 1\}$; Menge der normierten schlichten Funktionen in $\mathbb{D}$
$\mathcal{S}_p$	$\{f : \mathbb{D} \to \hat{\mathbb{C}} \mid f$ normiert und schlicht, $p = f^{-1}(\infty)\}$; Menge der normierten schlichten Funktionen mit einfachem Pol in $p \in]0; 1[$
$\mathcal{P}$	$\{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, Re $f(z) > 0$ und $f(0) = 1\}$; normierte Funktionen mit positivem Realteil
$\mathcal{C}$	$\{f \in \mathcal{S} \mid f(\mathbb{D})$ ist konvex$\}$; Klasse der konvexen Funktionen
$\mathcal{S}^*$	$\{f \in \mathcal{S} \mid f(\mathbb{D})$ ist sternförmig$\}$; Klasse der sternförmigen Funktionen bzgl. $z = 0$
$\mathcal{C}o(\Omega)$	$\{f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}} \mid \hat{\mathbb{C}}\backslash f(\Omega)$ konvex$\}$; Klasse der konkaven Funktionen
$\mathcal{C}o_\Delta$	$\{f : \Delta \to \hat{\mathbb{C}} \mid \hat{\mathbb{C}}\backslash f(\Delta)$ konvex$\}$; Klasse der in Δ konkaven Funktionen
$\mathcal{C}o_p$	$\{f : \mathbb{D} \to \hat{\mathbb{C}} \mid p := f^{-1}(\infty) \in [0; 1[$ Polstelle, f schlicht in $\mathbb{D}\backslash\{p\}$ und $\hat{\mathbb{C}}\backslash f(\Delta)$ konvex$\}$; Klasse der in $\mathbb{D}$ konkaven Funktionen mit einfachem Pol in p
$a_n(f)$	n-ter Koeffizient der MacLaurin-Entwicklung einer Funktion f
$d(p, q)$	pseudo-hyperbolischer Abstand zweier Punkte im Einheitskreis
$\mathfrak{K}(p, r)$	$\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, p) < r\}$; pseudo-hyperbolischer Kreis mit Mittelpunkt $p \in \mathbb{D}$ und pseudo-Radius $r \in]0; 1[$
$\mathfrak{H}(\omega, \lambda)$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert 1 - \bar{z}\omega\rvert^2 < \lambda(1 - \lvert z\rvert^2)\}$; Kreis mit $\omega \in \partial\mathbb{D}$ als Tangentialpunkt
$f \prec_q g$	Quasi-subordination der Funktionen f zu g
H^p	$\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \mid \sup_{r\in]0;1[} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lvert f(re^{i\vartheta})\rvert^p d\vartheta\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, $0 < p \leq \infty\}$; Hardy-Raum

1 Grundlegende Eigenschaften konvexer und konkaver Funktionen

In diesem Kapitel werden grundlegenden Eigenschaften konkaver Funktionen behandelt. Dazu betrachtet man zunächst bekannte Aussagen über konvexe Funktionen, die im Anschluss auf den konkaven Fall übertragen werden. Hierbei werden u.a. auch Eigenschaften der sternförmigen Funktionen betrachtet, die für den weiteren Verlauf nützliche Eigenschaften liefern.

1.1 Konvexe Funktionen

Zunächst werden einige Mengen von Funktionen definiert, die für die folgenden Erörterungen grundlegend sind.

Definition 1.1. *Eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ liegt in der Klasse der in $\mathbb{D}$ normierten, schlichten Funktionen $\mathcal{S}$, wenn f injektiv, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist.*

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \text{ schlicht}, f(0) = 0, f'(0) = 1\}$$

Desweiteren beschreibt $\mathcal{P}$ die Menge der normierten, holomorphen Funktionen mit positivem Realteil.

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \operatorname{Re} f(z) > 0 \text{ und } f(0) = 1\}$$

Mit diesen Notationen kann eine *konvexe* Funktion folgendermaßen definiert werden.

Definition 1.2. *Eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ heißt genau dann konvex, wenn das Gebiet $f(\mathbb{D})$ konvex ist. Man schreibt*

$$\mathcal{C} := \{f \in \mathcal{S} \mid f(\mathbb{D}) \text{ ist konvex}\}.$$

Aus dieser geometrischen Definition ergibt sich die folgende analytische Charakterisierung, die auch als alternative Definition verwendet werden kann.

Satz 1.3. *Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn gilt*

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.1}$$

Also

$$f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}.$$

Beweis: (siehe auch [8])
Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

1. Sei zunächst $f \in \mathcal{C}$ und $0 < r < 1$. Es wird gezeigt, dass dann auch $f(\mathbb{D}_r)$ konvex ist. Es seien $f(z_1), f(z_2) \in f(\mathbb{D}_r)$ gegeben, wobei o.E. $|z_1| \leq |z_2| \neq 0$ gelte. Dann ist

$$g(z) := tf\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + (1-t)f(z)$$

eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion für ein festes $t \in [0;1]$ und es gilt aufgrund der Konvexität von $f(\mathbb{D})$

$$g(\mathbb{D}) \subseteq f(\mathbb{D}).$$

Da weiterhin $f(0) = g(0)$ gilt, ergibt sich $g \prec f$ (siehe z.B. [8], Kap.6) und es folgt mit dem Subordinationsprinzip

$$g(\mathbb{D}_r) \subseteq f(\mathbb{D}_r).$$

Insbesondere ist dann

$$tf(z_1) + (1-t)f(z_2) = g(z_2) \in f(\mathbb{D}_r),\ t \in [0;1].$$

Anschaulich bedeutet dies, dass jede Verbindungsgerade zweier Punkte in $f(\mathbb{D}_r)$ wiederum in $f(\mathbb{D}_r)$ enthalten ist. Also ist $f(\mathbb{D}_r)$ konvex.

2. Bezeichne $\Gamma_r := f(\partial\mathbb{D}_r)$, so ist wegen der Konvexität das Argument der Tangente an Γ_r monoton wachsend, wenn die Kurve im positiven Sinne durchlaufen wird. Analytisch bedeutet dies:
Sei $0 < r < 1$, $\nu(\phi) := f(re^{i\phi})$ und somit $\nu'(\phi) = ire^{i\phi}f'(re^{i\phi})$. Dann folgt aus $f \in \mathcal{C}$

$$\frac{d}{d\phi}\arg\nu'(\phi) \geq 0 \tag{1.2}$$

3. Sei nun f konvex und $0 < r < 1$. Dann ist nach Teil 1 auch $f(\mathbb{D}_r)$ konvex und es gilt nach

(1.2):

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{d}{d\phi}\arg \nu'(\phi) \\
&= \frac{d}{d\phi}\arg\left(ire^{i\phi}f'(re^{i\phi})\right) \\
&= \frac{d}{d\phi}\mathrm{Im}\,\log\left(ire^{i\phi}f'(re^{i\phi})\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(i+\frac{d}{d\phi}\log\left(f'(re^{i\phi})\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(1+\mathrm{Im}\frac{ire^{i\phi}f''(re^{i\phi})}{f'(re^{i\phi})}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(1+\frac{re^{i\phi}f''(re^{i\phi})}{f'(re^{i\phi})}\right)
\end{aligned}
$$

Dann muss sogar für alle $z \in \mathbb{D}$ gelten:

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0.$$

4. Es gelte umgekehrt, dass f holomorph in $\mathbb{D}$ ist und für alle $0 < r < 1$ und alle $0 \leq \phi < 2\pi$

$$\frac{d}{d\phi}\arg \nu'(\phi) \geq 0 \text{ gilt.}$$

Dann folgt mit der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

$$
\begin{aligned}
\arg \nu'(2\pi) - \arg \nu'(0) &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\phi}\arg \nu'(\phi)d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(1+\frac{re^{i\phi}f''(re^{i\phi})}{f'(re^{i\phi})}\right)d\phi = 2\pi
\end{aligned}
$$

Also bildet f die Kreislinie mit $|z| = r$ injektiv auf die Kurve Γ_r ab. Somit ist $f|_{\mathbb{D}_r}$ injektiv und $f(\mathbb{D}_r)$ konvex. Demzufolge ist f schlicht und $f(\mathbb{D})$ konvex.

□

Für die Klasse $\mathcal{S}^*$ der in $\mathbb{D}$ sternförmigen Funktionen bzgl. $z = 0$ kann eine zu Satz 1.3 analoge Aussage bewiesen werden.

Korollar 1.4. *Eine Funktion g ist genau dann sternförmig in $\mathbb{D}$, wenn gilt*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0. \tag{1.3}$$

Also

$$f \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zg'(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}$$

Ein Beweis findet sich z.B. in [8] und verläuft mit ähnlicher Argumentation wie der Beweis zu Satz 1.3.
Den Zusammenhang sternförmiger mit konvexen Funktionen beschreibt der folgende *Satz von Alexander*.

Satz 1.5. *Eine Funktion f ist genau dann konvex, wenn $g = zf'$ sternförmig ist.*

Beweis: (siehe auch [8])
Es gilt

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)} = \frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}, \tag{1.4}$$

Mit Hilfe von Gleichung 1.1 bzw. 1.3 folgt die Aussage. □

Für weitere Überlegungen wird das nächste Lemma benötigt, das Funktionen der Klasse $\mathcal{P}$ genauer beschreibt.

Lemma 1.6. *(Carathéodory, 1911)*
Es sei $P(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \in \mathcal{P}$ gegeben. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|p_k| \leq 2 \tag{1.5}$$

Beweis: (siehe auch [8])
Zunächst betrachtet man mit $k_0 \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$q(z) = \frac{1}{k_0} \sum_{l=1}^{k_0} P\left(e^{\frac{2\pi i l}{k_0}} z\right).$$

Da die Eigenschaften von P erhalten bleiben, ist $q \in \mathcal{P}$ und es folgt

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{1}{k_0} \sum_{l=1}^{k_0} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(e^{\frac{2\pi i l}{k_0}} z\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(\sum_{l=1}^{k_0} \frac{1}{k_0} e^{\frac{2\pi i l k}{k_0}}\right) z^k. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{l=1}^{k_0} \frac{1}{k_0} e^{\frac{2\pi i l k}{k_0}} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \nmid k_0 \\ 1 & \text{für } k \mid k_0 \end{cases},$$

womit folgt

$$q(z) = 1 + p_{k_0} z^{k_0} + p_{2k_0} z^{2k_0} + \ldots.$$

Die Funktion

$$z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$$

bildet die rechte Halbebene schlicht auf den Einheitskreis ab, sodass die Abbildung

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{1-q(z)}{1+q(z)} \\ &= \frac{-p_{k_0}z^{k_0} - p_{2k_0}z^{2k_0} - \ldots}{2\left(1+\frac{p_{k_0}}{2}z^{k_0}+\ldots\right)} \\ &= -\frac{p_{k_0}}{2}z^{k_0} - \ldots \end{aligned}$$

von der Form $Q : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist. Mit der Abschätzungsformel von Cauchy folgt daher

$$\left|-\frac{p_{k_0}}{2}\right| \leq 1$$

für alle $k_0 \in \mathbb{N}$, also die Behauptung. □

Bemerkung 1.7. Wie man an dem Beispiel

$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathcal{P}$$

erkennen kann, ist die Abschätzung scharf.

Mit Hilfe des Lemmas 1.6 kann nun der folgende Satz bewiesen werden.

Satz 1.8. *Sei $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C}$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$|a_n| \leq 1. \tag{1.6}$$

Beweis: (siehe auch [8])
Es sei $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{C}$ und mit Hinblick auf Satz 1.5

$$g(z) := zf'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k \in \mathcal{S}^*.$$

Dann gelten offensichtlich die Gleichungen (1.1) bzw. (1.3), womit es eine Funktion $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \in \mathcal{P}$ gibt, so dass

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0$$

gilt. Setzt man $b_k := k a_k$, so erhält man

$$zg'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k z^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\right).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$nb_n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k b_{n-k} = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k b_{n-k}.$$

Nach dem Lemma 1.6 von Carathéodory gilt nun $|p_k| \leq 2$, womit induktiv $|b_n| \leq n$ und aus der Definition von b_k die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 1.9. Anhand der Funktion $\frac{z}{1-z} \in \mathcal{C}$ erkennt man, dass die in Satz 1.8 bewiesene Abschätzung scharf ist.

1.2 Konkave Funktionen

Im folgenden werden Funktionen behandelt, die im Allgemeinen als *konkav* bezeichnet werden.

Definition 1.10. *Eine schlichte Funktion $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ heißt konkav, wenn das Komplement des Bildes $\hat{\mathbb{C}} \backslash f[\Omega]$ konvex ist. Man schreibt $f \in \mathcal{C}o(\Omega)$.*

Da sich je nach Ausgangsgebiet auch die analytische Eigenschaft der Funktionen ändert, unterscheidet man für die genauere Betrachtung zusätzlich in zwei Fälle.

Definition 1.11.

1. *Es bezeichne $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ das Äußere des Einheitskreises. Eine Funktion $f : \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$, $f(z) = z + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ heißt konkav in Δ, falls f schlicht in Δ und $f \in \mathcal{C}o(\Delta)$ ist. Dabei besitzt f einen einfachen Pol in ∞ und man schreibt $f \in \mathcal{C}o_\Delta$.*

2. *Es sei $p \in [0; 1[$. Dann bezeichnet $\mathcal{C}o_p$ die Klasse der konkaven Funktionen, die schlicht in $\mathbb{D} \backslash \{p\}$ sind und einen einfachen Pol bei p besitzen, d.h. $p = f^{-1}(\infty)$. Falls $p \in]0; 1[$ ist, bezeichnet man die schlichten Funktionen f, für die gilt $p = f^{-1}(\infty)$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ mit $\mathcal{S}_p$. Eine Funktion g liegt in der Klasse $\mathcal{S}_0$, wenn es eine Funktion $f \in \mathcal{S}_p$ gibt, so dass $g(z) = f(\frac{z+p}{1+pz})$ gilt. $\mathcal{S}_0$ ist die Klasse der schlichten Funktionen mit einfachem Pol im Ursprung.*

Bemerkung 1.12. Bei Definition 1.11.2 ist zu berücksichtigen, dass es Fälle gibt, in denen $p \neq 0$ gesetzt werden muss.

Für weitere Betrachtungen wird der folgende Hilfssatz benötigt.

Hilfssatz 1.13. *Es sei f eine schlichte Funktion, die Δ auf das Äußere einer Jordan-Kurve $\Gamma \subset \mathbb{C}$ abbildet. Die Kurve Γ ist genau dann analytisch, wenn f schlicht für $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z|\}$ mit $r < 1$ ist.*

Beweis: (siehe auch [16])
Zunächst sei Γ analytisch. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $\varphi : \{z \in \mathbb{C} \mid \rho < |z| < \frac{1}{\rho}\} \to \mathbb{C}$, mit $\rho < 1$, für die $\varphi(\partial\Delta) = \Gamma$ gilt. Weiterhin gibt es ein $r < 1$, so dass die Funktion

$h := \varphi^{-1} \circ f$ schlicht in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \frac{1}{r}\}$ ist und $1 < |h(z)| < \frac{1}{\rho}$ erfüllt.
Da $|h(z)| \to 1$ für $r \to 1$, also $|z| \to 1$ folgt, erhält man mit dem Spiegelungsprinzip, dass h zu einer holomorphen Funktion auf $r < |z| < \frac{1}{r}$ fortgesetzt werden kann, wobei $\rho < |h(z)| < \frac{1}{\rho}$ gilt. Somit ist $f = \varphi \circ h$ schlicht auf $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < \frac{1}{r}\}$, also für $|z| > r$. Die Umkehrung ist klar. □

In Analogie zu Satz 1.3 erfolgt nun eine analytische Charakterisierung konkaver Funktionen. Im Unterschied zum konvexen Fall betrachtet man dabei jedoch nicht die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ sondern ihr Äußeres Δ.

Satz 1.14. *Es sei $f : \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$, $f(z) = z + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}$ gegeben. Dann ist $f(z) \in \mathcal{C}o_\Delta$ genau dann, wenn gilt*

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ z \in \Delta. \tag{1.7}$$

Weiterhin folgt aus $f(z) \in \mathcal{C}o_\Delta$ für $z, \zeta \in \Delta$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} + \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) \geq 0. \tag{1.8}$$

Beweis: (siehe auch [15])
(a) Es sei $f(z) = z + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \in \mathcal{C}o_\Delta$. Dann gibt es ein konvexes Gebiet $G := \hat{\mathbb{C}} \backslash f(\Delta)$ und eine Kurve $\Gamma := \partial G$. Weiterhin existiert eine schlichte Funktion g, die $\mathbb{D}$ auf das Innere von Γ abbildet. Aufgrund der Voraussetzungen ist $g(\mathbb{D})$ konvex und die Kurven $\Gamma_k = \{g(z) \mid |z| = 1 - \frac{1}{k}\}$ mit $k = 2, 3, \ldots$ sind aufgrund der Eigenschaften von g konvex und analytisch (siehe Beweis zu Satz 1.3 Teil 1). Bezeichne nun f_k die Funktion, die Δ auf das Äußere von Γ_k so abbildet, dass $f_k(\infty) = \infty$ und $f_k'(\infty) > 0$ gilt. Dann wird nach Hilfssatz 1.13 jede Kurve Γ_k zusätzlich durch $f_k(e^{i\vartheta})$ mit $\vartheta \in [0; 2\pi[$ beschrieben.
Da Γ_k konvex ist, ist $\arg\left(f_k(e^{it}) - f_k(e^{i\vartheta})\right)$ mit $t \in]\vartheta; \vartheta + 2\pi[$ für feste ϑ streng monoton wachsend. Mit $z = e^{it} \neq \zeta = e^{i\vartheta}$ erhält man daraus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\arg\left(f_k(e^{it}) - f_k(e^{i\vartheta})\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\log\left(f_k(e^{it}) - f_k(e^{i\vartheta})\right) \\
&= \operatorname{Im}\frac{ie^{it}f_k'(e^{it})}{f_k(e^{it}) - f_k(e^{i\vartheta})} \\
&= \operatorname{Re}\frac{zf_k'(z)}{f_k(z) - f_k(\zeta)} \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Desweiteren gilt für gegebene z, ζ, ϑ und t

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\frac{\zeta + z}{\zeta - z} &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\vartheta} + e^{it}}{e^{i\vartheta} - e^{it}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1 + e^{i(t-\vartheta)}}{1 - e^{i(t-\vartheta)}}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Mit $f_k(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_k^{(n)}(z)}{n!}(\zeta - z)^n$ erhält man außerdem

$$\begin{aligned}
\frac{2zf_k'(z)}{f_k(z)-f_k(\zeta)} + \frac{\zeta+z}{\zeta-z} &= \frac{2zf_k'(z)}{f_k(z)-f_k(\zeta)} + \frac{2z}{\zeta-z} + 1 \\
&= 1 + z\frac{2\left(f_k'(z)(\zeta-z) + f_k(z) - f_k(\zeta)\right)}{(f_k(z)-f_k(\zeta))(\zeta-z)} \\
&= 1 + z\frac{-f_k''(z)(\zeta-z)^2 - 2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(z)}{n!}(\zeta-z)^n}{-f_k'(z)(\zeta-z)^2 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(z)}{n!}(\zeta-z)^{n+1}} \\
&= 1 + z\frac{f_k''(z) + 2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(z)}{n!}(\zeta-z)^{n-2}}{f_k'(z) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(z)}{n!}(\zeta-z)^{n-1}},
\end{aligned}$$

für $z, \zeta \in \overline{\Delta}$ und demnach im Grenzfall $\zeta \to z$

$$\lim_{\zeta\to z}\left(\frac{2zf_k'(z)}{f_k(z)-f_k(\zeta)} + \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) = 1 + \frac{zf_k''(z)}{f_k'(z)}.$$

Also gibt es bei $z = \zeta$ eine hebbare Singularität.
Weiterhin ist mit (1.9) und (1.10)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2zf_k'(z)}{f_k(z)-f_k(\zeta)} + \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) \geq 0$$

für alle $|z| = |\zeta| = 1$, wobei die Aussage für den Fall $z = \zeta$ aus der Stetigkeit folgt. Wendet man das Maximumprinzip zuerst auf $|z| > 1$ und dann auf $|\zeta| > 1$ an, so ergibt sich die Aussage für alle $z, \zeta \in \Delta$.
Da für $k \to \infty$ die konvexen Kurven Γ_k gegen Γ konvergieren, folgt mit dem Kernkonvergenzsatz von Carathéodory, dass f_k in Δ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Im Grenzfall folgen dann (1.7) und (1.8).
(b) Gelte nun umgekehrt (1.7) und $r > 1$. Dann folgt mit der gleichen Argumentation wie beim Beweis von Satz 1.3, Teil 4, dass die umgebende Kurve Γ konvex ist. Somit ist die Funktion f selbst konkav, wie behauptet. □

Bemerkung 1.15. Wie bei Korollar 1.4 im konvexen Fall, lassen sich auch hier Aussagen über Funktionen $g : \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$ treffen, die schlicht sind und deren Komplement $\hat{\mathbb{C}}\backslash g(\Delta)$ sternförmig bzgl. eines Punktes $c \in \hat{\mathbb{C}}\backslash g(\Delta)$ ist. Um Verwirrungen zu vermeiden, nennt man diese *komplement-sternförmig in* Δ *bzgl.* c. Da die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{1}{z}$ Geraden durch den Ursprung wiederum auf solche abbildet, bleibt die geometrische Eigenschaft der Sternförmigkeit erhalten und g ist genau dann komplement-sternförmig in Δ, wenn $\frac{1}{g(z^{-1})}$ sternförmig auf $\mathbb{D}$ ist. Es folgt für $z \in \Delta$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0. \tag{1.11}$$

Abgesehen von den Ausgangs- und Zielgebieten hat man sowohl im konkaven, als auch im komplement-sternförmigen Fall dieselben analytischen Charakteristika erhalten wie im konvexen, bzw. sternförmigen Fall. Damit lässt sich das Analogon zu Satz 1.5 folgendermaßen formulieren.

Korollar 1.16. *Eine Funktion $f : \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$ ist genau dann konkav, wenn $g = zf'$ komplement-sternförmig ist.*

Der Beweis erfolgt analog.
Als Alternative zu der bisherigen Betrachtung kann man konkave Funktionen aus $\mathcal{C}o_p$ näher untersuchen. In Anlehnung an die Aussage von Satz 1.14 erhält man:

Lemma 1.17. *Sei $f \in \mathcal{S}_0$. Es gilt $f \in \mathcal{C}o_0$ genau dann, wenn für $z \in \mathbb{D}$*

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) < 0 \tag{1.12}$$

ist. Weiterhin gilt dann für $z, \zeta \in \mathbb{D}$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} + \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) \leq 0. \tag{1.13}$$

Beweis: Es sei $f \in \mathcal{C}o_0$ und $u(z) = \frac{1}{z}$. Dann ist $g := f \circ u : \Delta \to f(\mathbb{D}) \in \mathcal{C}o_\Delta$. Nach Satz 1.14 gilt nun $Re\left(1 + \frac{g''(z)}{g'(z)}\right) > 0$. Weiterhin ist $g'(z) = -\frac{1}{z^2}f'(u)$ und $g''(z) = \frac{1}{z^4}f''(u) + \frac{2}{z^3}f'(u)$. Also ist

$$\begin{aligned}
1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)} &= 1 + \frac{z\left(\frac{1}{z^4}f''(u) + \frac{2}{z^3}f'(u)\right)}{-\frac{1}{z^2}f'(u)} \\
&= 1 - \frac{\frac{1}{z}f''(u) + 2f'(u)}{f'(u)} \\
&= -1 - \frac{uf''(u)}{f'(u)}.
\end{aligned}$$

Desweiteren ist

$$\begin{aligned}
\frac{2zg'(z)}{g(z) - g(\zeta)} + \frac{\zeta + z}{\zeta - z} &= \frac{-2z\frac{1}{z^2}f'(u(z))}{f(u(z)) - f(u(\zeta))} + \frac{\frac{1}{u(\zeta)} + \frac{1}{u(z)}}{\frac{1}{u(\zeta)} - \frac{1}{u(z)}} \\
&= \frac{-2u(z)f'(u(z))}{f(u(z)) - f(u(\zeta))} - \frac{u(\zeta) + u(z)}{u(\zeta) - u(z)}
\end{aligned}$$

wodurch mit Satz 1.14 die Behauptung folgt. □

Mit der gleichen Methode lässt sich auch die folgende Aussage für komplement-sternförmige Funktionen beweisen.

Korollar 1.18. *Eine Funktion g ist genau dann komplement-sternförmig in $\mathbb{D}$ bzgl. $c = 0$, wenn*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) < 0 \tag{1.14}$$

gilt.

Für konkave Funktionen, deren Polstelle nicht im Ursprung liegt, kann man eine Verallgemeinerung des Lemmas formulieren.

Satz 1.19. *Sei $p \in [0;1[$ und $f \in \mathcal{S}_p$. Dann ist $f \in \mathcal{C}o_p$ genau dann, wenn für $z \in \mathbb{D}$ gilt*

$$\operatorname{Re}\left(1 + p^2 - 2pz + \frac{(z-p)(1-pz)f''(z)}{f'(z)}\right) < 0 \tag{1.15}$$

Der Beweis erfolgt mithilfe von Einheitskreisautomorphismen $z \mapsto \frac{z+p}{1+pz}$, mit denen man die Polstelle p auf den Ursprung projiziert und daraufhin Lemma 1.17 anwendet.

Beweis: (siehe auch [12])
Es sei $p \in [0;1[$ und $f \in \mathcal{C}o_p$. Dann hat die Funktion $g(z) := f\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)$ eine einfache Polstelle bei $z = 0$ und es gilt $\hat{\mathbb{C}}\backslash g[\mathbb{D}] = \hat{\mathbb{C}}\backslash f[\mathbb{D}]$. Also ist $f \in \mathcal{C}o_p$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right) < 0$ gilt. Dabei ist

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)' &= \frac{1-p^2}{(1+pz)^2} f'\left(\frac{z+p}{1+pz}\right) = g'(z) \\
\text{sowie } f\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)'' &= \left(\frac{1-p^2}{(1+pz)^2}\right)^2 f''\left(\frac{z+p}{1+pz}\right) - 2p\frac{1-p^2}{(1+pz)^3} f'\left(\frac{z+p}{1+pz}\right) = g''(z).
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies

$$\begin{aligned}
1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)} &= 1 + \frac{z\left(\left(\frac{1-p^2}{(1+pz)^2}\right)^2 f''\left(\frac{z+p}{1+pz}\right) - 2p\frac{1-p^2}{(1+pz)^3} f'\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)\right)}{\frac{1-p^2}{(1+pz)^2} f'\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)} \\
&= \frac{1+pz}{1+pz} + z\left(\frac{1-p^2}{(1+pz)^2}\frac{f''\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)}{f'\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)} - \frac{2p}{1+pz}\right) \\
&= \frac{1-pz}{1+pz} + \frac{(1-p^2)z}{(1+pz)^2}\frac{f''\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)}{f'\left(\frac{z+p}{1+pz}\right)} =: Q(z).
\end{aligned}$$

Nun gilt $\operatorname{Re}(Q(z)) < 0$ für $z \in \mathbb{D}$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}\Big(Q(\frac{z-p}{1-pz})\Big) < 0$ erfüllt ist. Man erhält

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{z-p}{1-pz}\right) &= \frac{\frac{1-p^2}{\left(1+p\left(\frac{z-p}{1-pz}\right)\right)^2}\frac{z-p}{1-pz}f''(z)}{f'(z)} + \frac{1-p\frac{z-p}{1-pz}}{1+p\frac{z-p}{1-pz}} \\
&= \frac{(1-p^2)(z-p)}{(1-pz+pz-p^2)^2}(1-pz)\frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{1-pz-pz+p^2}{1-pz+pz-p^2} \\
&= \frac{(z-p)(1-pz)f''(z)}{(1-p^2)f'(z)} + \frac{1+p^2-2pz}{1-p^2},
\end{aligned}$$

woraus nach Multiplikation mit $1-p^2$ die Behauptung folgt. □

Desweiteren kann man komplement-sternförmige Funktionen in $\mathbb{D}$ betrachten, die eine Polstelle bei $p \in [0;1[$ besitzen. Für solche Funktionen ist eine ähnliche Aussage wie Satz 1.19 möglich.

Korollar 1.20. *Eine Funktion $g \in \mathcal{S}_p$ ist genau dann komplement-sternförmig in $\mathbb{D}$ bzgl. eines Punktes $c \in \hat{\mathbb{C}} \backslash g(\mathbb{D})$, wenn für $z \in \mathbb{D}$ gilt*

$$Re\left(\frac{(z-p)(1-zp)g'(z)}{g(z)-c}\right) < 0. \tag{1.16}$$

Für den Beweis wird auf ein ähnliches Argument wie in Satz 1.19 und die Abschätzung (1.11) zurückgegriffen.

Beweis: (siehe auch [12])
Man betrachte die komplement-sternförmige Funktion

$$G(z) = g\left(\frac{z+p}{1+pz}\right) - c,$$

für die (1.14) gelten muss und erhält

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\left(\frac{z-p}{1-pz}\right)G'\left(\frac{z-p}{1-pz}\right)}{G\left(\frac{z-p}{1-pz}\right)}\right) < 0$$

woraus die Behauptung folgt. □

Weiterhin lässt sich ein Analogon zu (1.8) in Satz 1.14 für Funktionen $f \in \mathcal{C}o_p$ zeigen.

Korollar 1.21. *Es sei $f \in \mathcal{C}o_p$, $z, \zeta \in \mathbb{D}$ und $p \in [0;1[$. Dann gilt*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} + \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{z+p}{z-p} - \frac{1+pz}{1-pz}\right) < 0. \tag{1.17}$$

Beweis: (siehe auch [12] und [14])
Es sei

$$P(z) = -1 - p^2 + 2pz - 2(z-p)(1-pz)\frac{f'(z)(\zeta - z) + f(z) - f(\zeta)}{(f(z) - f(\zeta))(\zeta - z)} \tag{1.18}$$

(siehe auch Satz 1.19). Dann ist mit $f(z) = a_{-1}(z-p)^{-1} + a_0 + a_1(z-p) + \ldots$ für $\zeta \neq p$

$$\begin{aligned}
P(z) =& -1 - p^2 + 2pz - 2(1-pz)\frac{(\zeta - z)\left[-a_{-1}(z-p)^{-1} + a_1(z-p) + \ldots\right] + (f(z) - f(\zeta))(z-p)}{\left(a_{-1}(z-p)^{-1} + a_0 + \ldots - f(\zeta)\right)(\zeta - z)} \\
=& -1 - p^2 + 2pz - 2(1-pz)\frac{(\zeta - z)\left[-a_{-1} + a_1(z-p)^2 + \ldots\right] + (f(z) - f(\zeta))(z-p)^2}{\left(a_{-1} + a_0(z-p) + \ldots - f(\zeta)(z-p)\right)(\zeta - z)} \\
P(p) =& -1 - p^2 + 2p^2 - 2(1-p^2)\frac{-a_{-1}(\zeta - p)}{a_{-1}(\zeta - p)} = 1 - p^2.
\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich aus (1.18)

$$\begin{aligned}
& zP(z) + pz^2 - p = 3pz^2 - z - p^2 z - p - 2z(z-p)(1-pz)\frac{f'(z)(\zeta - z) + f(z) - f(\zeta)}{(f(z) - f(\zeta))(\zeta - z)} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{zP(z) + pz^2 - p}{(z-p)(1-pz)} = \frac{2pz^2 - 2p^2 z + p^2 z - z + pz^2 - p}{(z-p)(1-pz)} - 2z\frac{f'(z)(\zeta - z) + f(z) - f(\zeta)}{(f(z) - f(\zeta))(\zeta - z)} \\
& = \frac{2pz}{1-pz} - \frac{z+p}{z-p} - 2z\frac{f'(z)(\zeta - z) + f(z) - f(\zeta)}{(f(z) - f(\zeta))(\zeta - z)} \\
& = \frac{1+pz}{1-pz} - \frac{z+p}{z-p} - 1 - 2z\frac{f'(z)(\zeta - z) + f(z) - f(\zeta)}{(f(z) - f(\zeta))(\zeta - z)} \\
& = \frac{1+pz}{1-pz} - \frac{z+p}{z-p} - \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{\zeta + z}{\zeta - z}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Betrachtet man $Q(z) = \frac{zP(z) + pz^2 - p}{(z-p)(1-pz)}$, so gilt $Q(p) = \frac{1+p^2}{1-p^2}$ und es ist wie im Beweis von Satz 1.14

$$\lim_{\zeta \to z} Q(z) = -1 - \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{1+pz}{1-pz} - \frac{z+p}{z-p}$$

Demnach ist

$$F(z, \zeta) = \begin{cases} 1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)} + \dfrac{z+p}{z-p} - \dfrac{1+pz}{1-pz}, & \text{falls } z = \zeta \\[2ex] \dfrac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} + \dfrac{\zeta + z}{\zeta - z} + \dfrac{z+p}{z-p} - \dfrac{1+pz}{1-pz}, & \text{falls } z \neq \zeta \end{cases}$$

holomorph für $z, \zeta \in \mathbb{D}$.
Nach Lemma 1.17 gilt

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} + \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) \leq 0,$$

sowie

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 0$$

und weiterhin ist für $|z| = 1$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+p}{z-p} - \frac{1+pz}{1-pz}\right) = 0,$$

wodurch mit dem Maximumsprinzip die Behauptung folgt. □

1.2.1 Weitere Eigenschaften konkaver Funktionen

Anstatt davon auszugehen, dass die Polstelle auf der reellen Achse liegt, ist es auch möglich Funktionen $f \in \mathcal{C}o(\mathbb{D})$ im Einheitskreis $\mathbb{D}$ zu betrachten die ihre Polstelle in einem beliebigen Punkt $b := f^{-1}(\infty) \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ besitzen. Hierbei kann durch Drehung erreicht werden, dass er auf der reellen Achse liegt und somit $|b| = p \in]0;1[$ gilt. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Funktion in einer Umgebung des Ursprungs holomorph ist und folglich in der Form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.20}$$

dargestellt werden kann.
In diesem Fall ist zunächst eine genauere Aussage bezüglich des Koeffizienten a_2 möglich.

Satz 1.22. *Es sei $f : \mathbb{D} \to \Omega$ eine konkave Funktion mit einer Darstellung der Form $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ in einer Umgebung des Ursprungs und $p = |f^{-1}(\infty)| \in]0;1[$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\frac{1+p^4}{p(1+p^2)} \leq |a_2| \leq p + \frac{1}{p}. \tag{1.21}$$

Hierbei entsteht Gleichheit in der linken Ungleichung für

$$f(z) = e^{-i\vartheta} l_p(e^{i\vartheta} z), \quad \vartheta \in \mathbb{R},$$

mit

$$l_p(z) = \frac{z - \frac{2p}{1+p^2} z^2}{(1-\frac{z}{p})(1-pz)} \tag{1.22}$$

und Gleichheit in der rechten Ungleichung mit

$$f(z) = e^{-i\vartheta} k_p(e^{i\vartheta} z), \quad \vartheta \in \mathbb{R}$$

mit

$$k_p(z) = \frac{z}{(1-\frac{z}{p})(1-pz)}. \tag{1.23}$$

Beweis: (siehe auch [1])
Betrachtet man zunächst den Fall $f^{-1}(\infty) = pe^{i\alpha} \in \mathbb{D}$ mit $\alpha \in]0;\infty[$, so gilt für die Funktion definiert durch $f_p(z) := e^{i\alpha} f(e^{-i\alpha} z)$:

$$f_p \in \mathcal{C}o_p, \quad f_p^{-1}(\infty) = p \text{ und } a_2(f_p) = e^{i\alpha} a_2, \tag{1.24}$$

wobei $a_2(f_p)$ den zweiten Koeffizienten der um $z = 0$ entwickelten Funktion f_p darstellen soll. Für den weiteren Verlauf definiert man nun

$$F : \Delta \to \hat{\mathbb{C}},\ F(\zeta) = f_p\left(\frac{1+p\zeta}{\zeta+p}\right) \tag{1.25}$$

und $\Psi : \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$ durch

$$1 + \zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1+\Psi(\zeta)}{1-\Psi(\zeta)}. \tag{1.26}$$

Dabei hat die Funktion F die Entwicklung

$$F(\zeta) = a\zeta + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\zeta^{-k} \text{ mit } a \neq 0 \text{ und } \zeta \in \Delta. \tag{1.27}$$

Es folgt für $\zeta \in \Delta$

$$\begin{aligned} F'(\zeta) &= \quad a - b_1\tfrac{1}{\zeta^2} - 2b_2\tfrac{1}{\zeta^3} - \ldots &&= a - \sum_{k=1}^{\infty} kb_k\frac{1}{\zeta^{k+1}} \\ F''(\zeta) &= \quad 2b_1\tfrac{1}{\zeta^3} + 6b_2\tfrac{1}{\zeta^4} + \ldots &&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)b_k\frac{1}{\zeta^{k+2}} \end{aligned}$$

und somit für die linke Seite von Gleichung (1.26)

$$\begin{aligned} 1 + \zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} &= \frac{a - \sum_{k=1}^{\infty} kb_k\frac{1}{\zeta^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)b_k\frac{1}{\zeta^{k+1}}}{a - \sum_{k=1}^{\infty} kb_k\frac{1}{\zeta^{k+1}}} \\ &= \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2b_k}{a}\frac{1}{\zeta^{k+1}}}{1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kb_k}{a}\frac{1}{\zeta^{k+1}}} \\ &= \frac{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)}{1 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Da $f_p(\mathbb{D})$ und somit auch F konkav sind, ist der Realteil von Gleichung (1.26) positiv für alle $\zeta \in \Delta$. Demnach muss $|\Psi(\zeta)| < 1$ gelten.
Weiterhin besitzt die Funktion $\Psi(\zeta)$ nach (1.28) bei $\zeta = \infty$ eine doppelte Nullstelle, bzw. die Funktion $\Psi \circ u : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $u(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ hat eine doppelte Nullstelle im Ursprung.
Mit dem Schwarzschen Lemma folgt

$$\begin{aligned} &|\Psi(u)| &\leq\ & |u^2| \\ \Leftrightarrow\ &|\Psi(\zeta)| &\leq\ & \frac{1}{|\zeta|^2}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Aus Gleichung (1.26) erhält man nun

$$\begin{aligned} \zeta\tfrac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} &= \frac{2\Psi(\zeta)}{1-\Psi(\zeta)} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}}{2+\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}} &= \Psi \end{aligned}$$

und mit Gleichung (1.29) folgt für $\zeta \in \Delta$

$$\begin{aligned}
& & \left|\frac{\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}}{2+\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}}\right|^2 &\le \frac{1}{|\zeta|^4} \\
&\Leftrightarrow & \left|\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right|^2 &\le \frac{1}{|\zeta|^4}\left(\left|\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right|^2 + 4\,\mathrm{Re}\left(\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right)+4\right) \\
&\Leftrightarrow & \left(1-\frac{1}{|\zeta|^4}\right)\left|\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right|^2 - \frac{2}{|\zeta|^4}\left(\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}+\overline{\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}}\right) &\le \frac{4}{|\zeta|^4} \\
&\Leftrightarrow & \left|\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right|^2 - \frac{2}{|\zeta|^4-1}\left(\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}+\overline{\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}}\right) &\le \frac{4}{|\zeta|^4-1} \\
&\Leftrightarrow & \left|\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} - \frac{2}{|\zeta|^4-1}\right|^2 - \frac{4}{(|\zeta|^4-1)^2} &\le \frac{4|\zeta|^4-4}{(|\zeta|^4-1)^2} \\
&\Leftrightarrow & \left|\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} - \frac{2}{|\zeta|^4-1}\right| &\le \frac{2|\zeta|^2}{|\zeta|^4-1}. \qquad (1.30)
\end{aligned}$$

Nun ist die Abbildung $\zeta \mapsto \frac{1+p\zeta}{\zeta+p}$ in (1.25) ein Einheitskreisautomorphismus, der $F(\Delta) = f_p(\mathbb{D})$ und $F(\infty) = f_p(p) = \infty$ bewirkt. Demnach gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right)' &= \frac{p(p+\zeta)-(1+p\zeta)}{(p+\zeta)^2} = \frac{p^2-1}{(p+\zeta)^2}, \\
F'(\zeta) &= \frac{p^2-1}{(p+\zeta)^2} f_p'\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right), \\
F''(\zeta) &= \left(\frac{p^2-1}{(p+\zeta)^2}\right)^2 f_p''\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right) - 2\frac{p^2-1}{(p+\zeta)^3} f_p'\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right). \qquad (1.31)
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (1.25) folgt dann für $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\bigg|_{\zeta=\frac{1-pz}{z-p}} &= \zeta\frac{\left(\frac{p^2-1}{(p+\zeta)^2}\right)^2 f_p''\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right) - 2\frac{p^2-1}{(p+\zeta)^3} f_p'\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right)}{\frac{p^2-1}{(p+\zeta)^2} f_p'\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right)}\Bigg|_{\zeta=\frac{1-pz}{z-p}} \\
&= \zeta\frac{\frac{p^2-1}{(p+\zeta)^2} f_p''\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right)}{f_p'\left(\frac{1+p\zeta}{p+\zeta}\right)} - \frac{2\zeta}{p+\zeta}\Bigg|_{\zeta=\frac{1-pz}{z-p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-pz}{z-p} \frac{p^2-1}{p-\frac{1-pz}{z-p}} \frac{f_p''(z)}{f_p'(z)} - 2\frac{\frac{1-pz}{z-p}}{p+\frac{1-pz}{z-p}} \\
&= \frac{1-pz}{z-p} \frac{p^2-1}{\left(\frac{zp-p^2+1-pz}{z-p}\right)^2} \frac{f_p''(z)}{f_p'(z)} - 2\frac{1-pz}{zp-p^2+1-pz} \\
&= \frac{(1-pz)(p^2-1)(z-p)}{(1-p^2)^2} \frac{f_p''(z)}{f_p'(z)} - 2\frac{1-pz}{1-p^2} \\
&= \frac{(1-pz)(p-z)}{1-p^2} \frac{f_p''(z)}{f_p'(z)} - 2\frac{1-pz}{1-p^2}, \qquad (1.32)
\end{aligned}
$$

woraus für $\zeta = -\frac{1}{p}$ auf der linken und $z = 0$ auf der rechten Seite von (1.32) folgt

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{p}\frac{F''\left(-\frac{1}{p}\right)}{F'\left(-\frac{1}{p}\right)} &= \frac{p}{1-p^2}\frac{f_p''(0)}{f_p'(0)} - \frac{2}{1-p^2} \\
&= \frac{2pa_2-2}{1-p^2}. \qquad (1.33)
\end{aligned}
$$

In Kombination mit Gleichung (1.30) erhält man daraus

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{2pa_2-2}{1-p^2} - \frac{2}{\frac{1}{p^4}-1}\right| \le \frac{2\frac{1}{p^2}}{\frac{1}{p^4}-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{2}{1-p^2}\left(pa_2 - 1 - \frac{p^4}{1+p^2}\right)\right| \le \frac{2}{1-p^2}\frac{p^2}{1+p^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \left|pa_2 - 1 - \frac{p^4}{1+p^2}\right| \le \frac{p^2}{1+p^2} \qquad (1.34)
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
& |pa_2| \ \ge\ \frac{1+p^2-p^2+p^4}{1+p^2} = \frac{1+p^4}{1+p^2} \\
\text{und}\quad & |pa_2| \ \le\ \frac{1+p^2+p^2+p^4}{1+p^2} = \frac{(1+p^2)^2}{1+p^2}, \qquad (1.35)
\end{aligned}
$$

also die Behauptung.
Damit auf einer der beiden Seiten Gleichheit eintreten kann, muss bereits Gleichheit in (1.30), bzw. in (1.29) herrschen, d.h. es muss ein $\gamma \in \mathbb{R}$ geben, sodass $\Psi(\zeta) = e^{i\gamma}\zeta^{-2}$ für $\zeta \in \Delta$ gilt. Weiterhin wird in (1.35) $\mathrm{Im}(a_2) = 0$ benötigt, womit insgesamt folgt

$$\Psi(\zeta) = \pm\zeta^{-2}, \quad F(\zeta) = a(\zeta \pm \zeta^{-1}) + b \ \text{ mit } \ a \neq 0,\, b \in \mathbb{C}.$$

Setzt man $\zeta = \frac{1-pz}{z-p}$ für diese zwei Möglichkeiten, so erhält man gerade die beiden Extremalfunktionen k_p und l_p. □

Die Aussage von Satz 1.22 kann mit dem folgenden Lemma erweitert werden.

Lemma 1.23. *Es sei $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ konkav und holomorph in $\mathbb{D}$. Dann gibt es eine Folge von konkaven Funktionen $f_n(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{a}_k z^k$ mit $z \in \mathbb{D}$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n^{-1}(\infty)| \in]0;\, 1[$ gilt und für $n \to \infty$ die Funktionen $f_n \to f$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ konvergieren.*

Beweis: (siehe auch [1])
Nach Voraussetzung ist $\mathbb{C} \backslash f(\mathbb{D})$ konvex und somit auch

$$K_n = (\mathbb{C} \backslash f(\mathbb{D})) \cap \{z \mid |z| \leq n\}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Sei nun g_n eine Funktion, die $\mathbb{D}$ auf $\overline{\mathbb{C}} \backslash K_n$ abbildet und für die $g_n(0) = 0$, bzw. $g_n'(0) > 0$ gilt. Dann ist g_n konkav und $f_n = \frac{g_n}{g_n'(0)}$ besitzt die gewünschte Normierung. Weiterhin ist nach Konstruktion $f_n \to f$ für $n \to \infty$ und die Behauptung folgt mit dem Kernkonvergenzsatz von Carathéodory. $\square$

Bemerkung 1.24. Kombiniert man Lemma 1.23 mit Satz 1.22, so ergibt sich für eine konkave Funktion f, die in $\mathbb{D}$ holomorph ist und auf dem Rand eine Polstelle besitzt

$$1 \leq |a_2(f)| \leq 2.$$

Für eine weitere Aussage bzgl. konkaver Funktionen werden zusätzliche Hilfsmittel benötigt. Zur Vereinfachung führt man die folgenden Bezeichnungen ein.

Definition 1.25. *Es bezeichne*

$$d(p,\, q) := \left| \frac{p - q}{1 - \bar{p}q} \right|$$

den pseudo-hyperbolischen Abstand zweier Punkte $p,\, q \in \mathbb{D}$.

Bemerkung 1.26. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 - d^2(p,\, q) &= \frac{|1 - \bar{p}q|^2 - |p|^2 - |q|^2 + \bar{p}q + p\bar{q}}{|1 - \bar{p}q|^2} \\ &= \frac{1 + |pq|^2 - |p|^2 - |q|^2}{|1 - \bar{p}q|^2} \\ &= \frac{(1 - |p|^2)(1 - |q|^2)}{|1 - \bar{p}q|^2}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Definition 1.27. *Der pseudo-hyperbolische Kreis mit Mittelpunkt $p \in \mathbb{D}$ und pseudo-Radius $r \in]0;\, 1[$ wird beschrieben durch*

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(p, r) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid d(z,\, p) < r\} \\ &\overset{(1.36)}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |1 - \bar{z}p|^2 < \frac{1 - |p|^2}{1 - r^2}(1 - |z|^2)\}. \end{aligned}$$

Geht p gegen einen Punkt $\omega \in \partial\mathbb{D}$, und $r \to 1$ so, dass

$$\frac{1-|p|}{1-r} \to \lambda \in]0;\infty[$$

gilt, ergibt sich im Grenzfall für $\mathfrak{K}(p,r)$

$$\mathfrak{H}(\omega,\,\lambda) := \{z \in \mathbb{C} \mid |1-\bar{z}\omega|^2 < \lambda(1-|z|^2)\}.$$

Bemerkung 1.28. $\mathfrak{H}(\omega,\lambda)$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $\frac{\omega}{1+\lambda}$ und Radius $\frac{\lambda}{1+\lambda}$, der $\partial\mathbb{D}$ im Punkt ω berührt.

Definition 1.29. 1. *Ein Sektor (in $\mathbb{D}$) von einem Punkt $\omega \in \partial\mathbb{D}$ bezeichnet das Gebiet in $\mathbb{D}$, das von zwei Halbgeraden aufgespannt wird, die sich in ω treffen und symmetrisch zu der Verbindungsgeraden zwischen ω und dem Urprung von $\mathbb{D}$ sind.*

2. *Es sei φ eine Funktion, die auf $\mathbb{D}$ definiert ist und $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Dann bedeutet*

$$\angle \lim_{z\to\omega} \varphi(z) = L,$$

dass $\varphi(z) \to L$ für $z \to \omega$ in jedem Sektor von ω gilt. Existiert der Grenzwert, so spricht man von einem Winkelgrenzwert von φ bei ω.

3. *Es sei φ eine holomorphe Selbstabbildung des Einheitskreises. Existiert für ein eindeutiges $\eta \in \partial\mathbb{D}$ und ein $\omega \in \partial\mathbb{D}$ der Grenzwert*

$$\varphi'(\omega) := \angle \lim_{z\to\omega} \frac{\eta-\varphi(z)}{\omega-z} < \infty,$$

so bezeichnet man diesen als Winkelableitung von φ bei ω.

Mit diesen Definitionen lassen sich die anschließenden Behauptungen aufstellen. Der folgende Satz kann dabei auch als invariante Version des Schwarzschen Lemmas angesehen werden.

Lemma 1.30. *Es sei φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$. Für jeweils zwei Punkte $p,\, q \in \mathbb{D}$ gilt dann*

$$d(\varphi(p),\varphi(q)) \le d(p,q).$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn φ ein Einheitskreisautomorphismus ist.
Für $p = \varphi(p) = 0$ erhält man das Schwarzsche Lemma.

Beweis: (siehe auch [18])
Es sei

$$\alpha_p(z) := \frac{p-z}{1-\bar{p}z}$$

ein Einheitskreisautomorphismus und $0 \neq b = \varphi(p)$. Betrachtet man die Abbildung $\alpha_b \circ \varphi \circ \alpha_p$, so bildet diese den Urspung auf sich selbst ab und ist eine Selbstabbildung des Einheitskreises.

Wendet man nun das Schwarzsche Lemma auf die Funktion $\alpha_b \circ \varphi$ an der Stelle $z = \alpha_p(q)$ an, so ergibt sich

$$|(\alpha_b \circ \varphi)(q)| \leq |\alpha_p(q)|,$$

was genau die Behauptung ist. □

Bemerkung 1.31. Überträgt man die Aussage von Lemma 1.30 auf den pseudo-hyperbolischen Kreis $\mathfrak{K}$, so folgt

$$\varphi(\mathfrak{K}(p,r)) \subset \mathfrak{K}(\varphi(p), r).$$

Satz 1.32. *(Satz von Julia)*
Es sei φ eine nicht-konstante holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ und η, $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Weiterhin sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ eine Folge von Punkten, die gegen ω so konvergiert, dass sowohl $\varphi(p_n) \to \eta$, als auch

$$\frac{1 - |\varphi(p_n)|}{1 - |p_n|} \to \delta < \infty \tag{1.37}$$

gilt. Dann folgt

(i) $\delta > 0$,

(ii) $\varphi(\mathfrak{H}(\omega, \lambda)) \subset \mathfrak{H}(\eta, \lambda\,\delta)$ *für* $\lambda > 0$.

Beweis: (siehe auch [18])

(i) Für $q = 0$ folgt mit Lemma 1.30 für jedes $p \in \mathbb{D}$

$$d(\varphi(p), \varphi(0)) \leq d(p, 0) = |p|.$$

Mit Gleichung (1.36) erhält man dann

$$\begin{aligned}
& 1 - d^2(\varphi(p), \varphi(0)) \geq && 1 - d^2(p, 0) \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{(1-|\varphi(p)|^2)(1-|\varphi(0)|^2)}{|1-\overline{\varphi(p)}\varphi(0)|^2} \geq && 1 - |p|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{(1-|\varphi(p)|^2)}{1-|p|^2} \geq && \frac{|1 - \overline{\varphi(p)}\varphi(0)|^2}{1 - |\varphi(0)|^2}.
\end{aligned}$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
\frac{|1 - \overline{\varphi(p)}\varphi(0)|^2}{1 - |\varphi(0)|^2} &\geq \frac{|1 - |\overline{\varphi(p)}|\,|\varphi(0)||^2}{1 - |\varphi(0)|^2} \\
&\geq \frac{|1 - |\varphi(0)||^2}{1 - |\varphi(0)|^2} \\
&= \frac{1 - |\varphi(0)|}{1 + |\varphi(0)|}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun $p = p_n$ und betrachtet $n \to \infty$, so ergibt sich aus den beiden Ungleichungen

$$\frac{1 - |\varphi(0)|}{1 + |\varphi(0)|} \leq \frac{1 - |\varphi(p_n)|^2}{1 - |p_n|^2} \to \delta,$$

also $\delta > 0$ wie behauptet.

(ii) Es sei $\lambda \in]0; \infty[$ und da $|p_n| \to 1-$ gilt, sei o.E $1 - |p_n| < \lambda$. Mit $r_n := 1 - \frac{1-|p_n|}{\lambda} \in]0; 1[$ folgt dann $r_n \to 1$ für $n \to \infty$ und

$$\frac{1 - |p_n|}{1 - r_n} = \lambda$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Gleichung (1.37) gilt auch

$$\frac{1 - |\varphi(p_n)|}{1 - r_n} \to \lambda\delta.$$

Mit Bemerkung 1.31 und den Definitionen folgt dann

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathfrak{H}(\omega, \lambda)) &\subset \limsup_{n\to\infty} \varphi(\mathfrak{K}(p_n, r_n)) \\
&\subset \limsup_{n\to\infty} \mathfrak{K}(\varphi(p_n), r_n) \\
&\subset \overline{\mathfrak{H}(\eta, \lambda\delta)}
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung φ nicht-konstant ist, kann man auf den Abschluss verzichten, woraus sich die Behauptung ergibt.

□

Der folgende Satz kann ebenfalls als Analogon zum Schwarzschen Lemma betrachtet werden, wobei die Rolle des Fixpunktes im Ursprung auf den Rand des Einheitskreises übertragen wird.

Satz 1.33. *(Satz von Wolff)*
Es sei φ eine holomorphe Selbstabbildung des Einheitskreises ohne Fixpunkt in $\mathbb{D}$. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt $\omega \in \partial\mathbb{D}$ für den gilt

(i) $\varphi(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}$ *für beliebige* $\mathfrak{H} \subset \mathbb{D}$*, die* $\partial\mathbb{D}$ *bei* ω *berühren,*

(ii) φ *hat eine Winkelableitung bei* ω *mit* $\varphi'(\omega) \leq 1$.

Man sagt, dass ω ein Randfixpunkt von φ ist.

Beweis: (siehe auch [18])
Es sei $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge positiver Zahlen, die gegen 1 konvergiert und $\Phi_n(z) = \rho_n\varphi(z)$. Dann gilt für $|z| = \rho_n$

$$|z - (z - \Phi_n(z))| = |\Phi_n(z)| < \rho_n = |z|,$$

so dass nach dem Satz von Rouché die Funktionen z und $z - \Phi_n(z)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen, also eine, im Kreis $\mathbb{D}_{\rho_n}$ besitzen. Somit gibt es einen Punkt p_n mit $|p_n| < \rho_n$, für den $\Phi_n(p_n) = p_n$ gilt. Es folgt

$$\varphi(p_n) = \frac{p_n}{\rho_n}. \tag{1.38}$$

Betrachtet man gegebenenfalls eine Teilfolge, so konvergiert p_n gegen einen Punkt $\omega \in \overline{\mathbb{D}}$ und nach (1.38) gilt $\varphi(p_n) \to \omega$.
Gilt $\omega \in \mathbb{D}$, dann folgt aus der Stetigkeit von φ, dass $\omega = \lim_{n\to\infty} \varphi(p_n) = \varphi(\omega)$ ist, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. Somit muss $\omega \in \partial\mathbb{D}$ gelten.
Weiterhin folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ aus Gleichung (1.38), dass $|p_n| < |\varphi(p_n)|$ und somit

$$\frac{1 - |\varphi(p_n)|}{1 - |p_n|} < 1$$

gilt. Geht man, falls notwendig, zu einer Teilfolge über, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - |\varphi(p_n)|}{1 - |p_n|} = \delta. \tag{1.39}$$

Nach Satz 1.32 folgt mit $\omega = \eta$ und $\delta \leq 1$, dass $\varphi(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}$ gilt und nach dem Satz von Julia-Carathéodory ergibt sich mit Gleichung (1.39) die Existenz der Winkelableitung bei ω mit $\varphi'(\omega) \leq 1$.
Es seien nun ω und $\tilde{\omega}$ zwei Punkte, die die gegebenen Eigenschaften erfüllen. Dann berührt $\mathfrak{H}$ den Rand $\partial\mathbb{D}$ bei ω und $\tilde{\mathfrak{H}}$ berührt $\partial\mathbb{D}$ bei $\tilde{\omega}$. Weiterhin kann man $\mathfrak{H}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}$ derart arrangieren, dass sich die beiden Kreise zusätzlich bei $z_0 \in \mathbb{D}$ berühren. Da die beiden Kreise durch φ auf sichselbst abgebildet werden, ergibt sich $\varphi(z_0) = z_0 \in \mathbb{D}$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. Demzufolge ist ω eindeutig. □

Mit diesen Resultaten lässt sich nun die folgende Eigenschaft konkaver Funktionen im Einheiskreis beweisen.

Satz 1.34. *Es sei $f \in Co(\mathbb{D})$ meromorph und schlicht im Einheitskreis mit der Darstellung $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Dann hat die Funktion*

$$\phi(z) = z + \frac{2f'(z)}{f''(z)} \tag{1.40}$$

mit dem holomorphen Abschluss $\phi(b) = b$ falls $f^{-1}(\infty) =: b \in \mathbb{D}$ die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Funktion ϕ ist holomorph in $\mathbb{D}$ und es gilt $|\phi(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$.

(ii) Der Punkt $b := f^{-1}(\infty)$ ist ein attraktiver Fixpunkt von ϕ, d.h. es gilt $|\phi'(b)| < 1$. Genauer gilt sogar $\phi'(b) = \phi''(b) = 0$ für $|b| < 1$ und für den Grenzfall $|b| \to 1$ erhält man $\phi'(b) \in [0; \frac{1}{3}]$.

(iii) Die Funktion ϕ hat keinen Fixpunkt in $\mathbb{D}\backslash\{b\}$.

Beweis: (siehe auch [1])

(i) Es sei $b = pe^{i\alpha}$ mit $p \in [0; 1[$. Angenommen, es existiert ein $z_0 \in \mathbb{D}$, sodass $f''(z_0) = 0$ gilt. Setzt man F wie im Beweis von Satz 1.22 und $\zeta_0 = \frac{1-pz_0}{z_0-p}$, dann erhält man aus (1.32)

$$\operatorname{Re}\left(1 + \zeta_0 \frac{F''(\zeta_0)}{F'(\zeta_0)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-1 - p^2 + 2pz_0}{1 - p^2}\right) < 0, \tag{1.41}$$

was im Widerspruch zu Satz 1.14 steht. Also ist $f''(z_0) \neq 0$ für $z \in \mathbb{D}$ und ϕ ist holomorph. Für den Beweis von $|\phi(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$ betrachtet man wie (1.24) im Beweis von Satz 1.22 $f_p(z) := e^{i\alpha} f(e^{-i\alpha} z)$ mit einem $p \in]0; 1[$ und definiert

$$\phi_p := e^{i\alpha}\phi(e^{-i\alpha} z) = z + \frac{2f_p'(z)}{f_p''(z)}.$$

Nimmt man nun an, dass ein $z_0 \in \mathbb{D}$ existiert, sodass $\phi_p(z_0) = \frac{1}{p}$ gilt, so folgt

$$\frac{f_p''(z_0)}{f_p'(z_0)} = \frac{2}{\frac{1}{p} - z_0} = \frac{2p}{1 - pz_0}$$

und für $\zeta_0 = \frac{1-pz_0}{z_0-p}$ erhält man

$$Re\left(1 + \zeta_0 \frac{F''(\zeta_0)}{F'(\zeta_0)}\right) = -1 < 0,$$

was, wie bereits (1.41), einen Widerspruch zu Satz 1.14 darstellt. Somit ist $\phi_p(z) \neq \frac{1}{p}$ für $z \in \mathbb{D}$ und die Funktion

$$\Phi_p(\zeta) := \frac{\phi_p\left(\frac{1+p\zeta}{\zeta+p}\right) - p}{1 - p\phi_p\left(\frac{1+p\zeta}{\zeta+p}\right)} \tag{1.42}$$

ist holomorph in Δ und es gilt $\Phi_p(\infty) = 0$, da nach Definition $\phi_p(\infty) = p$ gilt. Nach einiger Rechnung folgt mit den Gleichungen (1.25) und (1.31)

$$1 + \zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1 + \zeta\Phi_p(\zeta)}{1 - \zeta\Phi_p(\zeta)}, \quad \zeta \in \Delta. \tag{1.43}$$

Mit Satz 1.14 und den vorhergehenden Gleichungen erhält man nun $|\phi_p(z)| < 1$ für $z \in \mathbb{D}$. Wendet man weiterhin Lemma 1.23 an, ergibt sich $|\phi(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$.

(ii) Wenn bereits $b \in \mathbb{D}$ ist, folgt aus der Definition von ϕ, dass $\phi(b) = b$ und $\phi'(b) = \phi''(b) = 0$ gilt. Da ϕ nach (i) eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ ist, besitzt die Funktion höchstens einen attraktiven Fixpunkt $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ (siehe hierzu auch [18]). Seien nun ϕ_p und f_p derart, dass $b \notin \mathbb{D}$ ist. Dann folgt mit Satz 1.33, dass es einen Randfixpunkt gibt. Betrachtet man die Koebe-Transformierte von f_p, also für $z \in \mathbb{D}$ und

$x \in]0;1[$ die Funktion

$$g(z) = \frac{f_p\left(\frac{z+x}{1+xz}\right) - f_p(x)}{f_p'(x)(1-x^2)}$$

und wendet Satz 1.22 auf $a_2(g)$ an, so erhält man mit Gleichung (1.34)

$$\left| a_2(g) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z+x}{1+xz}\right)' &= \frac{1+xz-(xz+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+xz)^2} \\
\left(\frac{z+x}{1+xz}\right)'' &= \frac{-2x(1-x^2)}{(1+xz)^3} \\
g'(z) &= \frac{\frac{1-x^2}{(1+xz)^2} f_p'\left(\frac{z+x}{1+xz}\right)}{f_p'(x)(1-x^2)} \\
g''(z) &= \frac{\frac{-2x(1-x^2)}{(1+xz)^3} f_p'\left(\frac{z+x}{1+xz}\right) + \left(\frac{1-x^2}{(1+xz)^2}\right)^2 f_p''\left(\frac{z+x}{1+xz}\right)}{f_p'(x)(1-x^2)}.
\end{aligned}$$

Für den Koeffizienten a_2 folgt

$$\begin{aligned}
a_2(g) &= \frac{-2x(1-x^2)f_p'(x) + (1-x^2)^2 f_p''(x)}{2f_p'(x)(1-x^2)} \\
&= -x + (1-x^2)\frac{f_p''(x)}{2f_p'(x)}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\left| \frac{f_p''(x)}{2f_p'(x)}(1-x^2) - x - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{1-x^2}{\phi_p(x) - x} - \frac{2x+3}{2} \right| \leq \frac{1}{2}. \tag{1.44}$$

Nach Satz 1.33 existiert die Winkelableitung $0 < \phi_p'(1) \leq 1$, für $\phi_p \not\equiv 1$. Man erhält dann aus Gleichung (1.44)

$$\left| \frac{2}{1-\phi_p'(1)} - \frac{5}{2} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Somit ist $0 \leq \phi_p'(1) \leq \frac{1}{3}$.
Betrachtet man für $\beta \in [1;2]$ Funktionen der Gestalt

$$f(z) = \frac{1}{2\beta}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\beta - 1\right),$$

so erhält man

$$\phi'(1) = \frac{\beta-1}{\beta+1} \in \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

(iii) Da für alle $z \in \mathbb{D} \backslash \{b\}$ gilt $f'(z) \neq 0$ und somit $\phi(z) \neq z$ für $z \in \mathbb{D} \backslash \{b\}$, sind alle behaupteten Eigenschaften bewiesen.

$\square$

2 Koeffizientenabschätzungen konkaver Funktionen in einer Umgebung des Ursprungs

In diesem Kapitel werden konkave Funktionen in der Einheitskreisscheibe betrachtet, die sich in der Form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

darstellen lassen. Dabei wird wie in Abschnitt 1.2.1 davon ausgegangen, dass die Funktionen in einer Umgebung des Ursprungs schlicht sind und bei $p \in]0;1[$ einen Pol besitzen.
Zwar wurde in Satz 1.22 für diesen Fall bereits eine Abschätzung bezüglich a_2 geliefert, doch sollen im folgenden Koeffizienten a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachtet werden. Dabei wird zunächst ein Analogon zum konvexen Fall bewiesen, der in Satz 1.8 behandelt wurde (siehe auch [3]). Anschließend soll auf die verschärfte Form einer Vermutung von A.E. Livingston eingegangen werden, die in [12] zuerst formuliert und in [2] bewiesen wurde.

2.1 Eine allgemeine Koeffizientenabschätzung

Zunächst müssen einige Hilfmittel zur Verfügung gestellt werden, die die Quasi-Subordination behandeln. Diese Eigenschaft ist eine Verallgemeinerung der klassischen Subordination.

Definition 2.1. *Es seien f und g meromorph in $\mathbb{D}$ und holomorph in einer Umgebung des Ursprungs. Dann heißt f quasi-subordiniert zu g, wenn es eine holomorphe Funktion $\omega(z)$ mit $|\omega(z)| \leq |z| < 1$ gibt, sodass $|f(z)| \leq |g(\omega(z))|$ für $z \in \mathbb{D}$ gilt. In anderen Worten, es existiert eine holomorphe Funktion ϕ mit $|\phi(z)| \leq 1$, sodass gilt*

$$f(z) = \phi(z)\, g(\omega(z)). \tag{2.2}$$

Man schreibt

$$f \prec_q g.$$

Auf Basis dieser Definition lässt sich der folgende Satz formulieren.

Satz 2.2. *Es sei $f \prec_q g$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $r \in]0;1[$*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^n d\vartheta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\vartheta})|^n d\vartheta. \tag{2.3}$$

Beweis: (siehe auch [5])
Für $\zeta = re^{i\vartheta}$ und $|z| < r < 1$ lässt sich mit der Poisson-Formel schreiben

$$g^n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^n(\zeta)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)d\vartheta.$$

Setzt man $|\omega(z)| \leq |z| < r$ und $|\phi(z)| \leq 1$, so erhält man

$$|f(z)|^n = |\phi(z)g(\omega(z))|^n \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\zeta)|^n\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+\omega(z)}{\zeta-\omega(z)}\right)d\vartheta.$$

Integriert man nun diese Ungleichung über den Kreis $\{z = \rho e^{it} \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ mit $0 < \rho < r$, ergibt sich mit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+\omega(\rho e^{it})}{\zeta-\omega(\rho e^{it})}\right)dt = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+\omega(0)}{\zeta-\omega(0)}\right) = 1$$

die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^n dt \leq \int_0^{2\pi} |g(re^{i\vartheta})|^n d\vartheta$$

mit $0 < \rho < r < 1$. Mit dem Grenzübergang $\rho \to r$ folgt Gleichung (2.3), also die Behauptung.

□

Für quasi-subordinierte Funktionen lässt sich nun das folgende Lemma formulieren.

Lemma 2.3. *Es gelte $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \prec_q g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ für Funktionen f und g. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2. \tag{2.4}$$

Beweis: (siehe auch [5])
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest. Mit Gleichung (2.2) folgt in einer Umgebung des Ursprungs

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k - \phi(z)\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\omega(z)^k = \phi(z)\sum_{k=0}^{n} b_k\omega(z)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

Nun beschreibt man die linke Seite der Gleichung in einer Umgebung des Ursprungs durch eine Taylorreihe. Dann müssen die Koeffizienten von z^k für $0 \leq k \leq n$ Null sein, da die niedrigste auftretende Potenz bereits $n+1$ ist. Demzufolge lässt sie sich um den Ursprung in der Form

$$h(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k$$

darstellen. Weiterhin seien $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ und $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ die Partialsummen von f und g. Gleichzeitig ist die rechte Seite als Kombination holomorpher Elemente im gesamten

Einheitskreis holomorph und es folgt für $|z| < 1$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k = \phi(z) \sum_{k=0}^{n} b_k \omega(z)^k,$$

womit sich $(f_n + h) \prec_q g_n$ ergibt. Für $z = re^{i\vartheta}$ erhält man mit der Parsevalschen Formel und Satz 2.2 mit $n = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \phi(re^{i\vartheta}) \sum_{k=0}^{n} b_k \omega(re^{i\vartheta})^k \right|^2 d\vartheta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k r^k e^{i\vartheta k} \right|^2 d\vartheta \\ &= \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2 r^{2k}, \end{aligned}$$

woraus für $r \longrightarrow 1$ die Behauptung folgt. □

Eine Erweiterung des Lemmas wird durch das anschließende Korollar gegeben.

Korollar 2.4. *Seien f und g wie im Lemma 2.3 gegeben, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k |a_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k |b_k|^2. \tag{2.5}$$

Beweis: Betrachtet man die Ungleichung (2.4) für $n = 0, 1, \ldots, m$ mit $m \in \mathbb{N}$ und sei $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \lambda_m \geq \lambda_{m+1} = 0$. Multipliziert man nun für $n = l,\ l = 0, 1, \ldots, m$ (2.4) mit $\lambda_l - \lambda_{l+1} > 0$ und summiert über l, so folgt.

$$\sum_{l=0}^{m} \lambda_l |a_l|^2 \leq \sum_{l=0}^{m} \lambda_l |b_l|^2.$$

Da m beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Nun kann eine allgemeine Abschätzung von Koeffizienten konkaver Funktionen bewiesen werden. Es handelt sich um ein Analogon zum konvexen Fall aus Satz 1.8.

Satz 2.5. *Es sei $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C}o(\mathbb{D})$. Dann gilt*

$$|a_n| \geq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Gleichheit tritt ein, wenn gilt $f(z) = \frac{z}{1-e^{i\vartheta}z}$ für $\vartheta \in [0; 2\pi[$.

Beweis: (siehe auch [1])
Nach Satz 1.34 gibt es für beliebige $f \in \mathcal{C}o(\mathbb{D})$ eine Funktion $\phi(z) = z + \frac{2f'(z)}{f''(z)}$, die holomorph im Einheitskreis ist, sodass $|\phi(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$ gilt. Weiterhin gilt dann für $z \in \mathbb{D}$

$$zf''(z) + 2f'(z) = \phi(z) f''(z) \tag{2.6}$$

erfüllt. Setzt man nun in Hinblick auf Lemma 2.3

$$F(z) = zf''(z) + 2f'(z) \quad \text{und} \quad G(z) = f''(z)$$

bzw. für $k \in \mathbb{N}_0$

$$A_k = (k+1)(k+2)a_{k+1} \quad \text{und} \quad B_k = (k+1)(k+2)a_{k+2}$$

wobei $a_1 = 1$ gilt. Mit Gleichung (2.5) folgt nun für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2(k+2)^2|a_{k+1}|^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2(k+2)^2|a_{k+2}|^2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)^2|a_{k+1}|^2 &\leq \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2k^2|a_{k+2}|^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(k^4 + 2k^3 + k^2\right)|a_k|^2 &\leq \sum_{k=2}^{n+1} \left(k^4 - 2k^3 + k^2\right)|a_k|^2 \\ \Leftrightarrow 4\sum_{k=1}^{n} k^3|a_k|^2 &\leq n^2(n+1)^2|a_{n+1}|^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wegen $|a_1| = 1$ folgt für den Fall $n = 1$ in (2.7) $|a_2| \geq 1$.
Nun kann man mit der Tatsache $4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2$ aus (2.7) induktiv folgern, dass $|a_n| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}o$ gilt. Gleichheit kann nur auftreten, wenn $|a_2| = ... = |a_{n-1}| = 1$ gilt, was im Fall der angegebenen Extremalfunktion erfüllt ist. □

2.2 H^p-Räume

Bevor weitere Überlegungen zu Eigenschaften konkaver Funktionen folgen, soll an dieser Stelle kurz auf einige Hilfsmittel eingegangen werden, die aus der Theorie der H^p-Räume ($0 < p \leq \infty$) stammen (siehe auch [9]). Diese sind hilfreich, um gegebene Probleme in einer anderen Form darzustellen und zu entscheiden, ob gefundene Abschätzungen scharf sind.

Definition 2.6. *Es sei f eine holomorphe Funktion in $\mathbb{D}$, $r \in]0;1[$ und $0 < p \leq \infty$. Man sagt, dass f in der Klasse H^p liegt, wenn der Ausdruck*

$$M_p(r,f) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.8}$$

beschränkt ist, wenn also für die folgendermaßen definierte Norm gilt

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{r\in]0;1[} M_p(r,f) < \infty.$$

Für den Fall $p=\infty$ setzt man

$$M_\infty(r,f) := \max_{0\le\vartheta<2\pi} |f(re^{i\vartheta})|.$$

Betrachtet man zwei unterschiedliche Räume H^p und H^q mit $0<q<p\le\infty$, so ist $H^p\subset H^q$, wobei die Inklusion echt ist. Es besteht weiterhin eine Analogie zu den aus der Funktionalanalysis bekannten L^p-Räumen.

Definition 2.7. *Es sei X ein messbarer Raum mit Maß μ und $1\le p\le\infty$. Man sagt, dass die Funktion f in der Klasse L^p liegt, wenn f messbar ist und gilt*

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Bemerkung 2.8. Zur Vereinfachung soll die folgende Notation eingeführt werden. Für $\varphi\in L^p$ sei

$$\|\varphi\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.9}$$

und für $f\in H^p$ definiert man

$$\|f\|_p := M_p(1,f) := \lim_{r\to 1} M_p(r,f). \tag{2.10}$$

Diese Schreibweise soll auch für $p<1$ gelten, obwohl $\|\cdot\|_p$ in dem Fall keine Norm ist.
Nun gibt es für jede Funktion $f(re^{it})\in H^p$ fast überall eine Grenzfunktion $f(e^{it})\in L^p$. Zur Existenz von $M_p(1,f)$ betrachtet man den folgenden Satz.

Satz 2.9. *Es sei $f\in H^p$ mit $0<p<\infty$. Dann gilt*

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \tag{2.11}$$

und

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(e^{it})|^p dt = 0. \tag{2.12}$$

Beweis: (siehe auch [9])
Zunächst sei $p=2$. Für $f(z)=\sum_{n=1}^\infty a_n z^n \in H^2$ ist $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2<\infty$. Mit dem Lemma von

Fatou erhält man daraus

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(e^{it})|^2 dt &\leq \liminf_{\rho\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(\rho e^{it})|^2 dt \\ &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (1-r^n)^2 \to 0\end{aligned}$$

für $r \to 1$. Dies zeigt Gleichung (2.12) und somit auch (2.11) für $p = 2$.
Sei nun $f \in H^p$ mit $0 < p < \infty$. Dann kann f in der Form $f(z) = B(z)g(z)$ faktorisiert werden, wobei $B(z)$ ein Blaschke-Produkt ist und $g(z) \in H^p$ für $|z| < 1$ nicht verschwindet. Da $(g(z))^{\frac{p}{2}} \in H^2$ und $|B(z)| < 1$ für $|z| < 1$ gilt, folgt mit der bereits bewiesenen Aussage

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \leq \int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^p dt \to \int_0^{2\pi} |g(e^{it})|^p dt = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt.$$

Mit dem Lemma von Fatou folgt somit die Behauptung für (2.11) und Hilfsmittel aus der Maßtheorie liefern daraufhin (2.12). □

Weiterführend kann man nun eine Aussage beweisen, die die Räume H^p und L^p in Zusammenhang bringt.

Satz 2.10. *Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in H^p$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{r\to 1} f(re^{i\vartheta}) =: f^*(e^{i\vartheta})$ für fast alle $\vartheta \in [0; 2\pi[$ und es ist $f^* \in L^p$.*

Beweis: (siehe auch [9])
Sei $1 \leq p \leq \infty$, $f \in H^p$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $0 < \rho < 1$ sei $f_\rho(z) = f(\rho z)$ und ρ so gewählt, dass gilt

$$\|f_\rho - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Existenz des Ausdrucks wird dabei durch Satz 2.9 gewährleistet. Es sei nun $S_n(z)$ die n-te Partialsumme der Taylorreihenentwicklung von f um den Ursprung. Dann konvergiert $S_n(z) \to f(z)$ gleichmäßig für $|z| = \rho$. Also gilt für ein hinreichend großes n

$$\|S_{n_\rho} - f_\rho\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

und es folgt mit der Minkowski-Ungleichung

$$\|S_{n_\rho} - f\|_p \leq \|S_{n_\rho} - f_\rho\|_p + \|f_\rho - f\|_p < \varepsilon.$$

□

Bemerkung 2.11. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist H^p ein Banach-Raum. Weiterhin bildet die Menge der Grenzfunktionen f^* einen Unterraum von L^p und es gilt $\|f^*\|_{L^p} = \|f\|_{H^p}$.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es für jedes beschränkte lineare Funktional $\Phi(f)$ eine

Funktion $g \in L^q$, so dass für alle $f \in L^p$ das Funktional in der Gestalt

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) g(e^{it}) dt$$

eindeutig dargestellt werden kann, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $1 < p < \infty$ gelten muss.
Mit der obigen Bemerkung kann man diesen Sachverhalt auf H^p-Räume übertragen und erhält die folgende Formulierung.
Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in H^p$. Jedes beschränkte lineare Funktional kann in der Form

$$\phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) k(z) dz, \tag{2.13}$$

dargestellt werden, wobei für den Kern $k(e^{i\vartheta}) \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gelten muss. Die Existenz des Integrals wird dabei durch Satz 2.10 gewährleistet.

Definition 2.12. *Eine Funktion $h \in L^q$ heißt äquivalent zu einem gegebenen Kern k, wenn $h - k \in H^q$, also h und k dasselbe Funktional auf H^p bestimmen. Man schreibt $h \sim k$.*

Äquivalente Funktionen spielen in der anschließenden Betrachtung (z.B beim Beweis von Satz 2.21) eine entscheidende Rolle. Mit ihnen können gegebene Probleme geschickter dargestellt werden, da unterschiedliche, aber äquivalente Kerne keine Änderungen beim Funktional bewirken. Beschreibt ein lineares Funktional beispielsweise den Koeffizienten $a_n(f)$ (Konstruktion mittels Residuensatz, etc.), so kann das Funktional durch Wahl des Kerns in handlichere Form gebracht werden. Hierbei ist es aus abschätzungstechnischen Gründen häufig von Vorteil, wenn man Funktionen $f \in H^\infty$ betrachtet. Im Folgenden sei also $p = \infty$, bzw. $q = 1$.
Es sei nun ein Kern $k \in L^1$ gegeben und gesucht sei ein Funktional, das

$$\|\phi\| = \sup_{f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1} |\phi(f)| \tag{2.14}$$

erfüllt. Als Alternative kann man das zu (2.14) *duale Problem*

$$\sup_{f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} f(z) k(z) dz \right| = \min_{g \in H^1} \|k - g\|_1 \tag{2.15}$$

betrachten, um eine Funktion $g \in H^1$ zu suchen, die dem gegebenen Kern k am nächsten liegt. Gleichermaßen ist es auch möglich eine Funktion $h \sim k$ mit minimaler Norm suchen.
Dabei interessiert man sich häufig dafür, ob das Supremum angenommen wird und welches die dazugehörgie *Extremalfunktion* ist.
Eine Funktion $K(e^{i\vartheta}) \sim k(e^{i\vartheta})$ für die

$$\|K\|_1 = \inf_{h \sim k} \|h\|_1 = \inf_{g \in H^q} \|k - g\|_1 \tag{2.16}$$

gilt, heißt dabei *Extremalkern*. Um triviale Lösungen zu vermeiden, wird meist $k \notin H^1$ vorausgesetzt.

Bemerkung 2.13. Da nach Konstruktion für ein bestimmtes $\alpha \in [0; 2\pi[$ immer $|\phi(e^{i\alpha} f)| = |\phi(f)|$ gilt, führt man eine Normierung ein, damit man die Eindeutigkeit von Extremalfunktionen und -kernen behandeln kann. Dabei ist es naheliegend zu sagen, dass eine Funktion F Extremalfunktion ist, wenn

$$\phi(F) = \|\phi\| = \sup_{f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1} |\phi(f)|$$

gilt. Man spricht von einer *normierten Extremalfunktion.*

Lemma 2.14. *Damit eine Funktion $F \in H^\infty$ mit $\|F\| = 1$ und $\phi(F) > 0$ eine normierte Extremalfunktion und ein Kern K mit $K \sim k$ ein Extremalkern sein können, ist es notwendig und hinreichend, dass fast überall gilt*

$$e^{i\vartheta} K(e^{i\vartheta}) F(e^{i\vartheta}) \geq 0 \tag{2.17}$$

und

$$|F(e^{i\vartheta})| = 1 \textit{ fast überall auf } \{\vartheta \mid K(e^{i\vartheta}) \neq 0\}. \tag{2.18}$$

Beweis: Aus (2.16) und der Dualität geht hervor, dass genau dann F eine normierte Extremalfunktion und K ein Extremalkern sind, wenn $\phi(F) = \|K\|$ gilt. Das Lemma beschreibt somit die Bedingung, bei der in der Hölderschen Ungleichung Gleichheit eintritt. □

Aus diesem Lemma resultiert nun der

Satz 2.15. *Für jede Funktion $k(e^{i\vartheta}) \in L^1$ mit $k \notin H^1$ ist die Relation*

$$\sup_{f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1} |\phi(f)| = \inf_{g \in H^1} \|k - g\|_1$$

erfüllt, wobei ϕ definiert sei wie in Gleichung (2.13).
Weiterhin gibt es eine eindeutige normierte Extremalfunktion f, so dass gilt $\phi(f) > 0$, und das duale Extremalproblem hat eine eindeutige Lösung.

Beweis: (siehe auch [9])
Sei F eine normierte Extremalfunktion und K ein Extremalkern. Wegen $k \notin H^1$ muss $K(e^{i\vartheta})$ ungleich Null auf einer Menge E mit positivem Maß sein. Wegen Lemma 2.14 bestimmt K sowohl $\operatorname{sgn} F(e^{i\vartheta})$ als auch $|F(e^{i\vartheta})|$ fast überall auf E. Demzufolge stimmen alle normierten Extremalfunktionen auf einer Menge mit positivem Maß überein. Also ist F eindeutig bestimmt. Sei nun F eine feste normierte Extremalfunktion und K ein beliebiger Extremalkern. Nach (2.17) gilt

$$\operatorname{Re}\left(ie^{i\vartheta} F(e^{i\vartheta}) K(e^{i\vartheta})\right) = 0 \quad \text{fast überall.}$$

Betrachtet man $G = k - K$, so dass $G \in H^1$ und $h(z) = izF(z)G(z)$, dann gilt

$$\mathrm{Re}(h(e^{i\vartheta})) = \mathrm{Re}\left(ie^{i\vartheta}F(e^{i\vartheta})k(e^{i\vartheta})\right) \qquad \text{fast überall.}$$

Da jedoch $h \in H^1$ und $h(0) = 0$ gilt, wird $h(z)$ vollständig durch $\mathrm{Re}(h(e^{i\vartheta}))$ mit der Poissonformel bestimmt. Demnach sind G und somit auch K eindeutig bestimmt, wenn eine Extremalfunktion F existiert.
Die Existenz kann durch verschiedene Beispiele gezeigt werden. □

2.3 Eine Vermutung von Livingston

A.E. Livingston vermutete in [12] für Funktionen $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C}o_p$, $p \in]0;1[$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{Re}(a_n) \geq \frac{1 + p^{2n}}{p^{n-1}(1 + p^2)}$$

und bewies dies für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$. Es ist anzumerken, dass dieser Sachverhalt für $n = 2$ bereits in der unteren Abschätzung von Satz 1.22 behandelt wurde. An dieser Stelle soll eine leicht abgeänderte Form der Vermutung bewiesen werden.
Als Vorbereitung wird der folgende Satz benötigt. Dieser liefert eine Abschätzung für den Realteil eines Punktes c außerhalb des konkaven Bildgebietes.

Satz 2.16. *Es sei $f \in \mathcal{C}o_p$, $p \in]0;1[$ und $c \in \hat{\mathbb{C}} \setminus f(\mathbb{D})$. Dann ist*

$$-\frac{p}{(1-p)^2} \leq \mathrm{Re}(c) \leq -\frac{p}{(1+p)^2}. \tag{2.19}$$

Gleichheit in (2.19) erreicht man genau dann, wenn

$$f_e(z) = \frac{z}{(1 - \frac{z}{p})(1 - zp)} \tag{2.20}$$

und $c = f(1)$ in der linken, bzw. $c = f(-1)$ in der rechten Ungleichung gilt.

Beweis: (siehe auch [2])
Zunächst ist nach Voraussetzung $f(\mathbb{D})$ konkav. Somit ist $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(\mathbb{D})$ konvex und folglich auch sternförmig bezüglich c. Weiterhin besitzt f einen einfachen Pol im Punkt p und ist nach (2.1) normiert. Die Funktion

$$F(z) := \frac{(1 - \frac{z}{p})(1 - zp)f'(z)}{f(z) - c}$$

bzw. ihre holomorphen Fortsetzung auf $\mathbb{D}$ hat dann die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathrm{Re}(F(z)) > 0$ für $z \in \mathbb{D}$ (vgl. Korollar 1.20).
2. $F(0) = -\frac{1}{c}$ und $F(p) = \frac{1-p^2}{p}$.

Für die zweite Gleichheit unter 2. betrachtet man die Laurententwicklung von f um p. Man erhält

$$\begin{aligned}\lim_{z\to p}\frac{-f'(z)(z-p)(1-zp)}{(f(z)-c)p} &= \lim_{z\to p}\frac{\left(\frac{a_{-1}}{(z-p)^2}-a_1+...\right)(z-p)(1-zp)}{\left(\frac{a_{-1}}{z-p}+a_0+...-c\right)p}\\ &= \lim_{z\to p}\frac{(a_{-1}-a_1(z-p)+...)(1-zp)}{(a_{-1}+a_0(z-p)+...-c(z-p))\,p}=\frac{1-p^2}{p}.\end{aligned}$$

Es sei nun $c=x+iy$. Damit $\mathrm{Re}(F(0))=\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{c}\right)>0$ sein kann, muss $x<0$ gelten. Weiterhin folgt aus den Eigenschaften, dass eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion ϕ existiert, die $\phi(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$, $\phi(0)=0$ und

$$-\frac{F(z)(x^2+y^2)-iy}{x}=\frac{1-\phi(z)}{1+\phi(z)}$$

für $z\in\mathbb{D}$ erfüllt. Somit gibt es auch eine Funktion Φ, die holomorph in $\mathbb{D}$ mit $\Phi(\mathbb{D})\subset\overline{\mathbb{D}}$ ist, für die mit $z\in\mathbb{D}$ gilt

$$-\frac{F(z)(x^2+y^2)-iy}{x}=\frac{1-z\Phi(z)}{1+z\Phi(z)}.$$

Für den Fall $z=p$ erhält man daraus

$$-\frac{\frac{1-p^2}{p}(x^2+y^2)-iy}{x}=\frac{1-p\Phi(p)}{1+p\Phi(p)}.$$

Hieraus folgt, dass es für jedes $c=x+iy\in\hat{\mathbb{C}}\backslash f(\mathbb{D})$ ein $w\in\overline{\mathbb{D}}$ gibt, sodass gilt

$$-\frac{\frac{1-p^2}{p}(x^2+y^2)-iy}{x}=\frac{1-pw}{1+pw}=:u+iv, \tag{2.21}$$

wobei $u+iv$ durch

$$\begin{aligned}
& & 1-p\omega &= (u+iv)(1+p\omega)\\
&\Leftrightarrow & 1-(u+iv) &= (u+1+iv)p\omega\\
&\Rightarrow & \left|\frac{1-(u+iv)}{p(u+1+iv)}\right|^2 &= |\omega|^2\le 1\\
&\Leftrightarrow & (1-u+iv)(1-u-iv) &\le p^2(u+1+iv)(u+1-iv)\\
&\Leftrightarrow & 1-2u+u^2+v^2 &\le p^2(u^2+2u+1+v^2)\\
&\Leftrightarrow & (1-p^2)\left(1+u^2-2u\frac{1+p^2}{1-p^2}+v^2\right) &\le 0\\
&\Leftrightarrow & \left(u-\frac{1+p^2}{1-p^2}\right)^2+1-\left(\frac{1+p^2}{1-p^2}\right)^2+v^2 &\le 0\\
&\Leftrightarrow & \left(u-\frac{1+p^2}{1-p^2}\right)^2+v^2 &\le \left(\frac{2p}{1-p^2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(\frac{(1+p)^2}{1-p^2}-u\right)\left(-\frac{(1-p)^2}{1-p^2}+u\right) \geq v^2 \geq 0 \tag{2.22}$$

beschrieben wird.
Mithilfe eines Koeffizientenvergleichs in (2.21) erhält man weiterhin zum einen

$$y = xv \tag{2.23}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} & -\frac{1-p^2}{px}(x^2+y^2) = u \\ \Leftrightarrow \quad & -(1-p^2)(x+xv^2) = up \\ \Leftrightarrow \quad & x = -\frac{up}{(1-p^2)(1+v^2)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Kombiniert man (2.22) und (2.24), erhält man

$$-\frac{\frac{1+p}{1-p}p}{(1-p)(1+p)} = -\frac{p}{(1-p)^2} \leq x \leq -\frac{\frac{1-p}{1+p}p}{(1-p)(1+p)} = -\frac{p}{(1+p)^2},$$

also die Behauptung. Die geforderte Gleichheit in der linken Ungleichung folgt genau dann, wenn

$$u = \frac{1+p}{1-p} \quad \text{und} \quad v = 0, \tag{2.25}$$

und für die rechte Seite genau dann, wenn

$$u = \frac{1-p}{1+p} \quad \text{und} \quad v = 0 \tag{2.26}$$

gilt. Wegen (2.25) gilt $\Phi(p) = -1$ und nach dem Maximumprinzip somit $\Phi \equiv -1$ und für den anderen Fall $\Phi \equiv 1$. Das resultierende Anfangswertproblem

$$\frac{(1-\frac{z}{p})(1-zp)f'(z)}{f(z)-\frac{p}{(1-p)^2}} = \frac{1+z}{1-z}, \qquad f(0) = 0,$$

wird dabei durch f_e aus Gleichung (2.20) gelöst. $\square$

Satz 2.17. *Es sei $p \in]0;1[$, $f \in \mathcal{C}o_p$ und $n \geq 2$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\mathrm{Re}(a_n(f)) \geq \frac{1+p^{2n}}{p^{n-1}(1+p)^2}. \tag{2.27}$$

Bemerkung 2.18. Die in Satz 2.17 angegebene Abschätzung ist im Vergleich zu der ursprünglichen Vermutung um den Faktor

$$\frac{1+p^2}{(1+p)^2} \in]\frac{1}{2};1[$$

schlechter.

Beweis: (siehe auch [2])
Für $n \geq 2$ ist die durch

$$h(z) := \begin{cases} \left(1 - z^n \left(p^n + \frac{1}{p^n}\right) + z^{2n}\right) f(z) & \text{für } z \in \mathbb{D} \backslash \{p\}, \\ \lim_{0<|w-p|\to 0} h(w) & \text{für } z = p \end{cases}$$

definierte Funktion beschränkt und holomorph in $\mathbb{D}$. Deshalb existieren nach dem Satz 2.10 die Grenzwerte $\lim_{r\to 1} h(re^{i\vartheta})$ und $\lim_{r\to 1} f(re^{i\vartheta})$ für fast alle $\vartheta \in [0; 2\pi[$. Weiterhin ist auch $a_n(h) = a_n(f)$.
Nach Satz 2.9 gilt dann

$$\int_0^{2\pi} \left|h(re^{i\vartheta}) - h(e^{i\vartheta})\right| d\vartheta \to 0 \text{ für } r \to 1^-.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} a_n(f) = a_n(h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\vartheta}) e^{-in\vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \left(e^{-in\vartheta} + e^{in\vartheta} - p^n - \frac{1}{p^n}\right) d\vartheta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \left(p^n + \frac{1}{p^n} - 2\cos(n\vartheta)\right) d\vartheta. \end{aligned}$$

Wendet man nun die rechte Abschätzung von (2.19) in Satz 2.16 auf $c = f(e^{i\vartheta})$ an, so erhält man

$$\mathrm{Re}(f(e^{i\vartheta})) \leq \frac{-p}{(1+p)^2}$$

womit folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(a_n(f)) &\geq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-p}{(1+p)^2} \left(p^n + \frac{1}{p^n} - 2\cos(n\vartheta)\right) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+p^{2n}}{p^{n-1}(1+p)^2} d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2p}{(1+p)^2} \cos(n\vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{1+p^{2n}}{p^{n-1}(1+p)^2}. \end{aligned}$$

□

2.4 Weiterführung der Vermutung von Livingston

Es wurde von J. Miller in [14] gezeigt, dass für Funktionen $f \in \mathcal{C}o_p$ das folgende Lemma gültig ist.

Lemma 2.19. *Es sei $f \in \mathcal{C}o_p$, $p \in]0;1[$ und $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Dann gilt*

$$\left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} + \frac{1+p^2}{p} \right| \leq 1. \tag{2.28}$$

Beweis: (siehe auch [14])
Es sei z, $\zeta \in \mathbb{D}$. Aus Korollar 1.21 ist bekannt, dass eine Funktion P, die durch

$$-P(z) = \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} + \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{z+p}{z-p} - \frac{1+pz}{1-pz}$$

definiert ist, stets positiven Realteil besitzt und $P(0) = 1$ gilt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} P'(z) = &-\frac{2f'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{2zf''(z)}{f(z)-f(\zeta)} + \frac{2zf'(z)}{(f(z)-f(\zeta))^2} \\ &-\frac{1}{\zeta-z} - \frac{\zeta+z}{(\zeta-z)^2} - \frac{1}{z-p} + \frac{z+p}{(z-p)^2} + \frac{p}{1-pz} + \frac{p+p^2z}{(1-pz)^2} \end{aligned}$$

womit man für $\zeta \neq 0$

$$P'(0) = \frac{2}{f(\zeta)} - 2\frac{1}{\zeta} + 2\frac{1}{p} + 2p$$

also für die Taylorreihenentwicklung von P um den Ursprung

$$P(z) = 1 + \left(\frac{1}{f(\zeta)} - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{p} + p \right) 2z + \ldots$$

erhält. Mit Lemma 1.6 folgt die Behauptung. □

Hiermit lässt sich eine weitere Aussage beweisen, die für folgende Betrachtungen hilfreich sein wird.

Lemma 2.20. *Es sei $f \in \mathcal{C}o_p$, $p \in]0;1[$, dann gibt es eine holomorphe Funktion $\omega : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, so dass für $z \in \mathbb{D}$*

$$f(z) = \frac{z - \frac{p}{1+p^2}(1+\omega(z))z^2}{\left(1 - \frac{z}{p}\right)(1-zp)} \tag{2.29}$$

gilt.

Beweis: (siehe auch [4])
Setzt man

$$\omega(z) = \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} + \frac{1+p^2}{p}, \tag{2.30}$$

so besitzt ω aufgrund der Eigenschaften von f eine holomorphe Fortsetzung sowohl im Ursprung als auch in p, wobei $\omega(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1+p^2}{p} = p$ ist. Mit Lemma 2.19 folgt $\omega(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Somit gibt es eine holomorphe Funktion v mit $v(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, so dass gilt

$$\omega(z) = \frac{p + \frac{z-p}{1-zp}v(z)}{1 + p\frac{z-p}{1-zp}v(z)}.$$

Mit Gleichung (2.30) erhält man daraus

$$f(z) = \frac{zp\left(1 + p\frac{z-p}{1-zp}v(z)\right)}{zp^2 + zp\frac{z-p}{1-zp}v(z) + p + p^2\frac{z-p}{1-zp}v(z) - (1+p^2)z\left(1 + p\frac{z-p}{1-zp}v(z)\right)}$$

Dabei lässt sich der Nenner schreiben als

$$\begin{aligned}
& zp^2 + zp\frac{z-p}{1-zp}v(z) + p + p^2\frac{z-p}{1-zp}v(z) - (1+p^2)z\left(1 + p\frac{z-p}{1-zp}v(z)\right) \\
= \; & zp^2(1-zp) + zp(z-p)v(z) + p(1-zp) + p^2(z-p)v(z) \\
& \qquad -(1+p^2)z(1-zp) - (1+p^2)zp(z-p)v(z) \\
= \; & (1-zp)(zp^2 + p - z - zp^2) + v(z)(z-p)(zp + p^2 - zp - zp^3) \\
= \; & p(1-zp)(1-\frac{z}{p}) - v(z)p^3(1-\frac{z}{p})(1-zp) \\
= \; & p(1-zp)(1-\frac{z}{p})(1-p^2v(z)).
\end{aligned}$$

Also ist

$$f(z) = z\frac{1 - zp + p(z-p)v(z)}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)(1-p^2v(z))}. \tag{2.31}$$

Schreibt man nun v in der Form

$$v(z) = \frac{p^2 - \omega(z)}{1 - p^2\omega(z)}$$

und setzt dies in Gleichung (2.31) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z - zp^2\omega(z) - z^2p(1-p^2\omega(z)) + zp(z-p)(p^2-\omega(z))}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)(1-p^2\omega(z) - p^2(p^2-\omega(z)))} \\
&= \frac{z(1-p^4) + z^2(p^3-p) + \omega(z)(z^2p^3 - zp^2 - z^2p + p^2z)}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)(1-p^2)(1+p^2)} \\
&= \frac{z + z^2p\left(\frac{p^2-1}{(1-p^2)(1+p^2)} + \omega(z)\frac{p^2-1}{(1-p^2)(1+p^2)}\right)}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)},
\end{aligned}$$

also Gleichung (2.29). □

Mit dieser Aussage kann man eine verschärfte Fassung des Satzes 2.17 beweisen.

Satz 2.21. *Es sei* $f \in \mathcal{C}o_p$, $p \in]0;1[$ *und* $n \geq 2$. *Dann gilt*

$$\left| a_n(f) - \frac{1-p^{2n+2}}{p^{n-1}(1-p^4)} \right| \leq \frac{p^2(1-p^{2n-2})}{p^{n-1}(1-p^4)}. \tag{2.32}$$

Beweis: (siehe auch [4])
Man betrachte die Funktion

$$g(z) = \frac{z - \frac{pz^2}{1+p^2}}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)}.$$

Dann ergibt sich mittels Polynomdivision

$$\begin{aligned}
g'(0) &= 1 \\
\frac{g''(0)}{2} &= \frac{p^2+1}{p} + \frac{-p}{1+p^2} = \frac{p^4+p^2+1}{p(1+p^2)} = \frac{1-p^6}{p(1-p^4)} \\
\frac{g^{(3)}(0)}{3!} &= \frac{1-p^6}{p(1-p^4)}\frac{p^2+1}{p} - 1 = \frac{1-p^8}{p^2(1-p^4)}
\end{aligned}$$

und im Allgemeinen

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\frac{p^2+1}{p} - \frac{g^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{g^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{1-p^{2(n-1)+2}}{p^{n-2}(1-p^4)} \cdot \frac{p^2+1}{p} - \frac{1-p^{2(n-2)+2}}{p^{n-3}(1-p^4)} \\
&= \frac{1}{(1-p^4)p^{n-1}}\left((1-p^{2n})(p^2+1) - p^2(1-p^{2n-2})\right) \\
&= \frac{1}{(1-p^4)p^{n-1}}\left(1-p^{2n}+p^2-p^{2n+2}-p^2+p^{2n}\right) \\
&= \frac{1-p^{2n+2}}{p^{n-1}(1-p^4)}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$g(z) = \frac{z - \frac{pz^2}{1+p^2}}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-p^{2n+2}}{p^{n-1}(1-p^4)} z^n, \ |z| < p.$$

Weiterhin sei die Funktion h durch

$$h(z) = g(z) - f(z) = \frac{\frac{pz^2}{1+p^2}\omega(z)}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\omega) z^n, \ |z| < p$$

gegeben, wobei $f(z)$ aus Gleichung (2.29) in Lemma 2.20 stammt und ω eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion mit $\omega(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ ist.

Für die Behauptung bleibt zu zeigen, dass gilt

$$|b_n(\omega)| \leq \frac{p^2(1-p^{2n-2})}{p^{n-1}(1-p^4)}. \tag{2.33}$$

Mit $\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ergibt sich nun

$$h(z) = \frac{pc_0}{1+p^2} z^2 + \left(c_0 + \frac{pc_1}{1+p^2}\right) z^3 + \left(\frac{(1-p^6)c_0}{(1-p^4)p} + c_1 + \frac{pc_2}{1+p^2}\right) z^4 + \ldots$$

also

$$b_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-2} c_k \frac{p^2}{p^{n-k-1}} \frac{1-p^{2(n-k)-2}}{1-p^4}.$$

Setzt man hierbei $m = n-2$ und kürzt die konstanten Faktoren, so ergibt sich die zu (2.33) äquivalente Formulierung

$$\begin{aligned}
& \left|\sum_{k=0}^{n-2} c_k \frac{p^2}{p^{n-k-1}} \frac{1-p^{2(n-k)-2}}{1-p^4}\right| \leq \frac{p^2(1-p^{2n-2})}{p^{n-1}(1-p^4)} \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\sum_{k=0}^{n-2} c_k \frac{1-p^{2(n-k)-2}}{p^{n-k-1}}\right| \leq \frac{(1-p^{2n-2})}{p^{n-1}} \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\sum_{k=0}^{m} c_k \frac{1-p^{2(m-k)+2}}{p^{m-k}}\right| \leq \frac{1-p^{2m+2}}{p^m}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Um die Gültigkeit von Gleichung (2.34) zu zeigen, führt man sie auf das Problem linearer Funktionale in H^p-Räumen zurück, die in Abschnitt 2.2 behandelt wurden.
Betrachtet man auf H^∞ das lineare Funktional

$$\Phi_m(\omega) = \sum_{k=0}^{m} c_k \frac{1-p^{2(m-k)+2}}{p^{m-k}}, \tag{2.35}$$

bleibt

$$|\Phi_m(\omega)| \leq \frac{1-p^{2m+2}}{p^m} \tag{2.36}$$

zu zeigen.
Setzt man als Kern

$$\kappa_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1-p^{2(m-k)+2}}{p^{m-k}} z^{-k-1}, \tag{2.37}$$

so erhält man mit dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \omega(z) \kappa_m(z) dz = \sum_{k=0}^{m} c_k \frac{1-p^{2(m-k)+2}}{p^{m-k}} = \Phi_m(\omega).$$

Verschiebt man in (2.37) die Indizes um $k = m - l$ und wählt

$$K_m(z) = z^{-m-1} P_m(z) \tag{2.38}$$

mit

$$P_m(z) = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1-p^{2l+2}}{p^l} \left(z^l + z^{2m-l} \right) + \frac{1-p^{2m+2}}{p^m} z^m, \;\; m \geq 0, \tag{2.39}$$

so erhält man einen zu κ_m äquivalenten Kern K_m, der dasselbe lineare Funktional erzeugt. Man betrachtet nun trigonometrische Polynome Q_m mit $m \geq 0$ und $\vartheta \in [0, 2\pi]$ der Form

$$\begin{aligned} Q_m(\vartheta) &= e^{-im\vartheta} P_m(e^{i\vartheta}) \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1-p^{2l+2}}{p^l} \left(e^{-i\vartheta(m-l)} + e^{i\vartheta(m-l)} \right) + \frac{1-p^{2m+2}}{p^m} \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1-p^{2l+2}}{p^l} 2\cos((m-l)\vartheta) + \frac{1-p^{2m+2}}{p^m}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Es sei nun

$$\Lambda(z) = \frac{1}{2} \frac{1-p^2}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)} \left(\frac{1+e^{i\vartheta}z}{1-e^{i\vartheta}z} + \frac{1+e^{-i\vartheta}z}{1-e^{-i\vartheta}z} \right)$$

mit z, ϑ und m wie bisher. Mit

$$\begin{aligned} \frac{1+e^{i\vartheta}z}{1-e^{i\vartheta}z} + \frac{1+e^{-i\vartheta}z}{1-e^{-i\vartheta}z} &= \frac{2-2z^2}{1-z\left(e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}\right)+z^2} \\ &= \frac{1-z^2}{\frac{1}{2} - z\cos\vartheta + \frac{1}{2}z^2} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= \frac{1}{2} \frac{(1-p^2)(1-z^2)}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)(1-e^{i\vartheta}z)(1-e^{-i\vartheta}z)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-p^2}{1-\left(\frac{p^2+1}{p}z\right)+z^2} \cdot \frac{1-z^2}{\frac{1}{2} - z\cos\vartheta + \frac{1}{2}z^2} \\ &= \frac{1-p^2-(1-p^2)z^2}{1-\left(\frac{p^2+1}{p}+2\cos\vartheta\right)z + 2\left(1+\cos\vartheta\frac{p^2+1}{p}\right)z^2 - \left(\frac{p^2+1}{p}+2\cos\vartheta\right) + z^4}. \end{aligned}$$

Polynomdivision ergibt dann

$$\Lambda(z) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(\vartheta) z^m.$$

Nach Partialbruchzerlegung an den Polstellen $z_1 = p$, $z_2 = 1/p$, $z_3 = e^{i\vartheta}$ und $z_4 = e^{-i\vartheta}$ und anschließender Entwicklung der einzelnen Brüche um den Ursprung erhält man

$$Q_m(\vartheta) = \frac{(1-p^2)(1+p^{2m+2}-2p^{m+1}\cos((m+1)\vartheta))}{p^m(1+p^2-2p\cos(\vartheta))}.$$

Dieser Ausdruck ist für $m \geq 0$ stets positiv.
Nun gilt

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta}K_m(e^{i\vartheta}) &\overset{(2.38)}{=} e^{-im\vartheta}P_m(e^{i\vartheta}) \\ &\overset{(2.40)}{=} Q_m(\vartheta). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Berücksichtigt man weiterhin $\|\omega\|_\infty \leq 1$, so erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{m} c_k \frac{1-p^{2(m-k)+2}}{p^{m-k}}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \omega(z)\kappa_m(z)dz\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \omega(z)K_m(z)dz\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|e^{i\vartheta}K_m(e^{i\vartheta})\right| d\vartheta \|\omega\|_\infty \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_m(\vartheta)d\vartheta\|\omega\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_m(\vartheta)d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} K_m(z)dz \overset{(2.39)}{=} \frac{1-p^{2m+2}}{p^m}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Dies ist gerade (2.34) und somit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.22. Betrachtet man die Funktion $\omega \equiv 1$, so erhält man in (2.42) an jeder Stelle Gleichheit und in Kombination mit (2.41) ist die Bedingung von Lemma 2.14 erfüllt. Wendet man auf Φ_m aus (2.35) die Theorie für Extremalprobleme für lineare Funktionale an, gibt es nach Satz 2.15 eine eindeutige normierte Extremalfunktion ω_e, so dass gilt

$$\max\{|\Phi_m(\omega)| | \omega \in H^\infty,\ \|\omega\|_\infty \leq 1\} = \Phi_m(\omega_e),$$

wobei nach obiger Überlegung in diesem speziellen Fall $\omega_e \equiv 1$ gilt. Nach Bemerkung 2.13 ergibt sich in Abschätzung (2.34) genau dann Gleichheit, wenn man als allgemeine Extremalfunktion $\omega \equiv e^{i\vartheta}$ mit einem $\vartheta \in [0, 2\pi[$ wählt. Demnach herrscht genau dann Gleichheit in (2.32) für konkave Funktion der Gestalt

$$f_\vartheta(z) = \frac{z - \frac{p}{1+p^2}(1+e^{i\vartheta})z^2}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)}. \tag{2.43}$$

3 Koeffizientenabschätzungen konkaver Funktionen in einer Umgebung der Polstelle

In dem vorherigen Kapitel wurden konkave Funktionen $f \in \mathcal{C}o_p$ in einer Kreisscheibe um den Ursprung betrachtet, in der ihre Taylorreihe existierte. Nun soll die Betrachtung erweitert werden, indem man die einfache Polstelle $p \in]0;\ 1[$ der Funktion stärker in Betracht zieht. Dies geschieht durch den Übergang von der Taylorreihenentwicklung zur Laurentreihenentwicklung um diesen einfachen Pol.
Im folgenden werden also konkave Funktionen $f \in \mathcal{C}o_p$ der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(f)\,(z-p)^n \tag{3.1}$$

mit $|z-p| < 1-p$ betrachtet. Hierbei sollen, wie bei den bisherigen Betrachtungen, Abschätzungen für die Koeffizienten der Reihe eine zentrale Rolle spielen.

3.1 Das Residuum konkaver Funktionen

Zunächst soll genauer auf das Residuum eingegangen werden.

Satz 3.1. *Es sei* $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n\,(z-p)^n \ \in \mathcal{C}o_p$ *mit* $p \in]0;\ 1[$*. Dann gilt für das Residuum* a_{-1} *der Funktion* f

$$\left| a_{-1} + \frac{p^2}{1-p^4} \right| \leq \frac{p^4}{1-p^4}. \tag{3.2}$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn für $\vartheta \in [0;\ 2\pi]$ *gilt*

$$f_\vartheta(z) = \frac{z - \frac{p}{1+p^2}(1+e^{i\vartheta})z^2}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)}. \tag{3.3}$$

Das Residuum ist in diesem Fall

$$a_{-1} = -\frac{p^2}{1-p^4} + \frac{p^4}{1-p^4}e^{i\vartheta}. \tag{3.4}$$

Beweis: (siehe auch [19])

Nach Lemma 2.19 gilt für eine konkave Funktion $f \in \mathcal{C}o_p$ und $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$

$$\left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} + \frac{1+p^2}{p} \right| \leq 1.$$

Setzt man nun wie auch im Beweis von Lemma 2.20

$$\omega(z) = \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} + \frac{1+p^2}{p}, \tag{3.5}$$

so folgt wegen $|\omega(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$ mit dem Schwarzschen Lemma und $\omega(p) = p$

$$|\omega'(p)| \leq \frac{1 - |\omega(p)|^2}{1 - p^2} = 1. \tag{3.6}$$

Hierbei erhält man Gleichheit genau dann, wenn ω ein holomorpher Automorphismus von $\mathbb{D}$ mit Fixpunkt in p ist.
Berechnet man nun $\omega'(p)$ aus Gleichung (3.5), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\omega'(z) &= \frac{-f'(z)}{f^2(z)} + \frac{1}{z^2} \\
&= \frac{-\left(\frac{-a_{-1}}{(z-p)^2} + a_1 + \ldots\right)}{\left(\frac{a_{-1}}{z-p} + a_0 + \ldots\right)^2} + \frac{1}{z^2} \\
&= \frac{a_{-1} - a_1(z-p)^2 + \ldots}{(a_{-1} + a_0(z-p) + \ldots)^2} + \frac{1}{z^2} \\
\omega'(p) &= \frac{1}{a_{-1}} + \frac{1}{p^2},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

wie man aus der Reihendarstellung erkennen kann.
In Zusammenhang mit Gleichung (3.6) erhält man daraus

$$\left| \frac{1}{a_{-1}} + \frac{1}{p^2} \right| \leq 1.$$

Dies führt zum einen zu

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{a_{-1}} \right| \leq \frac{1}{p^2} + 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |a_{-1}| \geq \frac{p^2}{1+p^2} = \frac{p^2 - p^4}{1 - p^4}
\end{aligned}$$

und zum anderen zu

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{a_{-1}} \right| \geq \frac{1}{p^2} - 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |a_{-1}| \leq \frac{p^2}{1-p^2} = \frac{p^2 + p^4}{1 - p^4}
\end{aligned}$$

also Gleichung (3.2), was den ersten Teil der Behauptung zeigt.
Betrachtet man nun

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z\to p}(z-p)f_\vartheta(z) = \frac{p^2 - \frac{p^4}{1+p^2}(1+e^{i\vartheta})}{-(1-p^2)} \\ &= -\frac{p^2}{1-p^4} + \frac{p^4}{1-p^4}e^{i\vartheta}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

so folgt auch der zweite Teil. □

Bemerkung 3.2. Gleichheit in (3.4) erhält man auch genau dann, wenn ein $\varphi \in [0, 2\pi[$ existiert, so dass in Gleichung (3.7), bzw (3.6)

$$\omega(z) = \frac{p + e^{i\varphi}\frac{z-p}{1-zp}}{1 + pe^{i\varphi}\frac{z-p}{1-zp}} \tag{3.9}$$

gewählt werden kann.
Berechnet man f aus Gleichung (3.5) und (3.9), so erhält man die Grenzfunktion f_ϑ, wobei

$$e^{i\vartheta} = \frac{p^2 - e^{i\varphi}}{1 - p^2 e^{i\varphi}}$$

gesetzt werden muss. Diese Grenzfunktion wurde bereits in Bemerkung 2.22 als Extremalfunktion verwendet.

3.2 Abschätzungen für den Koeffizienten a_0

Im Folgenden soll eine genauere Betrachtung des Koeffizienten a_0 der Laurententwicklung konkaver Funktionen erfolgen. Dabei werden häufig Aussagen über das Residuum zur Hilfe genommen, die bereits in Abschnitt 3.1 gemacht wurden.
Zunächst wird jedoch der folgende Hilfssatz benötigt.

Hilfssatz 3.3. *Es sei $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{S}_p$ eine schlichte Funktion mit einfachem Pol in $p \in]0;1[$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$|b_n| \le \frac{1 + p^2 + \ldots + p^{2n-2}}{p^{n-1}}. \tag{3.10}$$

Beweis: (siehe auch [11])
Es sei $E(p) = \mathbb{D}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid p \le z < 1\}$ mit $p \in]0;1[$ das Schlitzgebiet, das durch Entnahme des Stückes $[p;1[$ vom Einheitskreis entsteht. Dann bildet die Funktion

$$k(z) = \frac{(1+p)^2}{4p}z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

$E(p)$ auf $\mathbb{D}$ ab, wobei $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
Betrachtet man nun eine schlichte Funktion $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$, so ist

$$\frac{4p}{(1+p)^2} g(k(z)) \in \mathcal{S}_p. \tag{3.11}$$

Umgekehrt besitzt jede Funktion $f \in \mathcal{S}_p$ eine derartige Darstellung.
Sei nun $g(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. Dann bildet $\frac{4p}{(1+p)^2} g(k(z))$ den Einheitskreis auf die Sphäre mit einem Schlitz entlang der negativen reellen Achse ab. Demzufolge kann die Funktion auch durch $\frac{z}{1-(p+\frac{1}{p})z+z^2}$ beschrieben werden. Diese Funktion hat um den Ursprung die Entwicklung

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + p^2 + ... + p^{2n-2}}{p^{n-1}} z^n.$$

Weiterhin sei $\frac{4p}{(1+p)^2} gk(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{b}_n z^n$. Dann sind die $\tilde{b}_n$ Linearkombinationen der a_k mit $k \geq 2$ in der Form

$$\tilde{b}_n = \sum_{l=2}^{n} \lambda_l^{(n)} a_l + \lambda_1^{(n)},$$

wobei die $\lambda_l^{(n)}$ nichtnegative Polynome in c_n sind. Mit der Bieberbachschen Vermutung folgt dann

$$|\tilde{b}_n| \leq \sum_{l=2}^{n} \lambda_l^{(n)} |a_l| + \lambda_1^{(n)} \leq \sum_{l=2}^{n} l\lambda_l^{(n)} + \lambda_1^{(n)} = \frac{1 + p^2 + ... + p^{2n-2}}{p^{n-1}}.$$

Da nun nach Konstruktion zu jeder Funktion $f \in \mathcal{S}_p$ eine Darstellung der Form (3.11) existiert, kann man $b_n = \tilde{b}_n$ setzen, womit die Behauptung folgt. □

Nun kann eine Aussage bezüglich des Koeffizienten a_0 in Abhängigkeit vom Residuum getroffen werden.

Satz 3.4. *Es sei $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-p)^n \in \mathcal{C}o_p$ mit $p \in]0;1[$. Dann gilt*

$$\left| p + \frac{a_0(1-p^2)}{a_{-1}} \right| \leq \frac{1+p^2}{p}, \tag{3.12}$$

wobei die Abschätzung scharf ist.

Beweis: (siehe auch [12])
Man definiere

$$h(z) = \frac{-a_{-1}}{(1-p^2) f\left(\frac{p-z}{1-pz}\right)}.$$

Aufgrund der Eigenschaften von f ist $h \in \mathcal{S}_p$.

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned}
h(0) &= \left.\frac{-a_{-1}}{(1-p^2)f(\zeta)}\right|_{\zeta=p} = 0 \\
h'(z) &= \frac{-a_{-1}}{(1-pz)^2}\frac{f'\left(\frac{p-z}{1-pz}\right)}{f^2\left(\frac{p-z}{1-pz}\right)} \\
h'(0) &= \left.\frac{-a_{-1}\left(-a_{-1}\frac{1}{(\zeta-p)^2}+a_1+...\right)}{\left(a_{-1}\frac{1}{\zeta-p}+a_0+...\right)^2}\right|_{\zeta=p} \\
&= \left.\frac{a_{-1}^2+a_{-1}a_1(\zeta-p)^2+...}{(a_{-1}+a_0(\zeta-p)+...)^2}\right|_{\zeta=p} = 1 \\
h''(0) &= 2p+\frac{2a_0(1-p^2)}{a_{-1}}.
\end{aligned}$$

Für $|z-p|<1-p$ gilt dann

$$h(z) = z + \left(p + \frac{(1-p^2)a_0}{a_{-1}}\right)z^2 + ...$$

und man erhält mit dem Hilfssatz 3.3 und $n=2$

$$\left|p+\frac{(1-p^2)a_0}{a_{-1}}\right| \leq \frac{1+p^2}{p}$$

also die Behauptung.
Gleichheit erreicht man durch die aus Satz 2.16 bekannte Extremalfunktion

$$f_e(z) = \frac{z}{(1-\frac{z}{p})(1-pz)}. \tag{3.13}$$

□

Kombiniert man nun die Sätze 3.1 und 3.4, so lässt sich die folgende Aussage beweisen.

Satz 3.5. *Es sei $f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty} a_n\,(z-p)^n \in \mathcal{C}o_p$ und $p\in]0;1[$. Dann gilt*

$$\operatorname{Re} a_0 \geq -\frac{p}{(1-p^2)^2}. \tag{3.14}$$

Beweis: (siehe auch [7])
Nach Satz 3.4 gibt es für jede Funktion $f\in\mathcal{C}o_p$ eine Zahl $\zeta\in\overline{\mathbb{D}}$, so dass gilt

$$a_0 = \frac{a_{-1}}{1-p^2}\left(-p+\zeta\frac{1+p^2}{p}\right). \tag{3.15}$$

Da der kleinst mögliche Realteil gesucht ist, genügt es Stellen $\zeta=e^{i\vartheta}$ mit $\vartheta\in[0,2\pi]$ und a_{-1}

wie in (3.2) zu berücksichtigen. Gesucht ist also das Minimum des Ausdrucks

$$\frac{-p}{(1-p^4)(1-p^2)}\left((1+p^2)\cos\vartheta - p^2\right) - \frac{p^3}{(1-p^4)(1-p^2)}\left((1+p^2)^2\sin^2\vartheta + \left((1+p^2)\cos\vartheta - p^2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man nun $x = \cos\vartheta \in [-1;1]$ und leitet nach x ab, so findet sich kein lokales Extremum im Intervall $]-1;1[$. Dementsprechend wird das Minimum für $\zeta = 1$ und $a_{-1} = \frac{-p^2}{1-p^2}$ angenommen, was die Behauptung zeigt. $\square$

Bemerkung 3.6. Aus dem Beweis zu Satz 3.1 ist bekannt, dass $a_{-1} = \frac{-p^2}{1-p^2}$ genau dann gilt, wenn in Gleichung (3.8) $\vartheta = \pi$ gewählt wird. Mit (3.3) folgt dann, dass man für die Funktion f_e aus (3.13) Gleichheit erhält.

Befindet sich die Polstelle näher am Ursprung, so lässt sich eine wesentlich schärfere Aussage treffen.

Satz 3.7. *Es sei* $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-p)^n \in \mathcal{C}o_p$ *und* $p \in]0, \sqrt{3}-1]$. *Dann gilt*

$$\left| a_0 + \frac{1-p^2+p^4}{1-p^4} \right| \le \frac{p^2(2-p^2)}{1-p^4}. \tag{3.16}$$

Gleichheit erhält man für f_ϑ *aus (3.3).*

Beweis: (siehe auch [7])
Man betrachte die Funktion $f_\omega(z) = \frac{z - \frac{p}{1+p^2}(1+\omega(z))z^2}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)}$ aus Lemma 2.20 und Multipliziere mit dem Nenner. Berücksichtigt man weiterhin die Entwicklung von $\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$ für $z \in \mathbb{D}$ um p und betrachtet auf beiden Seiten die Reihenentwicklung in p, so erhält man mittels Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} -\frac{1-p^2}{p}a_{-1} &= p - \frac{p^3}{1+p^2} - \frac{p^3}{1+p^2}c_0 \\ \Leftrightarrow \qquad a_{-1} &= -\frac{p^2}{1-p^4} + \frac{p^4}{1-p^4}c_0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

und

$$a_{-1} + \frac{1-p^2}{p}a_0 = \frac{1-p^2}{1+p^2} - \frac{2p^2}{1+p^2}c_0 - \frac{p^3}{1+p^2}c_1. \tag{3.18}$$

Die Kombination von (3.17) und (3.18) ergibt

$$\frac{1-p^2}{p}a_0 + \frac{1-p^2+p^4}{1-p^4} = \frac{2p^2-p^4}{1-p^4}c_0 + \frac{p^3}{1+p^2}c_1, \tag{3.19}$$

woraus mit $|c_0| \le 1$ und $|c_1| \le \frac{1-|c_0|^2}{1-p^2}$ folgt

$$\left| \frac{1-p^2}{p}a_0 + \frac{1-p^2+p^4}{1-p^4} \right| \le \frac{p^2}{1-p^4}\left((2-p^2)|c_0| + p(1-|c_0|^2)\right).$$

Betrachtet man nun die Funktion

$$g(x) = (2-p^2)x + p(1-x^2),$$

so besitzt sie ein lokales Maximum an der Stelle $x_p = \frac{2-p^2}{2p}$. Da $x_p \geq 1$ für $p \in]0, \sqrt{3}-1]$ gilt, erhält man

$$\max\{g(x) \mid x \in [0;1]\} = g(1) = 2 - p^2.$$

Im Fall der Gleichheit muss $|\omega(z)| = |c_0| = 1$ gelten, was genau dann eintritt, wenn die Funktion von der Gestalt f_ϑ ist. □

Bemerkung 3.8. Mit $|c_0| \leq 1$ kann man aus Gleichung (3.17) sofort das Ergebnis von Satz 3.1 folgern.

3.3 Abschätzungen für weitere Koeffizienten

Analog zum Abschnitt 3.2 sollen nun Abschätzungen für weitere Koeffizienten der Laurententwicklung konkaver Funktionen erfolgen. Doch werden auch hier zunächst geeignete Hilfsmittel benötigt.

Hilfssatz 3.9. *Es sei $P(z)$ holomorph in $\mathbb{D}$ mit $\mathrm{Re}P(z) > 0$, $P(p) = 1 - p^2$ und $P'(p) = 0$ für $p \in]0;1]$. Ist P von der Gestalt*

$$P(z) = (1-p^2) + d_2\,(z-p)^2 + d_3\,(z-p)^3 + \ldots \tag{3.20}$$

für $|z-p| < 1-p$, so gilt

$$|d_2| \leq \frac{2}{1-p^2}, \tag{3.21}$$

$$\left|\frac{p}{1-p^2}d_2 + d_3\right| \leq \frac{6p}{(1-p^2)^2}, \qquad \frac{2}{3} \leq p < 1, \qquad \textit{und} \tag{3.22}$$

$$\left|\frac{p}{1-p^2}d_2 + d_3\right| \leq \frac{2(1+\frac{9}{4}p^2)}{1-p^2}, \qquad 0 < p \leq \frac{2}{3}. \tag{3.23}$$

Hierbei sind alle Ungleichungen scharf.

Beweis: (siehe auch [12])
Es sei

$$g(z) = \frac{P(z) - (1-p^2)}{P(z) + 1 - p^2}. \tag{3.24}$$

Dann gilt $g(p) = 0$ und $|g(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$, sowie

$$g'(z) = \frac{2(1-p^2)P'(z)}{(P(z)+1-p^2)^2},$$

wobei $g'(p) = 0$ ist. Multipliziert man nun in (3.24) mit dem Nenner und betrachtet die Reihenentwicklung um den Punkt p, so ergibt sich

$$\left(2(1-p^2) + \sum_{n=2}^{\infty} d_n (z-p)^n\right) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^{(k)}(p)}{k!}(z-p)^k = \sum_{n=2}^{\infty} d_n (z-p)^n. \tag{3.25}$$

Somit folgt

$$d_2 = (1-p^2)g''(p) \tag{3.26}$$

und

$$\frac{p}{1-p^2} d_2 + d_3 = pg''(p) + (1-p^2)\frac{g'''(p)}{3}. \tag{3.27}$$

Schreibt man nun

$$g(z) = \phi\left(\frac{z-p}{1-pz}\right),$$

wobei ϕ holomorph mit $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ und $|\phi(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$ ist. Des Weiteren gilt

$$g''(p) = \frac{\phi''(0)}{(1-p^2)^2}.$$

Aus $|\frac{\phi''(0)}{2}| \leq 1$ folgt $|g''(p)| \leq \frac{2}{(1-p^2)^2}$, womit man aus (3.26)

$$|d_2| = (1-p^2)|g''(p)| \leq \frac{2}{1-p^2},$$

also gerade (3.21) erhält.
Betrachtet man nun Gleichung (3.27) mit

$$g'''(p) = \frac{6p}{(1-p^2)^3}\phi''(0) + \frac{\phi'''(0)}{(1-p^2)^3},$$

so folgt

$$\frac{p}{1-p^2} d_2 + d_3 = \frac{1}{(1-p^2)^2}\left(3p\phi''(0) + \frac{\phi'''(0)}{3}\right).$$

Setzt man nun $\phi(z) = c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ für $z \in \mathbb{D}$, so ergibt sich weiterhin

$$\frac{p}{1-p^2} d_2 + d_3 = \frac{2}{(1-p^2)^2}(3pc_2 + c_3).$$

Da ϕ beschränkt ist, folgt

$$|3pc_2 + c_3| \leq 3p|c_2| + |c_3| \leq 1 + 3p|c_2| - |c_2|^2$$

und somit

$$\left|\frac{p}{1-p^2} d_2 + d_3\right| \leq \frac{2}{(1-p^2)^2}(1 + 3p|c_2| - |c_2|^2).$$

Mit $x = |c_2|$ und $h(x) = 1 + 3px - x^2$ erhält man $h'(x) = 3p - 2x$.
Ist $p \geq \frac{2}{3}$, so gilt $h'(x) \geq 0$ für $x \in [0;1]$. Das Maximum wird also in $x = |c_2| = 1$ mit $h(x) \leq h(1) = 3p$ angenommen, woraus Gleichung (3.22) folgt.
Für den Fall $0 < p \leq \frac{2}{3}$ nimmt h sein Maximum in $x = |c_2| = \frac{3p}{2}$ an. Es ist $h(x) \leq 1 + \frac{9}{4}p^2$, also (3.23).
Setzt man nun $g(z) = \left(\frac{z-p}{1-pz}\right)^2$ und somit

$$P(z) = \frac{1 + p^2 - 4pz + (1+p^2)z^2}{1 - z^2},$$

so erhält man Gleichheit in (3.21) und (3.22). Ist $0 < p \leq \frac{2}{3}$, so wählt man

$$\phi(z) = \frac{z^2(z + \frac{3}{2}p)}{1 + \frac{3}{2}pz},$$

womit man eine Funktion P konstruieren kann, die (3.23) erfüllt. □

Mit diesem Resulatat können nun Abschätzungen für die Koeffizienten a_1 und a_2 bewiesen werden.

Satz 3.10. *Es sei* $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n\,(z-p)^n \in \mathcal{C}o_p$ *und* $p \in]0;1[$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} |a_1| &\leq \frac{p^2}{(1-p^2)^3}, && && (3.28)\\ |a_2| &\leq \frac{(4+9p^2)|a_{-1}|}{12(1-p^2)^3}, && 0 < p \leq \frac{2}{3}, && (3.29)\\ \textit{und} \qquad |a_2| &\leq \frac{p\,|a_{-1}|}{(1-p^2)^3} \leq \frac{p^3}{(1-p^2)^4}, && \frac{2}{3} \leq p < 1. && (3.30) \end{aligned}$$

Wie im Hilfssatz 3.9 sind auch hier alle Abschätzungen scharf.

Beweis: (siehe auch [12])
Es sei

$$P(z) = 2pz - 1 - p^2 - \frac{(z-p)(1-pz)f''(z)}{f'(z)}. \tag{3.31}$$

Dann erfüllt P die Bedingungen vom Hilfssatz 3.9 und man erhält zum Koeffizientenvergleich den Ausdruck

$$\left(2p(z-p) - (1-p^2)\right) f'(z) - \left((z-p)(1-p^2) - p(z-p)^2\right) f''(z) = P(z)f'(z),$$

womit folgt

$$\begin{aligned} 2a_1(1-p^2) &= a_{-1}d_2 && (3.32)\\ \text{und} \qquad 6(1-p^2)a_2 &= 2pa_1 + a_{-1}d_3. && (3.33) \end{aligned}$$

Verwendet man (3.21) und (3.32), so ergibt sich

$$|a_1| \leq \frac{|a_{-1}|}{(1-p^2)^2}.$$

Mit $|a_{-1}| \leq \frac{p^2}{1-p^2}$ aus Satz 3.1 erhält man daraus (3.28).
Aus (3.32) und (3.33) folgt

$$a_2 = \frac{1}{6(1-p^2)} \left(\frac{p}{1-p^2} d_2 + d_3 \right) a_{-1}. \tag{3.34}$$

Für $0 < p \leq \frac{2}{3}$ ergeben (3.22) und (3.34) das gewünschte Ergebnis. Im Fall $\frac{2}{3} \leq p < 1$ muss man (3.23) und (3.34) kombinieren, um (3.30) zu erhalten.
Gleichheit in (3.28) und (3.30) erreicht man, wenn man wieder die Funktion $f_e(z) = \frac{z}{(1-\frac{z}{p})(1-pz)}$ aus Satz 2.16 verwendet.
Für den Fall $0 < p \leq \frac{2}{3}$ wird nach Konstruktion Gleichheit in (3.29) erzielt, wenn f genau die Bedingungen von P in Gleichung (3.31) erfüllt. □

Wenn man nun wie in Satz 3.7 voraussetzt, dass sich die Polstelle näher am Ursprung befindet, so lässt sich die folgende Aussage für den Koeffizienten a_1 beweisen. Bei dieser Betrachtung werden auch Koeffizienten höherer Ordnungen mit einbezogen.

Satz 3.11. *Es sei $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-p)^n \in \mathcal{C}o_p$ und $p \in]0; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Dann gilt*

$$\left| a_1 \left(\frac{1-p^2}{p} \right)^2 + \frac{p^2}{1-p^4} \right| \leq \frac{1}{1-p^4}. \tag{3.35}$$

Für f_ϑ aus (3.3) erhält man Gleichheit.

Beweis: (siehe auch [7])
Zusätzlich zu den Gleichungen (3.17) und (3.18) ergibt sich aus dem Koeffizientenvergleich von $(z-p)^2$ die Gleichung

$$a_0 - \frac{1-p^2}{p} a_1 = -\frac{p}{1+p^2}(1 + c_0 + 2pc_1 + p^2 c_2). \tag{3.36}$$

Setzt man dies in Gleichung (3.19) ein, so ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$a_1 \left(\frac{1-p^2}{p} \right)^2 + \frac{p^2}{1-p^4} = \frac{c_0}{1-p^4} + \frac{2p-p^3}{1+p^2} c_1 + \frac{p^2-p^4}{1+p^2} c_2 =: \Phi_p(\omega). \tag{3.37}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$|\Phi_p(\omega)| \leq \frac{1}{1-p^4} \tag{3.38}$$

gilt, wobei ω wie im Beweis zu Satz 3.7 gewählt sei.
Fasst man Φ_p als lineares Funktional in H^∞ auf (siehe auch Beweis zu Satz 2.21), kann die

Funktion $\Phi_p(\omega)$ in der Form

$$\Phi_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \kappa_p(z)\omega(z)dz \tag{3.39}$$

dargestellt werden, wobei gelte

$$\kappa_p(z) = \frac{1}{(1-p^4)(z-p)} + \frac{2p-p^3}{(1+p^2)(z-p)^2} + \frac{p^2-p^4}{(1+p^2)(z-p)^3}.$$

Das Funktional Φ_p verändert sich nicht, wenn man anstelle von κ_p einen äquivalenten Kern K_p wählt, der dieselbe Singularität in p besitzt und sonst holomorph in $\overline{\mathbb{D}}$ ist.
Sei also

$$\begin{aligned} K_p(z) =& \frac{1}{1-p^4}\left(\frac{1}{z-p} + \frac{p}{1-pz}\right) + \frac{2p-p^3}{1+p^2}\left(\frac{1}{(z-p)^2} + \frac{1}{(1-pz)^2}\right) \\ &+ \frac{p^2-p^4}{1+p^2}\left(\frac{1}{(z-p)^3} + \frac{z}{(1-pz)^3}\right), \end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta}K_p(e^{i\vartheta})(1+p^2)|1-pe^{i\vartheta}|^6 &= (1-2p\cos\vartheta+p^2)^2 \\ &\quad + (2p-p^3)(-4p+2(1+p^2)\cos\vartheta)(1-2p\cos\vartheta+p^2) \\ &\quad + (p^2-p^4)(4\cos^2\vartheta-(2p^3+6p)\cos\vartheta-2+6p^2) \\ &= 4p^4(-2+p^2)\cos^2\vartheta \\ &\quad + 4p^3(3-p^2)\cos\vartheta + 1 - 8p^2 + 5p^4 - 2p^6 \\ &=: Q_p(\cos(\vartheta)) \end{aligned}$$

mit $\vartheta \in [0;2\pi]$. Betrachtet man $x = \cos\vartheta$, so hat die Funktion Q_p ein lokales Maximum im Punkt $x_p = \frac{3-p^2}{2p(2-p^2)}$. Da $x_p > 1$ für $p \in]0;1[$ gilt, erhält man

$$Q_p(\cos(\vartheta)) \geq Q_p(-1) = 1 - 8p^2 - 12p^3 - 3p^4 + 4p^5 + 2p^6 =: S(p).$$

Aus $S'(p) < 0$ für $p \in]0;1[$ und $S\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ ergibt sich

$$e^{i\vartheta}K_p(e^{i\vartheta}) \geq 0, \quad \vartheta \in [0;2\pi] \quad \text{und} \quad p \in \left(0, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]. \tag{3.40}$$

Somit folgt aus

$$\begin{aligned} |\Phi_p(\omega)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \kappa_p(z)\omega(z)dz\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} K_p(z)\omega(z)dz\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{i\vartheta}K_p(e^{i\vartheta})|d\vartheta\|\omega\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta}K_p(e^{i\vartheta})d\vartheta\|\omega\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta}K_p(e^{i\vartheta})d\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} K_p(z)dz \\
&= \frac{1}{1-p^4} \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

gerade (3.38), also auch (3.35).
In (3.41) erhält man Gleichheit an jeder Stelle, wenn $\omega \equiv 1$ gilt (siehe auch Bemerkung 2.22). Weiterhin ist mit (3.40) auch die Bedingung aus Lemma 2.14 erfüllt und man kann die Theorie der Extremalprobleme in H^∞ auf das lineare Funktional Φ_p anwenden.
Nach Satz 2.15 existiert dann eine eindeutige normierte Funktion ω_e, so dass gilt

$$\max\{|\Phi_p(\omega)| \mid \omega \in H^\infty, \|\omega\|_\infty \leq 1\} = \Phi_p(\omega_e),$$

wobei nach obigen Überlegungen $\omega_e \equiv 1$ sein muss. Gleichheit in (3.38) ergibt sich also nach Bemerkung 2.13 für $\omega(z) = e^{i\vartheta}$ mit einem bestimmten $\vartheta \in [0; 2\pi[$, woraus, nach Konstruktion, f von der Gestalt f_ϑ sein muss. Damit folgt die Behauptung. □

Mit dieser Schlussfolgerung soll die Arbeit schliessen.

Literaturverzeichnis

[1] Avkhadiev, F.G and K.-J. Wirths: *Convex holes produce lower bounds for coefficients.* Complex Variables, 47:553–563, 2002.

[2] Avkhadiev, F.G and K.-J. Wirths: *On a conjecture of Livingston.* Mathematica(Cluj), 46(69):19–23, 2004.

[3] Avkhadiev, F.G and K.-J. Wirths: *On the coefficients of concave univalent functions.* Mathematische Nachrichten, 271:3–9, 2004.

[4] Avkhadiev, F.G and K.-J. Wirths: *A proof of the Livingston conjecture.* Forum math., 19:149–157, 2007.

[5] Avkhadiev, F.G. and K.-J. Wirths: *Schwarz-Pick type inequalities.* Birkhaeuser, Basel, 2009.

[6] Avkhadiev, F.G, K.-J. Wirths and Ch. Pommerenke: *Sharp inequalities for the coefficients of concave schlicht functions.* Comment. math. helv., 81:801–807, 2006.

[7] Bhowmik, B., S. Ponnusamy and K.-J. Wirths: *Domains of variability of Laurent coefficients and the convex hull for the family of concave univalent functions.* Kodai Math. J., 30:385–393, 2007.

[8] Duren, P.: *Univalent Functions.* Springer, Berlin, 1998.

[9] Duren, P.: *Theory of Hp spaces.* Dover, New York, 2000.

[10] Goodman, A.W.: *Functions typically-real and meromorphic in the unit circle.* Trans. Amer. Math. Soc., 81:92–105, 1956.

[11] Jenkins, J.A.: *On a conjecture of Goodman concerning meromorphic univalent functions.* Michigan Math. J., 9:25–27, 1962.

[12] Livingston, A.E.: *Convex meromorphic mappings.* Annales Polonici Mathematici, 59:275–291, 1994.

[13] Miller, J.: *Convex meromorphic mappings and related functions.* Proc. Amer. Math. Soc., 25:220–228, 1970.

[14] Miller, J.: *Convex and starlike meromorphic functions.* Proc. Amer. Math. Soc., 80:607–613, 1980.

[15] Pommerenke, Ch.: *Univalent Functions.* Vandenhoeck & Ruprecht, Goettingen, 1975.

[16] Pommerenke, Ch.: *Boundary Behaviou of Conformal Maps.* Springer, Berlin, 1992.

[17] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1986.

[18] Shapiro, J.H.: *Composition Operators and Classical Function Theory.* Springer, New York, 1993.

[19] Wirths, K.-J.: *On the residuum of concave univalent functions.* Serdica Math. J., 32:209–214, 2006.

Erklärung

Hiermit erkläre und versichere ich, gemäß Paragraph §31 Absatz (2) der Prüfungsordnung, die vorliegende Arbeit eigenständig und ohne fremde Hilfe angefertigt zu haben. Dabei wurden keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet.

Würzburg, 17. Februar 2011